

УДК 539.3

## НЕЛІНІЙНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ТОНКОГО МІЖФАЗНОГО ВКЛЮЧЕННЯ

Г. Т. СУЛИМ<sup>1</sup>, Й. З. ПІСКОЗУБ<sup>2</sup><sup>1</sup> Львівський національний університет імені Івана Франка;<sup>2</sup> Українська академія друкарства, Львів

Побудовано модель тонкого включення з нелінійними та анізотропними механічними властивостями загального вигляду. З її використанням методами задачі спряження граничних значень аналітичних функцій та функцій стрибка побудовано систему сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) зі змінними коефіцієнтами-функціями, яка дає можливість описати довільний спосіб зміни квазістатичного навантаження та його вплив на напружено-деформований стан у тілі з неоднорідністю на основі інкрементального підходу. Для числового розв'язування СІР запропоновано збіжний ітераційний аналітико-числовий метод.

**Ключові слова:** тонке включення, нелінійна деформація, поздовжній зсув, функції стрибка.

Тонкі неоднорідності різноманітної фізичної природи у вигляді дефектів (тріщини, включення), конструкційних (підкріплення, накладки) чи функціональних (різного типу давачі) елементів, арматури композитів, наповнювачів під час застосування ін'єкційних технологій для "заліковування" дефектів тощо [1–4] дуже часто збурюють однорідну будову матеріалів і тіл. Задачі такого типу у разі лінійності фізико-механічних властивостей неоднорідностей та ідеального контакту між компонентами вже достатньо добре вивчені, зокрема і для скінченних тіл та з урахуванням термічних і електромагнетних ефектів із використанням гранично-елементного методу функцій стрибка [1, 2, 5–7]. Водночас нелінійний характер задач (фізична пружна чи непружна нелінійність, а також невизначеність ділянки контакту за можливості її порушення) мало досліджений. Поміж праць на цю тематику варто згадати дослідження напружено-деформованого стану (НДС) пружної пластини з тонким в'язкопружним включенням [3], врахування можливості розщеплення включення-балки [8] чи фрикційного контакту [4, 5, 9–12], створення та застосування конститутивних співвідношень моделі деформування аркуша паперу [13] чи гумової мембрани [14].

Мета роботи – розвинути метод функцій стрибка та побудувати моделі тонких включень-прошарків, матеріал яких має істотно нелінійні деформаційні властивості за різного навантаження тіла, в тому числі багатокрокового чи циклічного.

**Методика досліджень.** Досліджено НДС перерізу безмежного ізотропного масиву, який складається з двох півпросторів з пружними сталими  $G_1$ ,  $G_2$ , площиною  $xOy$ , перпендикулярною до напрямку осі  $Oz$  його поздовжнього зсуву. Перпендикулярні до цієї осі плоскі перерізи півпросторів утворюють дві півплощини  $S_k$  ( $k = 1, 2$ ), а вісь  $Ox$  відповідає межі поділу  $L$  між ними. На ній вздовж відрізка  $L' = [-a; a]$  розташоване тонке включення завтовшки  $2h \ll a$ , механічні властивості якого у різних напрямках можуть різнитися (ортотропія) і характеризуватися конститутивним рівнянням доволі загального нелінійного вигляду

$$\frac{\partial w^{in}}{\partial s} = \overline{\omega}_s (\sigma_{xz}^{in}, \sigma_{yz}^{in}), \quad s = \{x, y\}, \quad (1)$$

де монотонну функцію  $\overline{\omega}_s (\sigma_{xz}^{in}, \sigma_{yz}^{in})$  обирають із загальнотеоретичних міркувань, або вона є якоюсь апроксимаційною залежністю експериментальних результатів.

Зовнішні силові чинники (рівномірно розподілені на нескінченності напруження  $\sigma_{yz}^{\infty} = \sum_p \tau_{(p)}(t)$ ,  $\sigma_{xz}^{\infty} = \sum_p \tau_{k(p)}(t)$ , зосереджені сили інтенсивності  $Q_k(t) = \sum_p Q_{k(p)}(t)$ , гвинтові дислокації із складовою вектора Бюргерса  $b_k(t) = \sum_p b_{k(p)}(t)$  в точках  $z_{*k} \in S_k$  ( $k=1,2$ )), що здійснюють поздовжній зсув масиву уздовж осі  $Oz$ , змінюються квазістатично за довільним законом у вигляді монотонно змінюваних у часових проміжках  $[t_{(p-1)}; t_{(p)}]$  покрокових послідовностей. Тут  $(p)$  – номер кроку навантажування. Напруження на нескінченності повинні в довільний момент часу задовольняти умову  $\tau_{2(p)}(t)G_1 = \tau_{1(p)}(t)G_2$ , що забезпечує прямолінійність межі поділу матеріалів на нескінченності.

Застосування під час розв'язування задачі однакового традиційного позначення для осі  $z$  та комплексної змінної  $z = x + iy$  не повинно викликати непорозумінь.

Тонке включення в масиві на межі поділу матеріалів моделюють стрибки компонент векторів напружень і переміщень на  $L'$  [1, 5]:

$$\begin{aligned} [\sigma_{yz}]_{h(p)} &\equiv \sigma_{yz}^- - \sigma_{yz}^+ = f_{3(p)}(x, t), \quad \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{h(p)} \equiv \frac{\partial w^-}{\partial x} - \frac{\partial w^+}{\partial x} = \left[ \frac{\sigma_{xz}}{G} \right]_{h(p)} \equiv \\ &\equiv \frac{\sigma_{xz}^-}{G_1} - \frac{\sigma_{xz}^+}{G_2} = f_{6(p)}(x, t), \quad x \in L' ; \\ f_{3(p)}(x, t) &= f_{6(p)}(x, t) = 0, \quad \text{якщо } x \notin L', \end{aligned} \quad (2)$$

де  $t$  – деякий момент часу як формальний монотонно зростаючий параметр, пов'язаний зі змінюваністю навантаження. Тут і далі позначено:  $[\varphi]_h = \varphi(x, -h) - \varphi(x, +h)$ ,  $\langle \varphi \rangle_h = \varphi(x, -h) + \varphi(x, +h)$ ; індекси “+” та “-” відповідають граничним значенням функцій на верхньому і нижньому берегах розрізу  $L'$ .

Контакт між півпросторами уздовж лінії  $L'' = L \setminus L'$  та між масивом і берегами включення вздовж  $L'$  вважаємо ідеальним

$$w^{in}(x, \pm h) = w_k(x, \pm h), \quad \sigma_{yz}^{in}(x, \pm h) = \sigma_{yzk}(x, \pm h) \quad (x \in L'). \quad (3)$$

Математичну модель тонкого включення подаємо у вигляді так званих умов взаємодії [1, 5, 6, 9–12], які еквівалентні умовам неідеального контакту між прилеглими до включення поверхнями матриці. В основі застосованої методики моделювання впливу тонкого об'єкта лежить схема інтегрування за його об'ємом рівнянь опису фізико-механічного стану матеріалу включення, з подальшим урахуванням малості його товщини та заданих конститутивних залежностей.

Інтегруючи рівняння рівноваги для внутрішніх точок включення  $\partial \sigma_{xz}^{in} / \partial x + \partial \sigma_{yz}^{in} / \partial y = 0$  за  $x$  в межах  $[-a, x]$  та усереднюючи за товщиною  $y \in [-h, h]$ , отримуємо з урахуванням тонкостінності та умов контакту включення з матрицею (3) такі рівняння математичної моделі тонкого фізично нелінійного включення:

$$-\frac{[w]_h}{h} = \left\langle \overline{\omega}_s (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) \right\rangle, \quad \left\langle \overline{\omega}_x^{-1} \left( \frac{\sigma_{xz}}{G_k}, \frac{\sigma_{yz}}{G_k} \right) \right\rangle_h - 2\sigma_{xz}^{in}(-a) - \frac{1}{h} \int_{-a}^x [\sigma_{yz}]_h(\xi) d\xi = 0. \quad (4)$$

Спрощення функції  $\overline{\sigma}_s(\sigma_{xz}^{in}, \sigma_{yz}^{in})$  можливе за нехтування у ній взаємним впливом напружень:  $\overline{\sigma}_s(\sigma_{xz}^{in}, \sigma_{yz}^{in}) \sim \overline{\sigma}_s(\sigma_{sz}^{in})$  (модель нелінійних пружин типу Вінклера). Тоді співвідношення (1) можна записати у простішому вигляді  $\partial w^{in} / \partial s = \overline{\sigma}_s(\sigma_{sz}^{in})$   $\{s = x, y\}$  або

$$\sigma_{sz}^{in} = G_s^{in}(\sigma_{xs}^{in}) \frac{\partial w^{in}}{\partial s}, \quad \{s = x, y\} \quad (5)$$

із заданими певним чином змінюваними модулями зсуву  $G_s^{in}(\sigma_{xs}^{in})$ . Наприклад: класичний закон лінійної пружності Гука; моделі пластичного деформування Баха–Шюле, Соколовського, Ільюшина [15]; модель деформування, задана функцією, що апроксимує емпіричні дані конкретного матеріалу; модель лінійного пружно-пластичного деформування зі зміцненням [15–17]

$$\begin{cases} \frac{\partial w^{in}}{\partial s} = \frac{\sigma_{sz}^{in}}{G_{0s}}, & |\sigma_{sz}^{in}| < \tau_{pl}, \quad s = \{x, y\} \\ \frac{\partial w^{in}}{\partial s} = (\sigma_{sz}^{in} - \tau_{pl}) \frac{G_{0s} - G_{1s}}{G_{0s}G_{1s}}, & |\sigma_{sz}^{in}| \geq \tau_{pl}; \end{cases} \quad (6)$$

модель деформування у формі Рамберга–Осгуда

$$\frac{\partial w^{in}}{\partial s} = \frac{\sigma_{sz}^{in}}{G_{os}} \left( 1 + K_s \left( \frac{\sigma_{sz}^{in}}{G_{os}} \right)^{m_s - 1} \right), \quad s = \{x, y\}, \quad (7)$$

де  $G_{os}$ ,  $G_{1s}$ ,  $m_s$ ,  $K_s$ ,  $\tau_{pl}$  – параметри матеріалу включення. Зазначимо, що модель (7) можна розглядати і як варіант нелінійного ідеально пружного деформування.

Для кожної із згаданих моделей деформування виду (5) з урахуванням співвідношення (3) можна отримати такий вигляд математичної моделі фізично ортотропно нелінійного тонкого включення:

$$\begin{aligned} G_x^{in}(\sigma_{xz}^{in}, t) \left\langle \frac{\partial w}{\partial x} \right\rangle_h(x, t) - 2\sigma_{xz}^{in}(-a) - \frac{1}{h} \int_{-a}^x [\sigma_{yz}]_h(\xi, t) d\xi &= 0, \\ G_y^{in}(\sigma_{yz}^{in}, t) [w]_h(x, t) + h \langle \sigma_{yz} \rangle_h(x, t) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Модель (8) можна узагальнити врахуванням складнішої залежності (1), можливого неідеального контакту між матрицею та включенням, додаткового силового і теплового навантаження тощо. Однак такі ускладнення моделі не потребуватимуть зміни загальної схеми розв'язування задачі.

Застосовуючи до розв'язку задачі методику [1], можна отримати залежності, згідно з якими, компоненти тензора напружень і похідні вектора переміщень на лінії  $L$  площини  $S$ , а також всередині  $S$  такі:

$$\begin{aligned} \sigma_{yz(1)}^{\pm}(x, t) &= \mp p_k f_{3(1)}(x, t) - C g_{6(1)}(x, t) + \sigma_{yz(1)}^{0\pm}(x, t), \\ \sigma_{xz(1)}^{\pm}(x, t) &= \mp C f_{6(1)}(x, t) + p_k g_{3(1)}(x, t) + \sigma_{xz(1)}^{0\pm}(x, t), \\ \sigma_{yz(1)}(z, t) + i \sigma_{xz(1)}(z, t) &= \sigma_{yz(1)}^0(z, t) + i \sigma_{xz(1)}^0(z, t) + \\ &+ i p_k g_{3(1)}^n(z, t) - C g_{6(1)}^n(z, t) \quad (z \in S_k; r = 3, 6; k = 1, 2); \\ g_{r(p)}(z, t) &\equiv \frac{1}{\pi} \int_{L'_n(p)} \frac{f_{r(p)}(x, t) dx}{x - z}, \quad p_k = \frac{G_k}{G_1 + G_2}, \quad C = G_{3-k} p_k. \end{aligned} \quad (9)$$

Верхній індекс “+” стосується  $k = 2$ ; “-“  $-k = 1$ . Індекс “0” характеризує відповідні величини у суцільному тілі без тонких неоднорідностей (включень, тріщин тощо) за того ж самого зовнішнього навантаження (однорідний розв’язок). Тут і далі для кожного кроку навантажування використані позначення [9–11]:

$$\begin{aligned} & \sigma_{yz(p)}^0(z, t) + i\sigma_{xz(p)}^0(z, t) = \\ & = \tau_{(p)}(t) + i\left\{ \tau_{k(p)}(t) + D_{k(p)}(z, t) + (p_k - p_j)\overline{D}_{k(p)}(z, t) + 2p_k D_{j(p)}(z, t) \right\}, \quad (10) \\ & D_{k(p)}(z, t) = -\frac{Q_{k(p)}(t) + iG_k b_{k(p)}(t)}{2\pi(z - z_{*k})} \quad (z \in S_k, k = 1, 2; j = 3 - k). \end{aligned}$$

Використовуючи залежності (9), (10) та крайові умови (3), з моделі (8) отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь (ССІР), записану у безрозмірному вигляді

$$\begin{cases} \alpha \tilde{f}_{6(1)}(\tilde{x}, t) + \beta \tilde{g}_{3(1)}(\tilde{x}, t) - \eta_3 \int_{-1}^{\tilde{x}} \tilde{f}_{3(1)}(\xi, t) d\xi = \tilde{F}_{3(1)}(\tilde{x}, \sigma_{xz(1)}^{in}, t), \\ \alpha \tilde{f}_{3(1)}(\tilde{x}, t) + \beta \tilde{g}_{6(1)}(\tilde{x}, t) - \eta_6 \int_{-1}^{\tilde{x}} \tilde{f}_{6(1)}(\xi, t) d\xi = \tilde{F}_{6(1)}(\tilde{x}, \sigma_{yz(1)}^{in}, t), \end{cases} \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned} & \alpha = (p_2 - p_1), \quad \beta = 2\tilde{C}, \quad \eta_3 = 1/\tilde{h}\tilde{G}_x^{in}(\sigma_{xz}^{in}), \\ & \eta_6 = \tilde{G}_y^{in}(\sigma_{yz}^{in})/\tilde{h}, \quad \tilde{x} = x/a, \quad \tilde{h} = h/a, \quad \tilde{y} = y/a, \\ & \tilde{G}_{0s} = G_{0s}/G_{av}, \quad \tilde{G}_s^{in}(\sigma_{sz}^{in}) = G_s^{in}(\sigma_{sz}^{in})/G_{av}, \\ & \tilde{f}_3 = G_{av}f_3, \quad \tilde{f}_6 = f_6, \quad \tilde{F}_3 = F_3/G_{av}, \quad \tilde{F}_6 = F_6/G_{av}, \\ & G_{av} = \left\{ \sqrt{G_1 G_2}, \max(G_1, G_2), \tau, \tau_{pl}, Q/\pi a \right\}, \quad \tilde{Q}_k = Q_k/a\pi G_{av}, \quad \tilde{C} = C/G_{av}, \\ & \tilde{z}_{*k} = z_{*k}/a = \tilde{x}_{*k} + i\tilde{y}_{*k}, \quad \tilde{\tau}_k = \tau_k/G_{av}, \quad \tilde{\tau} = \tau/G_{av}, \quad G_d = G_2/G_1; \\ & F_{3(1)}\left(x, G_x^{in}(\sigma_{xz(1)}^{in}), t\right) = \frac{2\sigma_{xz(1)}^{in}(-a)}{G_x^{in}(\sigma_{xz(1)}^{in})} - \left( \frac{\sigma_{xz2}^0(x, t)}{G_2} + \frac{\sigma_{xz1}^0(x, t)}{G_1} \right), \\ & F_{6(1)}\left(x, G_y^{in}(\sigma_{yz(1)}^{in}), t\right) = \\ & = \left\langle \sigma_{yz}^0 \right\rangle(x, t) - G_y^{in}(\sigma_{yz(1)}^{in}) \left( \frac{\sigma_{yz2}^0(x, t)}{G_2} + \frac{\sigma_{yz1}^0(x, t)}{G_1} \right) - \frac{G_y^{in}(\sigma_{yz(1)}^{in})}{h} [w^0](-a) \end{aligned}$$

з додатковими умовами силового балансу та однозначності переміщень за обходу навколо дефекту

$$\int_{-a}^a f_{3(1)}(\xi, t) d\xi = 2h \left( \sigma_{xz(1)}^{in}(a) - \sigma_{xz(1)}^{in}(-a) \right), \quad \int_{-a}^a f_{6(1)}(\xi, t) d\xi = [w]_{(1)}(a) - [w]_{(1)}(-a). \quad (12)$$

Тут

$$\begin{aligned} & \left\langle \sigma_{yz}^0(x, t) + i\sigma_{xz}^0(x, t) \right\rangle = 2\tau_{(1)}(t) + i\left\{ \tau_{1(1)}(t) + \tau_{2(1)}(t) \right\} + i\left\{ (3p_1 + p_2)D_{2(1)}(x, t) + \right. \\ & \left. + (p_2 - p_1)\overline{D}_{2(1)}(x, t) + (3p_2 + p_1)D_{1(1)}(x, t) + (p_1 - p_2)\overline{D}_{1(1)}(x, t) \right\}. \end{aligned}$$

Для розв’язування ССІР (11), (12) можна використати методику [9–11] з урахуванням того, що характеристична частина цієї системи від нелінійних функцій-коефіцієнтів явно не залежить [18]. Відтак ССІР на кожному кроці навантажування зводять до системи лінійних алгебричних рівнянь щодо невідомих коефіцієнтів розв’язування функцій стрибка  $f_{r(1)}(x, t)$  у ряди за поліномами Чебишова.

Залежність  $G_s^{in}(\sigma_{sz(1)}^{in}, t)$  від поточного НДС породжує серйозні труднощі під час розрахунку через його змінюваність вздовж межі  $L$ . Тому застосовуємо ітераційну стратегію уточнення  $G_s^{in}(\sigma_{sz(1)}^{in}, t)$  у кожній точці включення  $x_m$  в момент часу  $t$  під час розв'язування задачі [9–11]. Отримані в момент часу  $t_{(1)}$  завершення першого (початкового) кроку значення компонент НДС масиву на другому кроці (додатковому навантаженні чи розвантаженні) матимуть сенс залишкових. З урахуванням цього стає зрозуміло, що формулювання задач другого та першого кроків різняться лише наявністю вже заданих стрибків переміщень та напружень, спричинених першим кроком. Тоді подання загального поля напружень має вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}(z, t) + i\sigma_{xz}(z, t) = & \sigma_{yz(1)}(z, t_{(1)}) + i\sigma_{xz(1)}(z, t_{(1)}) + \sigma_{yz(2)}^0(z, t) + \\ & + i\sigma_{xz(2)}^0(z, t) + ip_k g_{3(2)}(z, t) - Cg_{6(2)}(z, t) \quad (z \in S_k; k = 1, 2; j = 3 - k). \end{aligned} \quad (13)$$

Напруження та переміщення повинні задовольняти крайові умови (3) на контурі  $L'$ . Тоді з урахуванням співвідношень (13), (9) можна сформулювати таку локальну крайову задачу для другого кроку:

$$\begin{aligned} \sigma_{yz(2)}(z, t) + i\sigma_{xz(2)}(z, t) = & \sigma_{yz}(z, t) + i\sigma_{xz}(z, t) - \left\{ \sigma_{yz(1)}(z, t_{(1)}) + i\sigma_{xz(1)}(z, t_{(1)}) \right\} \\ (z \in S_k; k = 1, 2; j = 3 - k) \end{aligned} \quad (14)$$

з крайовими умовами, які отримують ідентичний до умов (3) вигляд

$$w_{(2)}^{in}(x, \pm h) = w_{k(2)}(x, \pm h), \quad \sigma_{yz(2)}^{in}(x, \pm h) = \sigma_{yzk(2)}(x, \pm h) \quad (x \in L'). \quad (15)$$

Оскільки структура залежностей (13), (15) є така ж, як у формул (9), (3), то ССІР для визначення локальних (щодо досягнутого у момент часу  $t_{(1)}$  НДС) стрибків переміщень та напружень  $f_{3(2)}, f_{6(2)}$  від локального (для цього кроку) навантаження при  $\tau_{(2)}(t) = \tau(t) - \tau_{(1)}(t_{(1)})$ ,  $\tau_{k(2)}(t) = \tau_k(t) - \tau_{k(1)}(t_{(1)})$ ,  $Q_{k(2)}(t) = Q_k(t) - Q_{k(1)}(t_{(1)})$  ( $k = 1, 2; t > t_{(1)}$ ) матиме аналогічний до співвідношень (11), (12) вигляд. Залежність  $G_s^{in}(\sigma_{sz(2)}^{in}, t)$  від поточного локального НДС на цьому кроці обчислюють з урахуванням повного НДС із застосуванням вищезгаданої ітераційної стратегії розв'язування задачі.

Цей алгоритм можна продовжити на довільну кількість достатньо малих для забезпечення належної точності розрахунків кроків квазістатичного навантажування на кожному із інтервалів монотонності змінюваного навантаження.

**Результати досліджень.** Числовий аналіз розв'язку задачі зроблено для окремого випадку рівності пружних характеристик півпросторів ( $G_1 = G_2 = G$ ), покрової зміни навантажування зосередженими силами  $\tilde{Q} = Q/aG_{av}$  ( $\tilde{Q}_2 = -\tilde{Q}_1 = \tilde{Q}$ ,  $\tilde{z}_2 = -\tilde{z}_1 = i\tilde{d}$ ) у глобальному циклі навантажування-розвантажування внаслідок зміни  $Q$ :  $0; 1,5G_{av}; -1,5G_{av}; 1,5G_{av}; \dots$ . Порівняння результатів застосування конститутивних залежностей пружно-пластичного (штрихова лінія) деформування зі зміцненням (6) і суто пружного (суцільна) при  $\tilde{h} = 0,001$ ,  $\tilde{G}_{0y} = 5$ ,  $\tilde{G}_{1y} = 2$ ,  $\tilde{d} = 1$  відображено на рис. 1а. Добре помітно, що після досягнення певного критичного значення  $\tilde{Q}$  починається пластична деформація, локалізована вздовж  $L'' = [-b; b]$ . Гістерезисна поведінка НДС матеріалу включення впродовж вищезгаданого симетричного циклу навантажування при  $\tilde{h} = 0,001$ ,  $\tilde{G}_{0y} = 5$ ,  $\tilde{G}_{1y} = 2$ ,  $\tilde{d} = 0,5$  у різних його точках проілюстрована на рис. 2а.

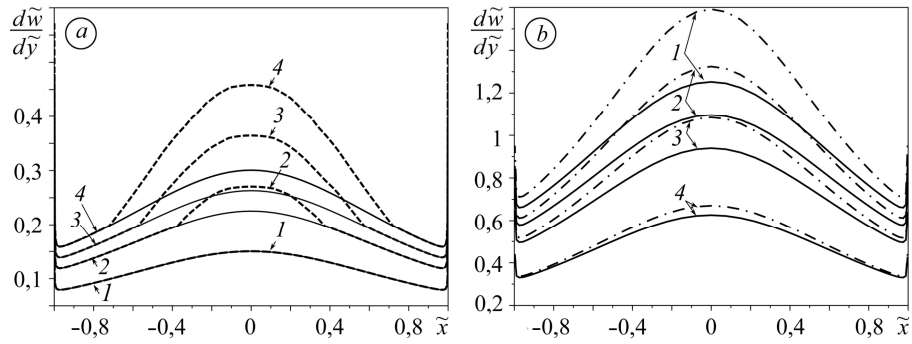


Рис. 1. Розподіл пружно-пластичних деформацій включення (штрихова лінія) і суто пружних (суцільна) за навантаження  $\tilde{Q} = 0,5$  (1);  $\tilde{Q} = 0,75$  (2);  $\tilde{Q} = 1,25$  (3);  $\tilde{Q} = 1,5$  (4) за моделлю (6) (a) та (7) (b).

Fig. 1. Distribution of elastic-plastic deformations in the inclusion (dashed line) in comparison with perfectly elastic case (solid line) under loading:  $\tilde{Q} = 0.5$  (1);  $\tilde{Q} = 0.75$  (2);  $\tilde{Q} = 1.25$  (3);  $\tilde{Q} = 1.5$  (4) by model (6) (a) and (7) (b).

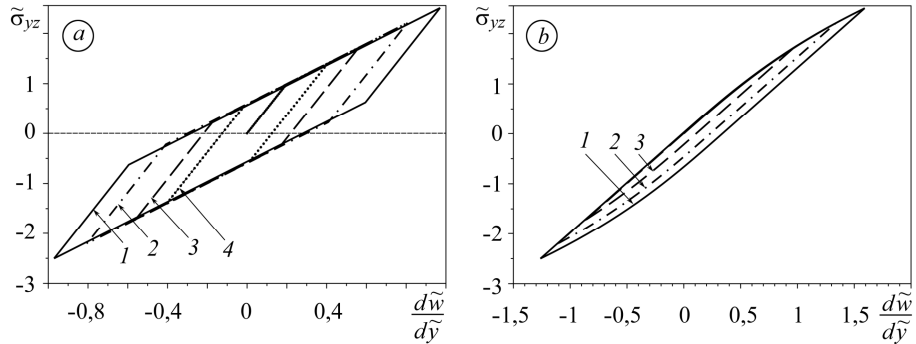


Рис. 2. Гістерезисна поведінка НДС матеріалу включення впродовж симетричного циклу навантаження у точках  $\tilde{x}$ : 1 –  $\tilde{x} = 0$ ; 2 –  $\tilde{x} = 0,25$ ; 3 –  $\tilde{x} = 0,5$ ; 4 –  $\tilde{x} = 0,75$  за моделлю (6) (a) та (7) (b).

Fig. 2. Hysteresis behavior of the stress-strain state of the inclusion material during the symmetric cycle in points  $\tilde{x}$ : 1 –  $\tilde{x} = 0$ ; 2 –  $\tilde{x} = 0.25$ ; 3 –  $\tilde{x} = 0.5$ ; 4 –  $\tilde{x} = 0.75$  by model (6) (a) and (7) (b).

Якщо прийняти замість моделі деформування включення (6) модель (7), то аналогічний до попереднього випадку розподіл пружно-пластичних деформацій вздовж  $L'$  (штрихпунктирна лінія) порівняно з лінійно пружною моделлю деформування (суцільна) при  $\tilde{h} = 0,001$ ,  $\tilde{G}_{0y} = 2$ ,  $K_y = 0,5$ ,  $m_y = 3$ ,  $\tilde{d} = 0,5$  (рис. 1b).

Гістерезисна поведінка НДС матеріалу включення для моделі деформування (7) впродовж вищезгаданого симетричного циклу навантаження у різних точках включення проілюстрована на рис. 2b.

### ВИСНОВКИ

Розвинуто методику побудови моделей тонких включень-прошарків за нелінійності та анізотропії їхніх механічних властивостей загального вигляду. З її використанням методами задачі спряження граничних значень аналітичних функцій та функцій стрибка побудована ССІР із змінними коефіцієнтами-функціями, яка дає можливість описати довільний спосіб зміни квазістатичного навантаження (монотонний чи ні) та його вплив на НДС у тілі з неоднорідністю на основі інкрементального підходу. Для числового розв'язування ССІР запропоновано ітераційний аналітико-числовий метод.

**РЕЗЮМЕ.** Построена модель тонкого включения с нелинейными и анизотропными механическими свойствами общего вида. С ее использованием методами задачи сопряже-

ния предельных значений аналитических функций и функций скачка построена система сингулярных интегральных уравнений (ССИУ) с переменными коэффициентами-функциями, которая дает возможность описать произвольный способ изменения квазистатического нагружения (монотонного или нет) и его влияние на напряженно-деформированное состояние в теле с неоднородностью на основе инкрементального подхода. Для численного решения ССИУ предложен итерационный аналитико-численный метод.

*SUMMARY.* The method of constructing models of thin inclusions-layers for the case of nonlinearity and anisotropy of their mechanical properties of general appearance is developed. Using the jump functions and the coupling problem of boundary values of analytical functions methods is reduced the problem to the system of singular integral equations (SSIE) on jump functions with variable coefficients that enables to describe arbitrarily changing quasi-static loading (monotonic or not) and its impact on stress-strain state in the body with the heterogeneity based on incremental approach. A consistent iterative numerical-analytical method is offered to solve such SSIE.

1. Сулим Г. Т. Основы математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
2. Savruk M. P. and Kazberuk A. Stress Concentration at Notches. – Switzerland: Springer Int. Publ., 2017. – Vol. VII. – 510 p.
3. Силованюк В. П., Ревенко А. В. Вплив повзучості матеріалу включення на концентрацію напружень в тілі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – 45, № 4. – С. 76–80.  
(Sylovanyuk V. P. and Revenko A. V. Influence of creep of the material of inclusions on the stress concentration in the body // Materials Science. – 2009. – 45, № 4. – P. 555–561.)
4. Goryacheva I. G. Contact Mechanics in Tribology. – Springer, 1998. – Vol. XIV. – 346 p.
5. Сулим Г. Т., Піскозуб Й. З. Умови контактної взаємодії (огляд) // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2004. – 47, № 3. – С. 110–125.
6. Piskozub J. Z. and Sulim G. T. Thermoelastic equilibrium of piecewise homogeneous solids with thin inclusions // J. Eng. Mathematics Special Issue Thermomech. – 2008. – 61. – P. 315–337.
7. Sulym H., Pasternak Ia., and Pasternak R. Boundary element analysis of multifield materials. – Białystok: Printing House of Białystok University of Techn., 2015. – P. 172.
8. Khudnev A. M. and Leugering G. R. Delaminated thin elastic inclusions inside elastic bodies // Mathematics and Mech. Complex Systems. – 2014. – 2, № 1. – 24 p.
9. Antiplane deformation of a bimaterial containing an interfacial crack with the account of friction. 1. Single loading / H. Sulym, L. Piskozub, Y. Piskozub, and Ia. Pasternak // Acta Mechanica et Automatica. – 2015. – 9, № 2. – P. 115–121.
10. Antiplane deformation of a bimaterial containing an interfacial crack with the account of friction. 2. Repeating and Cyclic loading / H. Sulym, L. Piskozub, Y. Piskozub, and Ia. Pasternak // Acta Mechanica et Automatica. – 2015. – 9, № 3. – P. 178–184.
11. Longitudinal shear of a bimaterial with frictional sliding contact in the interfacial crack / H. Sulym, L. Piskozub, Y. Piskozub, and Ia. Pasternak // J. Theoretic. and Appl. Mech. – 2015. – 54, № 2. – P. 529–539.
12. Піскозуб Л. Г., Сулим Г. Т., Пастернак Я. М. Вплив тертя на гістерезис при циклічному навантаженні поздовжнім зсувом масиву з міжфазною тріщиною // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2014. – Вип. 12. – С. 184–191.
13. Harrysson A. and Ristinmaa M. Large strain elasto-plastic model of paper and corrugated board // Int. J. Solids and Struct. – 2008. – 45. – P. 3334–3352.
14. Analysis of the nonlinear elastic response of rubber membrane with embedded circular rigid inclusion / Sang Jianbin, Xing Sufang, Wang Ling, Wang Jingyuan, and Zhou Jing // J. Theoret. and Appl. Mech. – 2015. – 45, № 3. – P. 23–36.
15. Rice J. R. and Rosengren G. F. Plane strain deformation near a crack tip in power law hardening material // J. Mech. and Phys. Solids. – 1968. – 16. – P. 1–12.
16. Atlas of Stress Strain Curves. Second Edition. – Ohio: ASM Int., 2002. – Vol. IV. – 816 p.
17. Kojic M. and Bathe K.-J. Inelastic Analysis of Solids and Structures. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – Vol. XI. – 418 p.
18. Піскозуб Й. З., Сулим Г. Т. Асимптотика напружень в околі кінців тонкого міжфазного вкраплення // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1996. – 32, № 4. – С. 39–48.  
(Piskozub I. Z. and Sulym H. T. Asymptotics of stresses in the vicinity of a thin elastic inter-phase inclusion // Materials Science. – 1996. – 32, № 4. – P. 421–432.)

Одержано 16.08.2017