

УДК 539.3

## НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПЛОСКОГО КЛИНОПОДІБНОГО ЗРАЗКА З КРАЙОВОЮ ТРІЩИНОЮ ЗА ОДНОВІСНОГО РОЗТЯГУ

В. С. КРАВЕЦЬ

*Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів*

Запропоновано розрахункову модель плоских компактних клиноподібних зразків з ділянками стабільності коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) у вершині крайової тріщини з ростом її довжини, які використовують для визначення тріщиностійкості матеріалів з урахуванням впливу різних експлуатаційних чинників. На основі методу сингулярних інтегральних рівнянь отримано числові розв'язки модельних задач для клиноподібних зразків за їх одновісного позацентрового розтягу. Виявлено вплив способів їх навантаження та геометричних параметрів на зміну КІН залежно від довжини тріщини. Встановлено діапазони змін геометричних параметрів, що забезпечують наявність максимальних ділянок стабільності КІН за квазістатичного підростання тріщини.

**Ключові слова:** *плоский клиноподібний зразок з тріщиною на позацентровий розтяг, крайова тріщина, сингулярні інтегральні рівняння, коефіцієнти інтенсивності напружень.*

Для оцінювання міцності та довговічності елементів конструкцій у заданих експлуатаційних умовах важливі дані про їх тріщиностійкість, тобто опірність матеріалу поширенню в ньому тріщин. Для експериментального визначення цієї характеристики запропоновані різні зразки з тріщинами і схеми їх навантажень [1–5]. Важливі зразки, під час випроб яких вдається легко врахувати вплив різних експлуатаційних чинників, зокрема робочих середовищ, змін температур, ефекту самозакриття тріщин тощо, на зміну тріщиностійкості матеріалів. Слід виокремити працю [3], де закладено основи розробки зразків спеціальної форми (змінної висоти) з лінійною зміною їх податливості з ростом довжини тріщини, що забезпечує появу ділянок стабільності коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН). В інженерній практиці використовують спрощені варіанти зразків змінної висоти – клиноподібні типу TDCB (tapered double-cantilever beam) [6–9] з ділянками стабільності КІН зі зміною довжини тріщини. Вони потребують невеликих навантажень, щоб досягнути необхідні значення КІН, а також під час випробувань дають мінімальні похибки критичного значення КІН ( $K_{Ic}$ ), тобто не чутливі до неточно визначених довжин тріщин, зокрема, для самовідновлювальних полімерних композитів [8, 9]. Дослідження таких зразків є також надійним підходом, щоб визначити тріщиностійкість алюмінієвих сплавів з напиленими покриттями, знаходячи лише критичну швидкість вивільнення енергії без вимірювання довжини тріщини [10]. Однак для встановлення розмірів і конфігурацій таких зразків необхідні певні додаткові дослідження, оскільки невідомими є похибки стабільності КІН та інтервали довжин тріщин, де КІН є стабільними зі заданою точністю.

Нижче на основі методу сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) [11, 12] запропоновано розрахункову модель компактних клиноподібних зразків з крайовим надрізом-тріщиною. Визначено КІН у вершині тріщини залежно від геометричних параметрів зразка за його одновісного позацентрового розтягу, щоб виявити

максимальні ділянки стабільності КІН за квазістатичного підростання тріщини. Опрацьовану методику розрахунків напруженого стану плоских клиноподібних зразків можна використати для математичного моделювання форм експериментальних компактних зразків із малозмінними КІН з ростом довжини тріщини. Розробка таких зразків важлива для експериментальних досліджень впливу різноманітних експлуатаційних чинників (корозійні, воденьвмісні та інші середовища, різноманітні покриття матеріалів, ефект самозакриття тріщин у сучасних самовідновлюваних полімерах) на статичну та циклічну тріщиностійкість матеріалів.

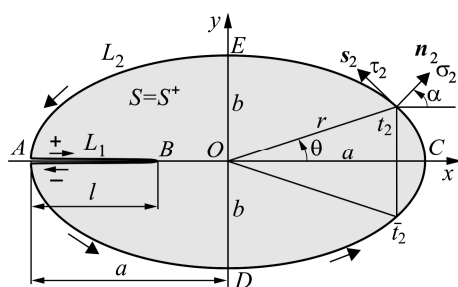


Рис. 1. Скінченна плоска область з крайовою тріщиною.

Fig. 1. Finite plane area with an edge crack.

**Плоска задача теорії пружності для скінченного тіла з крайовою тріщиною.** Розглянемо скінченне пружне тіло  $S$  з гладким межовим контуром  $L_2$  і крайовою прямолінійною тріщиною  $L_1$  у декартовій системі координат  $xOy$  (рис. 1).

На берегах тріщини задані самозрівноважені напруження

$$\sigma_1^\pm(t) + i\tau_1^\pm(t) = p_1(t), \quad t \in L_1, \quad (1)$$

а контур пружного тіла  $S$  завантажений напруженнями

$$\sigma_2(t) + i\tau_2(t) = p_2(t), \quad t \in L_2. \quad (2)$$

Тут  $\sigma_n(t)$ ,  $\tau_n(t)$ ;  $n=1;2$  – нормальна та дотична компоненти напружень на контурах  $L_n$ , верхній індекс “+” (“-”) вказує на граничне значення відповідної величини за прямування до контуру тріщини  $L_1$  зліва (справа) відносно вибраного напрямку його обходу.

За крайових умов (1), (2) задачу звели до розв’язування системи двох СІР [11]

$$\sum_{j=1}^2 \int_{L_j} \left\{ K(t,t') g'_{j}(t) dt + L(t,t') \overline{g'_{j}(t)} \overline{dt'} \right\} + \frac{a_0}{a} \frac{ds'}{dt'} - \frac{M_0}{2i(t')^2} \frac{d\bar{t}'}{dt'} = \pi p_n(t'), \quad t' \in L_n, \quad n=1;2 \quad (3)$$

відносно невідомих функцій

$$g'_{j}(t) = \frac{2G}{i(1+\kappa)} \frac{d}{dt} \left\{ [u(t) + iv(t)]^+ - [u(t) + iv(t)]^- \right\}, \quad t \in L_j; \quad j=1;2 \quad (4)$$

на контурах  $L_1, L_2$ . Тут ядра СІР (3)

$$K(t,t') = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t-t'} + \frac{d\bar{t}'}{dt' t-t'} \right); \quad L(t,t') = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t-t'} - \frac{d\bar{t}'}{dt' (t-t')^2} \right), \quad (5)$$

де  $u, v$  – декартові  $x, y$ -компоненти переміщень точки  $t \in L_j$ ;  $\kappa = 3 - 4\mu$  – для плоскої деформації та  $\kappa = (3 - \mu)/(1 + \mu)$  – для узагальненого плоского напруженого стану тіла  $S$ ;  $\mu$  – коефіцієнт Пуассона;  $G$  – модуль зсуву тіла. Зауважимо, що для прямолінійної тріщини  $L_1$  (рис. 1) маємо:  $t = \bar{t} = x \in [AB]$ ;  $d\bar{t}/dt = 1$ ;  $K(t,t') = 1/(t-t')$ ;  $L(t,t') = 0$ ;  $t, t' \in L_1$ . До лівих частин двох СІР (3) додано оператори  $a_0 = a_1 + a_2$  та  $M_0 = M_1 + M_2$  [11–13], де

$$a_n = \int_{L_n} g'_n(t) dt; \quad M_n = ia^2 \int_{L_n} \left\{ g'_n(t) \frac{dt}{t} - \overline{g'_n(t)} \frac{d\bar{t}}{t} \right\}, \quad n=1;2, \quad (6)$$

$a = |OC|$  – півдовжина тіла вздовж осі  $Ox$ . Оператори  $a_0, M_0$  нульові за умови рівності нулю головних вектора та моменту зовнішніх зусиль.

Для поліпшення числового розв'язування системи СІР (3) використали модифіковані СІР, запропоновані раніше для розгалужених тріщин [11]. Замість рівнянь (3) розглядали модифіковану систему двох СІР

$$\sum_{j=1}^2 \int_{L_j} \left\{ K^*(t, t') g'_j(t) dt + L^*(t, t') \overline{g'_j(t) dt} \right\} = \pi p_n(t'), \quad t' \in L_n, \quad n = 1; 2, \quad (7)$$

ядра якої мають вигляд

$$K^*(t, t') = K^0(t, t') - K^0(t_A, t'), \quad L^*(t, t') = L^0(t, t') - L^0(t_A, t'), \quad (8)$$

де  $A$  – спільна точка контурів  $L_1, L_2$  (рис. 1),

$$K^0(t, t') = K(t, t') + \frac{1}{a} \frac{ds'}{dt'} - \frac{a^2}{2(t')^2} \frac{dt'}{dt'} \frac{1}{t'}; \quad L^0(t, t') = L(t, t') + \frac{a^2}{2(t')^2} \frac{dt'}{dt'} \frac{1}{t'}.$$

Легко бачити, що ядра (8) рівні нулю у точці  $A$ . Ця умова необхідна, щоб розв'язки системи рівнянь (7) були обмежені у точці  $t = t_A$  [11, 12]. Зауважимо, що для симетричної відносно осі  $Ox$  задачі стійкість розв'язку СІР (7) забезпечена без операторів (6), а модифіковані ядра (8) обчислювали за спрощеними формулами:

$$K^*(t, t') = K(t, t') - K(t_A, t'), \quad L^*(t, t') = L(t, t') - L(t_A, t'), \quad (9)$$

де ядра  $K, L$  визначають виразами (5).

Система СІР (7) має єдиний розв'язок  $g'_1(t), t \in L_1$  та  $g'_2(t), t \in L_2$  у класах функцій: для  $g'_1(t)$  – обмежених у початку контуру  $L_1$  (точка  $A$ ), а в кінцевій точці  $B$  – з інтегровною особливістю; для функції  $g'_2(t)$  – у класі функцій, які обмежені як у початковій, так і в кінцевій точці  $A \in L_2$  [12].

Перейдемо до безрозмірних змінних у системі СІР (7), взявши величину  $a$  за основний параметр довжини в області  $S$  (рис. 1), а за параметр напружень – навантаження  $\sigma$  (розмірності напружень). Параметричні рівняння контурів  $L_1, L_2$  подамо у вигляді

$$t = t_1 = \omega_1(\xi) = l(\xi + 1)/2 - a, \quad t_1 \in L_1, \quad \xi \in [-1; +1]; \quad (10)$$

$$t = t_2 = \omega_2(\tau) \in L_2, \quad \tau \in [-\pi; +\pi] \quad (11)$$

і введемо безрозмірні невідомі функції

$$\varphi_1(\xi) = \frac{g'_1(t_1)}{\sigma a} \frac{dt_1}{d\xi} = w_1(\xi) / \sqrt{1 - \xi^2}, \quad \xi \in [-1; 1]; \quad (12)$$

$$\varphi_2(\tau) = \frac{g'_2(t_2)}{\sigma a} \frac{dt_2}{d\tau}, \quad \tau \in [-\pi; +\pi]. \quad (13)$$

Записавши систему СІР (7) у безрозмірному вигляді з використанням заміни (10)–(13), методом квадратур [11] зведемо її до системи  $N_1 + N_2 - 2$  комплексних лінійних алгебричних рівнянь відносно  $N_1 + N_2$  невідомих комплексних значень  $w_1(\xi_k), \varphi_2(\tau_k)$  (12), (13) у чебишовських вузлах

$$\xi_k = \cos\{\pi(2k - 1)/(2N_1)\}, \quad k = \overline{1, N_1}, \quad \eta_m = \cos\{\pi m / N_1\}, \quad m = \overline{1, N_1 - 1} \quad (14)$$

для контуру  $L_1$  та рівномірних вузлах

$$\tau_k = (2k - 1)\pi / N_2 - \pi; \quad \theta_m = 2\pi m / N_2 - \pi; \quad k, m = \overline{1, N_2} \quad (15)$$

для контуру  $L_2$  з вилученою із розгляду точкою  $A$  ( $t_A = \omega_2(+\pi) = \omega_2(\theta_{N_2})$ ). Для замкнутості системи алгебричних рівнянь додамо дві комплексні умови

$$w_1(-1) = 0; \quad \varphi_2(\pi) = 0 \quad (16)$$

обмеженості функцій  $g_1'(t_1), g_2'(t_2)$  (12), (13) у спільній точці  $A$  контурів  $L_1, L_2$ .

Через геометричну та силову симетрії задачі відносно осі  $Ox$  (рис. 1) одержуємо такі залежності для функції  $g_2'(t_2)$  (4) та її заміни (13) [11, 12]:  $g_2'(\overline{t_2}) = -\overline{g_2'(t_2)}$ ,  $t_2 \in L_2$ ;  $\varphi_2(-\tau) = \overline{\varphi_2(\tau)}$ ,  $\tau \in [-\pi; +\pi]$ . Для  $Ox$ -симетричної задачі та розглядуваної прямолінійної тріщини  $L_1$  невідома функція  $g_1'(t_1)$  (4) та її заміна (12) є дійсними функціями, тобто  $w_1(\xi_k) = \overline{w_1(\xi_k)}$ ,  $k = \overline{1, N_1}$ . Враховуючи ці залежності, зменшили розмірність комплексної системи лінійних алгебричних рівнянь з умовами (16) вдвічі та звели задачу до системи  $N_1 + N_2$  дійсних рівнянь відносно  $N_1$  дійсних  $w_1(\xi_k)$  та  $N_2/2$  комплексних  $\varphi_2(\tau_k)$ ,  $k = \overline{1, N_2/2}$  невідомих.

**Обчислення КІН у вершині крайової прямолінійної тріщини в плоскому еліптичному диску.** Розв'яжемо тестові задачі теорії пружності для плоскої деформації пружного тіла  $S$  з крайовою прямолінійною тріщиною  $L_1$  довжини  $l$  та  $Ox$ -симетричним еліптичним контуром  $L_2$  з півосями  $a$  і  $b$  (рис. 1). Згідно з поданням (11) для  $t_2 \in L_2$  маємо:  $t_2 = \omega_2(\tau) = a \cos(\tau) + ib \sin(\tau)$ ,  $\tau \in [-\pi; +\pi]$ . Враховуючи прийняті заміни (10), (12), КІН у вершині  $B$  ( $t_B = \omega_1(+1)$ ) тріщини  $L_1$  обчислимо за співвідношенням [11, 12]  $K_I^+ - iK_{II}^+ = -w_1(+1)\sigma a \sqrt{\pi} |\omega_1^+(+1)| / \omega_1^+(+1)$ . Для  $Ox$ -симетричної задачі з прямолінійною тріщиною  $L_1$  маємо:  $K_{II}^+ = 0$ ,  $\omega_1^+(+1) = l/2$ , тоді

$$K_I^+ \equiv K_I(B) = -w_1(+1) \frac{a}{l} \sigma \sqrt{2\pi l}, \quad w_1(+1) = -\frac{1}{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} (-1)^k w_1(\xi_k) / \tan\left(\frac{2k-1}{4N_1} \pi\right), \quad (17)$$

де  $w_1(\xi_k)$  – розв'язки побудованої системи лінійних алгебричних рівнянь. Відносні КІН обчислимо за формулами

$$\tilde{F}_1 = \frac{K_I^+}{\sigma \sqrt{\pi l}} = -w_1(+1) \frac{a}{l} \sqrt{2}, \quad F_1 = \frac{K_I^+}{\sigma \sqrt{a}} = -w_1(+1) \sqrt{2\pi a/l}. \quad (18)$$

Дослідимо збіжність з ростом кількості вузлів  $N_1, N_2$  на контурах  $L_1, L_2$  числових результатів для відносних КІН  $\tilde{F}_1$  (18). Розглянемо кругову та еліптичну форми диска  $L_2$  за двох способів навантаження – внутрішнього тиску на тріщині з вільним контуром  $L_2$ :  $p_1(t) = -\sigma, p_2(t) = 0$ , або нормального розтягу краю диска з вільною тріщиною:  $p_1(t) = 0, p_2(t) = \sigma$ . Для відповідних геометричних та силових параметрів задачі обчислені значення КІН ( $\tilde{F}_1$ ) добре узгоджувались з відомими [11, 14–18]. Під час розрахунків встановили, що найкращими співвідношеннями між кількостями вузлів та контурах  $L_1, L_2$  є  $N_2/N_1 = \{6; 8\}$ , а враховуючи симетрію задачі, не завжди вдається поліпшити збіжність результатів, однак, за однакових кількостей вузлів  $N_1, N_2$  на контурах  $L_1, L_2$  суттєво (у 8–10 разів) можна скоротити час розрахунків. Зауважимо, що для розглянутих вище навантажень плоских дисків кругової та еліптичної форм з крайовою прямолінійною тріщиною КІН (17) та  $F_1$  (18) завжди є зростаючими функціями зі збільшенням довжини тріщини.

**Вплив геометричних параметрів клиноподібного зразка на зміну КІН з ростом довжини тріщини.** Розглянемо позакентровий розтяг відомого, але ще недостатньо вивченого плоского компактного зразка *KII-B-PB* [2–4, 19] зі змінною висотою та сталою товщиною  $t$  і з крайовою прямолінійною тріщиною (рис. 2a). Змодельємо його форму у вигляді складених прямокутника  $EDD'E'$  та трапеції  $DHH'D'$  із закругленими кутовими точками вздовж дуг кіл радіуса  $\rho$  (рис. 2b).

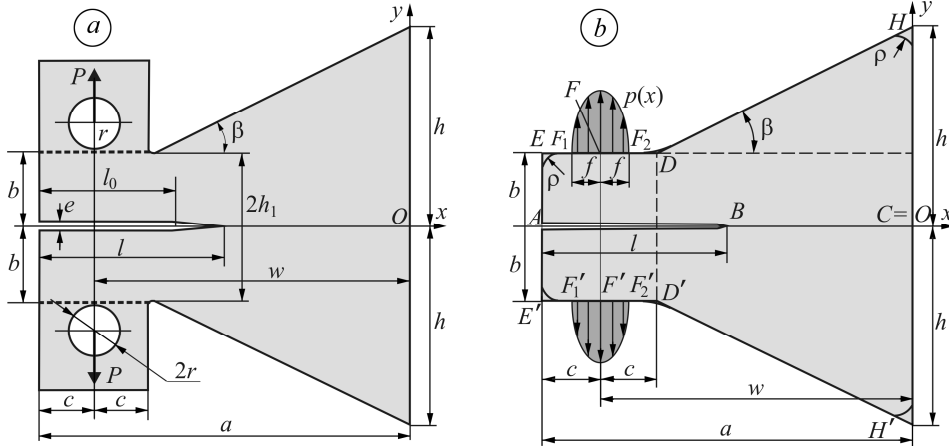


Рис. 2. Плоский зразок змінної висоти (a) та його розрахункова клиноподібна модель (b).

Fig. 2. Plane specimen with variable height (a) and its computational wedge-shaped model (b).

Параметричне рівняння (11) верхньої частини ( $CHDEA$ ) контуру  $L_2$  для моделі зразка (рис. 2b) запишемо через довжину дуги  $s$  його контуру (починаючи з точки  $C = O$ ) у вигляді

$$t_2 = \omega_2(\tau) = \omega_{2s}(s), \quad \tau \in [0; +\pi], \quad s = s_0\tau/\pi \in [0; s_0],$$

де  $s_0 = s_A$  – загальна довжини дуги контуру  $CHDEA$  із закругленими вершинами  $H, D, E$ ;

$$\omega_{2s}(s) = \begin{cases} is, & s \in [0; s_{H1}), \\ O_H + \rho \exp(i(s - s_{H1})/\rho), & s \in [s_{H1}; s_{H2}), \\ H_2 - (s - s_{H2}) \exp(-i\beta), & s \in [s_{H2}; s_{D1}), \\ O_D + \rho \exp(-i[(s - s_{D1})/\rho + \pi/2 - \beta]), & s \in [s_{D1}; s_{D2}), \\ D_2 - (s - s_{D2}), & s \in [s_{D2}; s_{E1}), \\ O_E + \rho \exp(i[(s - s_{E1})/\rho + \pi/2]), & s \in [s_{E1}; s_{E2}), \\ E_2 - i(s - s_{E2}), & s \in [s_{E2}; s_0), \end{cases} \quad (19)$$

$$s_C = 0, \quad s_{H1} = h - d_1, \quad s_{H2} = s_{H1} + \rho(\pi/2 + \beta), \quad s_{D1} = s_{H2} + (a - c)/\cos(\beta) - d_1 - d_2,$$

$$s_{D2} = s_{D1} + \rho\beta, \quad s_{E1} = s_{D2} + c - \rho - d_2, \quad s_{E2} = s_{E1} + \pi\rho/2, \quad s_0 = s_A = s_{E2} + b - \rho,$$

$$O_H = (-\rho; h - d_1), \quad O_D = (c - a - d_1; b + \rho), \quad O_E = (\rho - a; b - \rho),$$

$$H_2 = O_H + \rho \exp(\pi/2 + \beta), \quad D_2 = O_D - i\rho, \quad E_2 = O_E - \rho,$$

$$d_1 = \rho / \tan(\pi/4 - \beta/2), \quad d_2 = \rho \tan(\beta), \quad h = b + (a - c) \tan(\beta).$$

Знайдемо геометричні параметри таких зразків за умови досягнення максимальних ділянок стабільності значень КІН з ростом довжини тріщини. Для цього визначимо КІН у вершині крайової тріщини  $AB$  різної довжини  $l \in [0, 2a; 0, 7a]$ ;

$a = w + c$  – для низки геометричних параметрів ( $a, b, c, f, h, \beta, \rho$ ) математичної моделі (19)  $Ox$ -симетричного клиноподібного зразка (рис. 2b).

Дію вертикальних розтягальних сил  $P$  у зразку товщини  $t$  моделюємо розподіленими за певним законом уздовж горизонтальних ділянок  $F_1F_2$  та  $F_1'F_2'$  моделі зразка (рис. 2b) напруженнями  $p(x)$  ( $x = \text{Re}(t_2)$ ,  $t_2 \in [F_1F_2] \in (ED)$ ), головний вектор яких рівний силі  $P$ . За позacentрового розтягу зразка (рис. 2a) розглянемо його чотири моделі – схеми навантаження напруженнями  $p(x)$ , розподіленими по прямокутнику (рис. 3a), де  $p_1 = P/(2ft)$ ; по двох прямокутниках (рис. 3b), де  $p_2 = P/(2t(c-r-\rho))$ ; по параболі (рис. 3c), де  $p_3 = 3P/(4ft)$ , та по поліному четвертого степеня (рис. 3d).

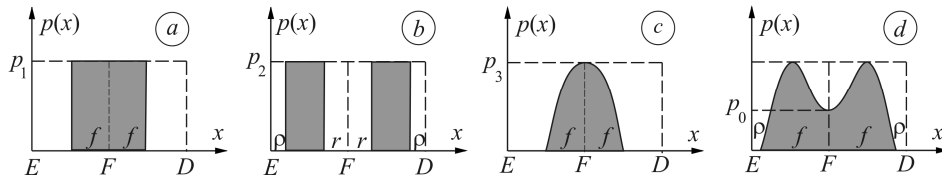


Рис. 3. Схеми навантаження моделі зразка на ділянці  $ED$ .

Fig. 3. Load scheme of specimen model on area  $ED$ .

Геометричні параметри зразка (рис. 2a) повинні задовольняти основні рекомендовані вимоги [2, 4, 19]:

$$w \in [4t; 15t]; w \geq 50 \text{ mm}; t \geq 4 \text{ mm}; h_1 = 0,48h;$$

$$a = 1,18w; c = 0,18w; 2h = 0,91w; 2r = 0,18w; e \leq 0,01w, l \geq l_0 = 0,32w. \quad (20)$$

Моделюючи робочу ділянку зразка трапецією  $DHH'D'$  (рис. 2b), зі співвідношень (20) для значення  $w = 10t$  отримуємо кут  $\beta \approx 16^\circ$  ( $\tan(\beta) = (h - h_1)/(w - c) = 0,52h/0,82w = 0,2885$ ). Знайдено залежності КІН  $F_1 = K_1/(\sigma\sqrt{a}) = K_1\sqrt{a}/(P/t)$  (18) ( $\sigma = P/ta = \text{const}$ ) від відносної довжини тріщини  $l/a$  (рис. 4a) для чотирьох схем навантаження (рис. 3) та значень параметрів  $w = 10t$ ;  $a = 11,8t$ ;  $b = 2,4t = h_1$ ;  $c = 1,8t$ ;  $f = 0,9t$ ;  $\rho = 0,1t$ ;  $l/t \in [2,0; 8,4]$ ;  $p_0 = 0,2\sigma$ ;  $N_1 = 64$ ;  $N_2 = 520$ . Зміна функцій навантаження несуттєво впливає на КІН для всього діапазону довжини тріщини  $l/a \in [0,17; 0,71]$ , а відносні відхилення КІН  $F_1$  (18) для  $l/a > 0,2$  за вказаних схем навантаження не перевищують 3%. Для цих параметрів задачі КІН  $F_1$  завжди зростає зі збільшенням довжини тріщини, а на ділянці  $l/a \in [0,27; 0,48]$  його відносні відхилення від середньгеометричного їх значення  $F_{10}$

$$\delta(l) = 100\%(F_1(l) - F_{10})/F_{10}; \quad F_{10} = (F_1^{\max} + F_1^{\min})/2 \quad (21)$$

досягають 16%. Тому рекомендовані діапазони змін геометричних параметрів (20) слід уточнити, оскільки навіть для середнього (із рекомендованих) значення  $w = 10t$  (що відповідає куту  $\beta = 16^\circ$ ) ділянки стабільності КІН  $F_1$  відсутні.

Для вище вказаних параметрів задачі за схеми навантаження, що на рис. 3c, розглядали моделі зразків з різними кутами  $\beta$  (рис. 4b). Ділянки відносної стабільності КІН появляються для кутів  $\beta > 30^\circ$ , а найбільші тут отримуємо для  $\beta \in (40^\circ; 45^\circ)$ .

З ростом довжини  $2c = |ED|$  прямокутної ділянки навантаження зразка (див. рис. 2b) дещо зменшується та зміщується вправо ділянка стабільності КІН  $F_1$  (рис. 5a). Надмірне зменшення ділянки навантаження ( $2c \leq 0,1a$ ) призводить до відносної стабільності КІН лише для малих довжин тріщини ( $l < 0,4a$ ). Для параметра  $c = 0,2a$  ділянкою відносної стабільності КІН зі значно більшим його се-

реднім значенням є відрізок  $[0,35a; 0,55a]$ . Для параметрів  $b = 0,2a$ ;  $f = c/2$ ;  $\rho = 0,01a$ ;  $\beta = 40^\circ$  за схеми навантаження, що на рис. 3с, оптимальними є значення  $c \in [0,1a; 0,2a]$ . За сталої ділянки  $ED$  вплив довжини навантаженого відрізка  $2f = |F_1F_2|$  на зміну КІН несуттєвий (рис. 5b) і його вибираємо у межах  $2f \in [c/2; c]$ .

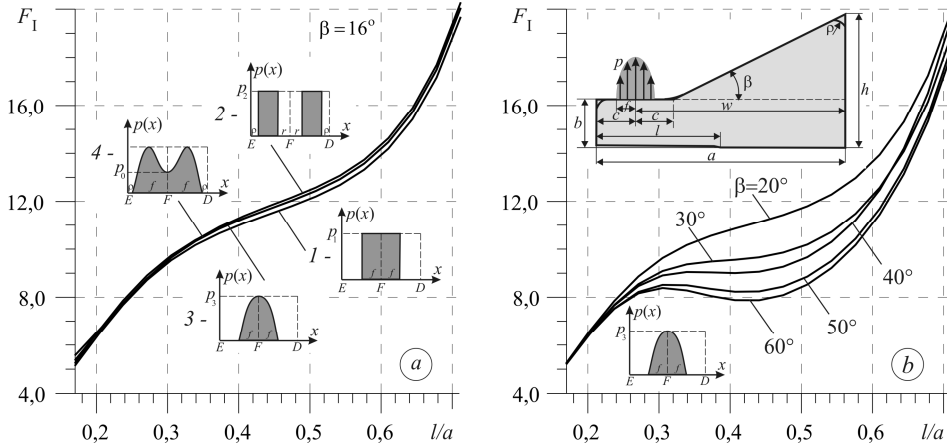


Рис. 4. Залежності КІН від довжини тріщини для  $\beta = 16^\circ$  та чотирьох схем навантаження (a) і вплив кута  $\beta$  на ділянки стабільності КІН (b).

Fig. 4. Dependence of SIF on the crack length for  $\beta = 16^\circ$  and four loading schemes (a) and effect of angle  $\beta$  on the areas of SIF stability (b).

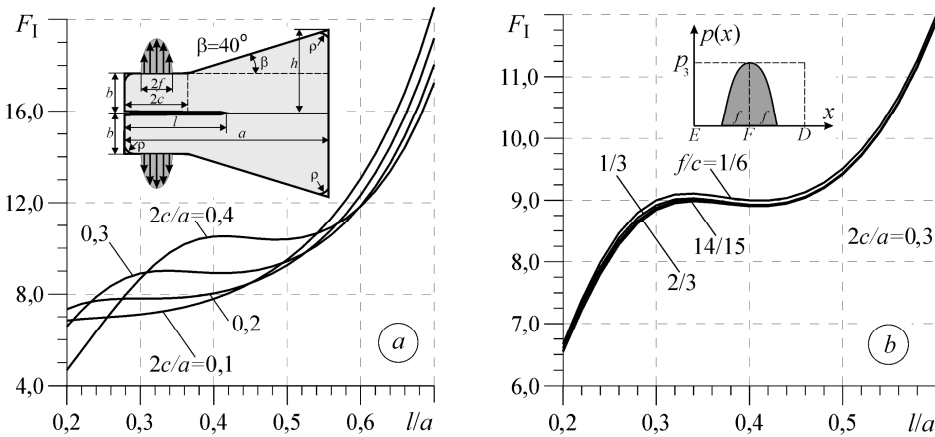


Рис. 5. Вплив на зміну КІН з ростом довжини тріщини параметра  $2c$  (a) та ширини зони навантаження  $2f$  (b) для кута  $\beta = 40^\circ$ .

Fig. 5. Influence on the SIF change with the increase of crack length parameter  $2c$  (a) and the width of the loading zone  $2f$  (b) for the angle  $\beta = 40^\circ$ .

Окрім кута  $\beta$ , на КІН з ростом довжини тріщини суттєво впливає параметр  $b = |AE| = |DD'|/2$  (див. рис. 2b). З його зміною у невеликих межах  $b/a \in [0,1; 0,2]$  відчутно міняється поведінка КІН з ростом довжин тріщини для різних кутів  $\beta \in [10^\circ; 60^\circ]$  (рис. 6). Залежності на рис. 6a, b розраховували для параметрів  $2c/a = 0,3$ ;  $\rho/a = 0,01$ ;  $2f/a = 0,16$  за схемою навантаження, що на рис. 3с. Для відносно великих значень параметра  $b$  ( $b/a > 0,25$ ) ділянки стабільності КІН не з'являються за довільних кутів  $\beta \in [0^\circ; 60^\circ]$ . Для бажаного зменшення кута  $\beta$  та збільшення ділянок стабільності КІН необхідно (якщо можливо) знижується параметр  $b$ . Для  $b/a = 0,2$  ділянки стабільності КІН виникають, якщо  $\beta > 30^\circ$  (рис. 6a), а для  $b/a =$

= 0,1 (рис. 6b) велика ділянка (довжиною  $\Delta l = l_2 - l_1 = 0,4a$ ,  $l_1 = 0,28a$ ,  $l_2 = 0,68a$ ) його стабільності (з відносним відхиленням  $\delta = \max \delta(l) < 7,8\%$ ) утворюється вже для кута  $\beta = 15^\circ$ . Для параметра  $b/a = 0,15$  (рис. 6c) знайдено залежності КІН від довжини тріщини для вузького діапазону кутів  $\beta$  за двох функцій навантаження – параболічної (рис. 3c з параметром  $f = 0,08a$  – суцільні лінії) та поліномної (рис. 3d з параметрами  $f = c - \rho = 0,14a$ ,  $p_0 = 0$  – штрихові). Спосіб задання навантаження дещо змінює КІН, коли вершина тріщини знаходиться безпосередньо під зоною навантаження ( $l/a < 0,35$ ), а для довжин тріщини  $l/a \in [0,35; 0,7]$  цей вплив несуттєвий (лінії для різних функцій навантаження збігаються). Для параметра  $b = 0,15a$  (рис. 6c) оптимальний кут  $\beta \approx 25^\circ$ , що узгоджується з відомими геометричними даними зразка  $b/a = 0,154$ ;  $\beta \approx 24,2^\circ$  [10].

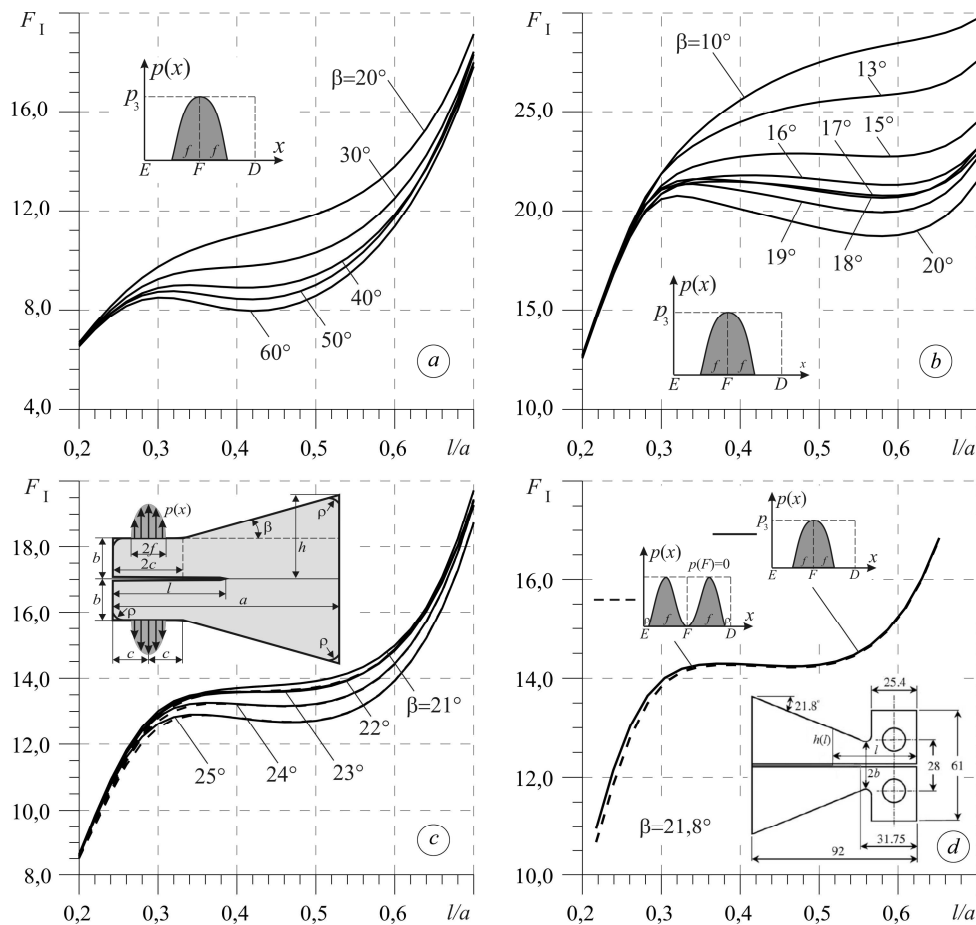


Рис. 6. Залежності КІН від довжини тріщини для різних кутів  $\beta$  та параметра  $b/a = 0,2$  (a),  $0,1$  (b),  $0,15$  (c),  $0,138$  (d) за схем навантажень, що на рис. 3c (суцільні лінії) та рис. 3d (штрихові).

Fig.6. Dependence of SIF on the crack length for different angles  $\beta$  and on the parameter  $b/a = 0,2$  (a),  $0,1$  (b),  $0,15$  (c),  $0,138$  (d) for load schemes from Fig. 3c (solid lines) and Fig. 3d (dashed).

Для моделювання зразка за схемою рис. 6c для двох схем навантаження (див. рис. 3c, d) отримали значення КІН  $F_I = K_I \sqrt{a} / (P/t)$  для  $b/a = 0,138$  (рис. 6d), які узгоджуються з експериментальними  $W_I = K_I \sqrt{a - c} / (P/t) = F_I \sqrt{(a - c)/a}$  [9] для відповідних геометричних параметрів зразка ( $t = 6,25$  mm;  $a = 92$  mm;



$2f/a = c/a = 0,141$ ;  $\beta = 21,8^\circ$ ). Тут відхилення КІН (21) на ділянці стабільності  $l/a \in [0,33; 0,52]$  не перевищують 0,7% і для зразка без урахування напрямних па-зів ([9],  $t = \text{const}$ ) відповідний КІН відрізняється від відомого значення  $W_1 \approx 14$  на 5,5%. Коли наближено врахувати пази в експериментальному зразку (через ефек-тивну товщину зразка  $t_e = 3,95 \text{ mm}$ ), отримаємо значення  $K_1\sqrt{a-c}/(P/t_e) = 20,9$ , яке лише на 0,8% відрізняється від середнього експериментального для КІН з діа-пазону  $W_{1e} \in [19,7; 21,8]$  [9].

Для схеми навантаження, що на рис. 3с, визначили відносні довжини  $\Delta l/a$  ді-лянок стабільності КІН  $F_1$  (18) та максимальні їх відносні відхилення  $\delta$  від серед-ніх значень  $F_{10}$  (21) на ділянках  $[l_1; l_2]$  для низки значень параметра  $b/a$  та кута  $\beta$  (див. таблицю). Розраховували для  $c/a = 0,15$ ;  $f/a = 0,08$ ;  $\rho/a = 0,01$ . Зокрема, щоб отримати ділянку стабільності КІН завдовжки  $0,24a$  (з відносним відхиленням  $\delta < 4,8\%$ ) для параметра  $b = 0,2a$ , необхідний кут  $\beta \geq 45^\circ$ . Водночас для такої ж ділянки і зі значно меншими відхиленнями КІН ( $\delta < 1,3\%$ ) для параметра  $b = 0,15a$  необхідний значно менший кут –  $\beta = 25^\circ$ . Для такої ж довжини  $\Delta l = 0,24a$  ділянки  $[0,40a; 0,64a]$ , якщо  $b/a = 0,1$ ;  $\beta = 45^\circ$ , КІН  $F_1$  стабілізується з відносною похиб-кою  $\delta < 0,6\%$ . Якщо  $b = 0,1a$ ,  $\beta = 16^\circ$ , можна отримати ділянку стабільності КІН завдовжки  $\Delta l = 0,36a$  з відхиленнями  $\delta < 2,4\%$ , та ділянку  $\Delta l = 0,32a$  з  $\delta < 1,3\%$ . За більших допустимих відхилень ( $\delta < 5\%$ ), сталого параметра  $b/a$  та деякого збіль-шення кута  $\beta$  ділянки стабільності КІН зростають (див. таблицю і рис. 6).

**Відносні величини ділянок стабільності КІН**

$b/a$	$\beta$	$\Delta l/a$	$l_1/a$	$l_2/a$	$F_{10}$	$\delta, \%$
0,20	30°/40°	0,20	0,28	0,48	9,5 / 8,9	6,2 / 2,9
		0,24	0,26	0,50	9,4 / 8,9	9,5 / 6,0
	45°/60°	0,20	0,28	0,48	8,8 / 8,2	1,7 / 3,3
		0,24	0,26	0,50	8,8 / 8,3	4,8 / 3,7
0,15	23°/25°	0,24	0,30	0,54	13,5 / 12,8	3,4 / 1,3
		0,30	0,28	0,58	13,5 / 12,9	7,2 / 5,0
	27°/30°	0,28	0,28	0,56	12,7 / 12,2	3,0 / 3,3
		0,32	0,26	0,58	12,6 / 12,2	6,9 / 4,9
0,10	15°/16°	0,32	0,34	0,66	22,7 / 21,6	2,3 / 1,3
		0,36	0,32	0,68	22,8 / 21,8	4,1 / 2,4
		0,40	0,28	0,68	22,0 / 21,2	7,8 / 5,7
	17°/18°	0,32	0,34	0,66	21,1 / 21,1	1,7 / 2,2
		0,36	0,32	0,68	21,4 / 21,4	2,9 / 3,5
		0,40	0,28	0,68	21,0 / 21,2	4,8 / 4,4

Для відповідних геометричних та силових параметрів задачі обчислені значення КІН добре узгоджувались з відомими для квадратних і прямокутних [14, 17, 20–23], а також трапецеподібних [6, 14, 24] плоских зразків з крайовою прямолінійною тріщиною.

#### **ВИСНОВКИ**

Розраховано напружений стан компактних клиноподібних зразків змінної висоти з крайовою прямолінійною тріщиною за одновісного позацентрового роз-тягу. Визначено вплив геометричних та силових параметрів зразків на зміну КІН

з ростом довжини тріщини. Подано рекомендації до вибору геометричних параметрів зразків для досягнення максимальних відносних ділянок стабільності КІН за квазістатичного її поширення. Найвідчутніше змінюють КІН геометричні параметри зразка – менша піввисота робочої трапецеподібної ділянки (відносний параметр  $b/a$ ) та кут зростання піввисоти зразка (кут  $\beta$ ). Ділянку навантаження зразка (параметр  $2c$ ) слід мінімізувати, а її розміри вибирати з практичних рекомендацій для експериментів ( $2c/a = [0,2; 0,4]$ ). Для бажаного зменшення кута  $\beta$  за збереження ділянки стабільності КІН необхідно знизити параметр  $b/a$  до мінімально допустимих (з умов експерименту) значень.

Зроблену методику розрахунків напруженого стану клиноподібних зразків можна використати для моделювання форм плоских компактних зразків з крайовою прямолінійною тріщиною різної довжини з ділянкою малозмінних КІН. Такі зразки не потребують великих навантажень, щоб досягнути заданих значень КІН, і мають виражені ділянки стабільності КІН, тому придатні для експериментальних досліджень впливу різноманітних експлуатаційних чинників (корозійні, воденьвмісні середовища тощо) на статичну та циклічну тріщиностійкість матеріалів. Такі зразки потребують експериментальної верифікації для перевірки адекватності запропонованої моделі реальним зразкам. Це можна зробити, визначивши експериментально критичні навантаження для пропонованих зразків з тріщинами різної довжини. Отримані результати повинні мало відрізнятися для різних довжин тріщин у межах обчислених ділянок стабільності КІН. Аналогічно можна перевірити достовірність пропонованих раніше (для даного типу зразків) формул для визначення КІН з урахуванням інших чинників, зокрема напрямних горизонтальних пазів, щоб забезпечити прямолінійність поширення тріщини.

*РЕЗЮМЕ.* Предложена расчетная модель плоских компактных клиновидных образцов с участками стабильности коэффициента интенсивности напряжений (КИН) в вершине краевой трещины, которые используют для определения трещиностойкости материалов с учетом влияния различных эксплуатационных факторов. На основе метода сингулярных интегральных уравнений получены численные решения модельных задач для клиновидных образцов при их одноосном внецентровом растяжении. Определено влияние способов нагрузки и геометрических параметров модели образца на изменение КИН с ростом длины трещины. Установлены диапазоны изменений геометрических параметров, обеспечивающих наличие максимальных участков стабильности КИН для квазистатического подрастания трещины.

*SUMMARY.* A computational model of plane compact wedge-shaped specimens with the available areas of stress intensity factor (SIF) stability at the tip of the edge crack is proposed. Such specimens are used to determine the crack resistance of materials taking into account the influence of various types of operational factors. On the basis of the method of singular integral equations a numerical solutions of model problems for wedge-shaped specimens are obtained for their uniaxial eccentric (off-center) tension. The influence of loading methods and geometric parameters of the specimen model on the change of SIF with the edge crack growth is determined. The ranges of geometric parameters ensuring the presence of maximum areas of SIF stability for quasistatic crack growth are determined.

*Автор висловлює подяку академікові НАН України В. В. Панасюку за формулювання задачі та підтримку у її виконанні.*

1. *Методы и средства оценки трещиностойкости конструкционных материалов // Сб. науч. тр. под ред. В. В. Панасюка. – К.: Наук. думка, 1981. – 314 с.*
2. *Проблемы прочности, долговечности и надежности продукции машиностроения. Методические указания (Разработчик – Физ.-мех. ин-т им. Г. В. Карпенко НАН Украины / В. В. Панасюк, С. Я. Ярема). – М.: Межотрасл. науч.-техн. комплекс “Надежность машин”, 1993. – 54 с.*
3. *Mostovoy S., Crosley P. B., and Ripling E. J. Use of crack-line loaded specimens for measuring plane-strain fracture toughness // J. of Mat. – 1967. – 2, № 3. – P. 661–681.*

4. *Механика* разрушения и прочность материалов: Справ. пос. в 4-х т. / Под общ. ред. В. В. Панасюка. Т. 4: Усталость и циклическая трещиностойкость конструкционных материалов / О. Н. Романив, С. Я. Ярема, Г. Н. Никифорчин, Н. А. Махутов, М. М. Стадник. – К.: Наук. думка, 1990. – 680 с.
5. *Міцність і довговічність авіаційних матеріалів та елементів конструкцій* / О. П. Остап, В. М. Федірко, В. М. Учанін, С. А. Бичков, О. Г. Моляр, О. І. Семенець, В. С. Кравець, В. Я. Дереча // *Механіка руйнування та міцність матеріалів: Довідн. пос. / За заг. ред. В. В. Панасюка.* – Львів: Сполом, 2007. – Т. 9. – 1068 с.
6. *Rawley J. E. and Gross B.* Stress intensity factors for crackline-loaded edge-crack specimens // *Mater. Res. and Stand.* – 1967. – 7, № 4. – P. 155–162.
7. *Beres W., Koul A. K., and Thambraj R.* A tapered double-cantilever-beam specimen designed for constant-K testing at elevated temperatures // *J. Test. Evaluation.* – 1997. – 25. – P. 536–542.
8. *Brown E. N., Sottos N. R., and White S. R.* Fracture testing of a self-healing polymer composite // *Expl. Mech.* – 2002. – 42. – P. 372–379.
9. *Brown E. N.* Use of the tapered double-cantilever beam geometry for fracture toughness measurements and its application to the quantification of self-healing // *The J. of Strain Analysis for Engin. Design.* – 2011. – 46. – P. 167–186.
10. *Chang-Jiu Li, Wei-Ze Wang, and Yong He.* Measurement of fracture toughness of plasma-sprayed Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> coatings using a tapered double cantilever beam method // *J. Am. Ceram. Soc.* – 2003. – 86, № 8. – P. 1437–1439.
11. *Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В.* Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – К.: Наук. думка, 1989. – 248 с.
12. *Саврук М. П., Казберук А.* Концентрація напружень у твердих тілах з вирізами // *Механіка руйнування та міцність матеріалів: Довідн. пос. / За заг. ред. В. В. Панасюка.* – Львів: Сполом, 2012. – Т. 14. – 384 с.
13. *Саврук М. П., Кравець В. С.* Застосування методу сингулярних інтегральних рівнянь для визначення контурів рівномірних отворів у пластинах // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2002. – 38, № 1. – С. 31–40.  
(*Savruk M. P. and Kravets' V. S.* Application of the method of singular integral equations to the determination of the contours of equistrong holes in plates // *Materials Science.* – 2002. – 38, № 1. – P. 34–46.)
14. *Саврук М. П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами // *Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пос. / Под общ. ред. В. В. Панасюка* – К.: Наук. думка, 1988. – Т. 2. – 620 с.
15. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
16. *Образец* для исследования закономерностей зарождения трещин / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. И. Зборомирский, О. П. Остап, Е. М. Костык // *Физ.-хим. механика материалов.* – 1984. – № 4. – С. 66–77.
17. *Справочник* по коэффициентам интенсивности напряжений: в 2-х т. / Под ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – Т. 1. – 448 с.
18. *Gregory R. D.* A circular disc containing a radial edge crack opened by a constant internal oressure // *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* – 1977. – 81, № 3. – P. 497–521.
19. *Yarema S. Ya.* Test Method for Determination of Crack Growth Rate and Crack Extension Resistance under Cyclic Loading. – Lviv: Karpenko Physico-Mechanical Institute, 1994. – 80 p.
20. *Bowie O. L.* Solutions of plane crack problems by mapping technique // *Methods of analysis and solutions of crack problems.* – Leyden: Noordhoff Intern. Publ., 1973. – P. 1–55.
21. *Браун У., Сроули Дж.* Испытания высокопрочных металлических материалов на вязкость разрушения при плоской деформации. – М.: Мир, 1972. – 246 с.
22. *Isida M., Imai R., Tsuru N.* Задачи о произвольном симметричном нагружении пластин с краевой трещиной // *Нихон кикай гаккай ромбунсю.* – 1979. – А45, № 395, – С. 743–749.
23. *Rawley J. E. and Gross B.* Stress intensity factors for bend and compact specimens // *Eng. Fract. Mech.* – 1972. – 4, № 3. – P. 587–589.
24. *Liu X. H. and Erdogan F.* An elastic strip with multiple cracks and applications to tapered specimens // *Int. J. Fract.* – 1985. – 29, № 2. – P. 59–72.