УДК 539.3

РОЗРАХУНОК ОСЕСИМЕТРИЧНОГО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ДВОШАРОВОГО ЦИЛІНДРА ПІД ДІЄЮ ЛОКАЛЬНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

В. П. РЕВЕНКО

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Запропоновано аналітично-числовий метод розв'язання осесиметричних крайових задач теорії пружності для двошарових циліндричних тіл за допомогою однорідних розв'язків. Компоненти вектора переміщень і тензора напружень подано у вигляді рядів, коефіцієнти яких визначають побудовані власні функції. Розроблено комп'ютерну методику розв'язання крайових задач для двошарового циліндра. Знайдені критерії, за виконання яких побудований розв'язок збігається з точним. Описані якісні та кількісні закономірності поведінки компонент напружено-деформованого стану двошарового циліндра під час дії локальних навантажень із чітко вираженим максимумом.

Ключові слова: *власні функції, двошаровий циліндр, осесиметричний напружений стан, тензор напружень.*

Багатошарові пружні циліндри, зокрема двошарові, – поширені елементи будівельних та інженерних конструкцій. Вивчено [1, 2] деякі навантаження багатошарових ортотропних та ізотропних циліндрів, коли їх напружений стан не залежить від осьової змінної, а в праці [3] – коли залежить. Отримано [2] деякі розв'язки для багатошарового циліндра за виконання умов ідеального контакту шарів. Розроблено [4] метод розрахунку тривимірного напруженого стану двошарових пружних циліндричних тіл. Огляд праць про розв'язування задач для багатошарових циліндрів, напружено-деформований стан яких залежить тільки від однієї просторової змінної, наведено у публікаціях [1–3], а з урахуванням динамічних ефектів – у працях [5, 6].

Формулювання задачі і подання розв'язку. Розрахуємо [4] осесиметричний напружений стан двошарового циліндра, який має шари $D_j = \{(r,\varphi,z) \in ([R_{j-1}, R_j] \times [0, 2\pi] \times [-h, h])\}$ з різними модулями Юнга і коефіцієнтами Пуассона E_j, ν_j, $j = \overline{1,2}$, де $R_0 = 0$. До його бічної поверхні прикладені навантаження

$$\sigma_r^2(R_2, z) = \sigma_1(z), \quad \tau_{rz}^2(R_2, z) = \tau_1(z), \tag{1}$$

де $\sigma_1(-z) = \sigma_1(z)$, $\tau_1(-z) = -\tau_1(z)$ – відомі функції. Торці шарів циліндра ненавантажені:

$$\sigma_z^j(r, \pm h) = 0, \quad \tau_{rz}^j(r, \pm h) = 0, \quad j = \overline{1,2}. \tag{2}$$

На циліндричній поверхні з'єднання шарів виконуються умови ідеального контакту:

$$\sigma_r^2 = \sigma_r^1, \ \tau_{rz}^2 = \tau_{rz}^1, \ r = R_1, \tag{3}$$

Контактна особа: В. П. РЕВЕНКО, e-mail: victorrev@ukr.net

$$u_r^2 = u_r^1, \quad u_z^2 = u_z^1, \quad r = R_1. \tag{4}$$

Для визначення пружних переміщень u_r^j, u_z^j в j-му шарі у циліндричній системі координат використаємо загальний розв'язок рівнянь Ляме [4, 7], який тут має вигляд

$$u_r^j = \frac{\partial P_j}{\partial r}, \quad u_z^j = \frac{\partial P_j}{\partial z} - 4(1-\nu_j)\Phi_j, \tag{5}$$

де $P_j = z\Phi_j + \Psi_j$, а $\Phi_j(r,z)$, $\Psi_j(r,z)$ – незалежні гармонічні функції, які названо функціями переміщень шарів циліндра.

За поданням переміщень (5) і законом Гука [8] знайдемо нормальні та дотичні напруження:

$$\sigma_r^j = 2G_j\left[\frac{\partial^2 P_j}{\partial r^2} - 2\nu_j\frac{\partial \Phi_j}{\partial z}\right], \quad \sigma_z^j = 2G_j\left[\frac{\partial^2 P_j}{\partial z^2} - 2(2-\nu_j)\frac{\partial \Phi_j}{\partial z}\right],$$

$$\sigma_\varphi^j = 2G_j\left[\frac{1}{r}\frac{\partial P_j}{\partial r} - 2\nu_j\frac{\partial \Phi_j}{\partial z}\right], \quad \tau_{rz}^j = 2G_j\left[\frac{\partial^2 P_j}{\partial z \partial r} - 2(1-\nu_j)\frac{\partial \Phi_j}{\partial r}\right], \tag{6}$$

де G_j – модулі зсуву.

Розроблений раніше [4] аналітично-числовий алгоритм побудови власних функцій (однорідних розв'язків) для шарів товстостінного циліндра, напруження від яких задовольняють крайові умови (2) на торцях, використаємо для побудови функції переміщень у шарах, які визначають ненульові μ_k і нульові власні значення:

$$\Psi^j = h^2\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Re}\{\delta(\mu_k,\nu_j)\{a_k^j I_0(\beta_k r) + d_k^j K_0(\beta_k r)\}\cos(\mu_k\gamma)\} + \sum_{m=0}^{1}\Psi_j^m,$$

$$\Phi^j = h\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Re}\{\{a_k^j I_0(\beta_k r) + d_k^j K_0(\beta_k r)\}\sin(\mu_k\gamma)\} - \frac{\sigma_0^j}{E_j}z, \quad j = \overline{1,2}, \tag{7}$$

де $d_k^1 = 0$; $\Psi_j^0(r,z) = \dfrac{1-\nu_j}{2E_j}\sigma_0^j(r^2 - 2z^2)$; $\Psi_2^1(r,z) = -\dfrac{1}{2G_2}\sigma_1^2 R_1^2\ln(r)$; $\Psi_1^1 = 0$; a_k^j, d_k^j – комплексні, а σ_m^j – дійсні коефіцієнти; $I_n(r)$, $K_n(r)$ – відповідно функції Бесселя і Макдональда [9]; $\beta_k = \mu_k / h$; μ_k, $\mathrm{Re}(\mu_k) > 0$ – комплексні корені рівняння $\sin(2\mu) + 2\mu = 0$; $\delta(\mu,\nu_j) = -2(1-\nu_j)/\mu - \mathrm{tg}(\mu)$, $j = \overline{1,2}$.

Розраховуючи напружено-деформований стан двошарового циліндра, обмежимося у співвідношеннях (7) першими N членами ряду за індексом k і всіма функціями, які відповідають нульовому власному значенню, та позначимо скінченні суми рядів $\Phi_{j,N}$, $\Psi_{j,N}$. Підставимо функції $\Phi_{j,N}$, $\Psi_{j,N}$ у співвідношення (5), (6) і виразимо переміщення та напруження у вигляді скінченних рядів, після внесення яких в умови (1), (3), (4) одержимо систему зі шести рівнянь, коефіцієнти якої залежать тільки від змінної γ:

$$\sum_{k=1}^{M} c_k A_k^m(\gamma) = P_m(\gamma), \quad m = \overline{1,6}, \quad \gamma \in [-1,1], \tag{8}$$

де

$$M=6N+3,\quad c_{k+(2j-2)N}=\operatorname{Re}a_k^j,\quad c_{k+(2j-1)N}=\operatorname{Im}a_k^j,\quad j=\overline{1,3},\quad k=\overline{1,N};$$

$$c_{6N+1}=\sigma_0^1,\quad c_{6N+2+m}=\sigma_m^2,\ m=\overline{0,1};$$

$$A_{k+2jN}^m=\operatorname{Re}V_{j,k}^m(\gamma),\quad A_{k+N+2jN}^m=-\operatorname{Im}V_{j,k}^m(\gamma),\quad j=\overline{0,2},\quad k=\overline{1,N},\quad m=\overline{1,6};$$

$$V_{j-1,k}^1=(-1)^j\mu_k[\gamma\sin(\mu_k\gamma)+\delta(\mu_k,j)\cos(\mu_k\gamma)]I_1(\beta_kR_1),\quad j=\overline{1,2};$$

$$V_{2,k}^1=-\mu_k[\gamma\sin(\mu_k\gamma)+\delta(\mu_k,2)\cos(\mu_k\gamma)]K_1(\beta_kR_1),$$

$$V_{j-1,k}^2=(-1)^j[\mu_k\gamma\cos(\mu_k\gamma)-[(3-4\nu_j)+\mu_k\delta(\mu_k,j)]\sin(\mu_k\gamma)]I_1(\beta_kR_1),\quad j=\overline{1,2};$$

$$V_{2,k}^2=\{\mu_k\gamma\cos(\mu_k\gamma)-[(3-4\nu_2)+\mu_k\delta(\mu_k,j)]\sin(\mu_k\gamma)\}K_0(\beta_kR_1),$$

$$V_{0,k}^3=-k_1\{U_2(\beta_k,R_1)\gamma\sin(\mu_k\gamma)+[\delta(\mu_k,1)U_2(\beta_k,R_1)-2\nu_1\mu_kI_0(\beta_kR_1)]\cos(\mu_k\gamma)\},$$

$$V_{1,k}^3=U_2(\beta_k,R_1)\gamma\sin(\mu_k\gamma)+[\delta(\mu_k,2)U_2(\beta_k,R_1)-2\nu_2\mu_kI_0(\beta_kR_1)]\cos(\mu_k\gamma),$$

$$V_{2,k}^3=Q_2(\beta_k,R_1)\gamma\sin(\mu_k\gamma)+[\delta(\mu_k,2)U_2(\beta_k,R_1)-2\nu_2\mu_kK_0(\beta_kR_1)]\cos(\mu_k\gamma),$$

$$V_{0,k}^4=-k_1\mu_k\{\mu_k\gamma\cos(\mu_k\gamma)-[(1-2\nu_1)+\mu_k\delta(\mu_k,1)]\sin(\mu_k\gamma)\}I_1(\beta_kR_1),$$

$$V_{1,k}^4=\mu_k[\mu_k\gamma\cos(\mu_k\gamma)-[(1-2\nu_2)+\mu_k\delta(\mu_k,2)]\sin(\mu_k\gamma)]I_1(\beta_kR_1),$$

$$V_{2,k}^4=-\mu_k[\mu_k\gamma\cos(\mu_k\gamma)-[(1-2\nu_2)+\mu_k\delta(\mu_k,2)]\sin(\mu_k\gamma)]K_1(\beta_kR_1),$$

$$V_{1,k}^5=U_2(\beta_k,R_2)\gamma\sin(\mu_k\gamma)+[\delta(\mu_k,2)U_2(\beta_k,R_2)-2\nu_2\mu_kI_0(\beta_kR_2)]\cos(\mu_k\gamma),$$

$$V_{2,k}^5=Q_2(\beta_k,R_2)\gamma\sin(\mu_k\gamma)+[\delta(\mu_k,2)U_2(\beta_k,R_2)-2\nu_2\mu_kK_0(\beta_kR_2)]\cos(\mu_k\gamma),$$

$$V_{1,k}^6=\mu_k[\mu_k\gamma\cos(\mu_k\gamma)-[(1-2\nu_2)+\mu_k\delta(\mu_k,2)]\sin(\mu_k\gamma)]I_1(\beta_kR_2),$$

$$V_{2,k}^6=-\mu_k[\mu_k\gamma\cos(\mu_k\gamma)-[(1-2\nu_2)+\mu_k\delta(\mu_k,2)]\sin(\mu_k\gamma)]K_1(\beta_kR_2),$$

$$V_{0,k}^5=0,\quad V_{0,k}^6=0,\quad k=\overline{1,N},\quad k_1=\frac{G_1}{G_2};$$

$$U_2(\beta_k,r)=\mu_kI_0(\beta_kr)-\frac{h}{r}I_1(\beta_kr),\quad Q_2(\beta_k,r)=\mu_kK_0(\beta_kr)+\frac{h}{r}K_1(\beta_kr),$$

$$A_{6N+j}^1=(-1)^j\frac{1-\nu_j}{E}R_1,\quad j=\overline{1,2},\quad A_{6N+3}^1=-\frac{1}{2G_2}R_1;$$

$$A_{6N+j}^2=-(-1)^j\frac{2\nu_j}{E_j}z,\quad j=\overline{1,2},\quad A_{6N+3}^2=0;$$

$$A_{6N+1}^3=-k_1\frac{1}{2G_1},\quad A_{6N+2}^3=\frac{1}{2G_2},\ A_{6N+3}^3=\frac{1}{2G_2};$$

$$A_{6N+1}^4=0,\ A_{6N+2}^4=0,\ A_{6N+3}^4=0,\quad A_{6N+1}^5=0,$$

$$A_{6N+2}^5=\frac{1}{2G_2},\ A_{6N+3}^5=\frac{1}{2G_2}\frac{R_1^2}{R_2^2};$$

$$A_{6N+1}^6=0,\ A_{6N+2}^6=0,\ A_{6N+3}^6=0;\quad P_m(\gamma)=0,\ m=\overline{1,4};$$

$$P_5(\gamma)=\frac{\sigma_1(h\gamma)}{2G_2},\ P_6(\gamma)=\frac{\tau_1(h\gamma)}{2G_2}.$$

Використовуючи аналітично-числову методику [7, 10, 11], розв'язання системи лінійних рівнянь (8), коефіцієнти якої задані на циліндричній межі матеріалів і зовнішній поверхні, зведемо до пошуку мінімуму такої узагальненої квадратичної форми:

$$\Omega_N=\sum_{k,j=1}^{M}c_k c_j W_{kj}-2\sum_{k=1}^{M}c_k V_k+P^2, \tag{9}$$

де

$$W_{kj}=\sum_{m=1}^{6}\int_0^1 A_k^m(\gamma)A_j^m(\gamma)d\gamma,\quad W_{kj}=W_{jk},\quad k,j=\overline{1,M};$$

$$V_k=\sum_{m=1}^{6}\int_0^1 A_k^m(\gamma)P_m(\gamma)d\gamma,\quad k=\overline{1,M};\quad P^2=\int_0^1\{P_5(\gamma)^2+P_6(\gamma)^2\}d\gamma,$$

$\|f(\gamma)\|=\sqrt{\int_{-1}^{1}f^2(\gamma)d\gamma}$ – норма у метриці $L_2[-1,1]$. Оскільки коефіцієнти системи рівнянь (8) виражено через тригонометричні і функції Бесселя, то всі інтеграли у співвідношеннях (9) знайдено в аналітичному вигляді.

Мінімум узагальненої квадратичної форми (9) позначимо $F(N)$, а змінні c_k, на яких він досягається – як c_k^N. Обчислимо мінімум $F(N)$ і за знайденими змінними c_k^N, $k=\overline{1,M}$, визначимо функції переміщень (7). Розв'язок осесиметричної крайової задачі (1)–(4) описують функції переміщень (7), через які за формулами (5), (6) обчислюють переміщення і напруження.

Нехай до середини бічної поверхні двошарового циліндра прикладені обтискальні локальні (в напрямку осьової координати) нормальні навантаження з чітко вираженим максимумом, які описують залежності

$$\sigma_g(h\gamma)=\sigma_M f(\gamma);\quad f(\gamma)=0,\quad \gamma\notin[-\delta,\delta], \tag{10}$$

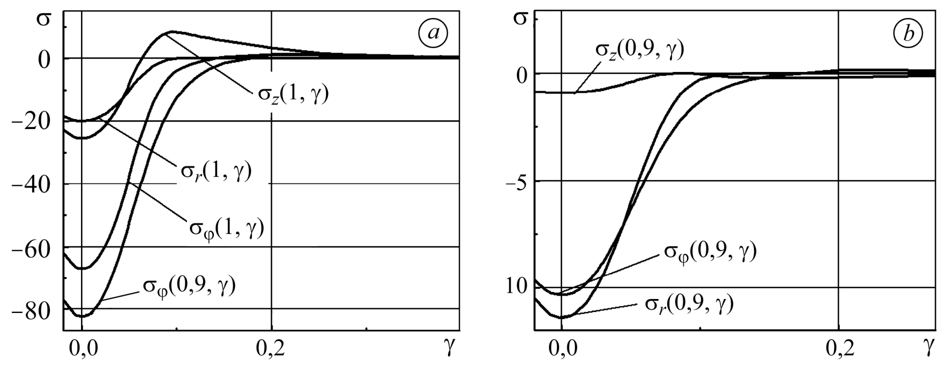
де

$$f(\gamma)=\begin{cases}2[\delta-|\gamma|]^2/\delta^2, & \gamma\in[-\delta,-\delta/2],\ \gamma\in[\delta/2,\delta],\\ [\delta^2-2\gamma^2]/\delta^2, & \gamma\in[-\delta/2,\delta/2],\end{cases}$$

$\sigma_M=A\sigma$; $|A|$ – максимальне безрозмірне навантаження; σ – одиниця розмірності напружень; δ – безрозмірна довжина проміжків, на яких функція $f(\gamma)$ зростає від нуля до одиниці, або, навпаки, спадає. Торці шарів циліндра вільні від навантажень.

На рисунку зображено розподіл напружень у двошаровому циліндрі під дією навантажень (10) для таких значень параметрів: $R_2/R=10$, $R_1/R=9$, $h/R_2=5$, $R_0=0$, $E_2/E_1=10$, $\nu_1=0{,}18$, $\nu_2=0{,}25$, $A=-20$, $\delta=2/A$.

Констатуємо, що на відміну від суцільного одношарового циліндра, колові напруження у двошаровому суттєво перевищують радіальні і досягають максимуму у верхньому шарі на поверхні контакту шарів, де приблизно в чотири рази більші за радіальні; у внутрішньому шарі колові і радіальні напруження значно менші, ніж у верхньому.



Розподіл напружень на поверхнях зовнішнього шару (*a*)
та на поверхні контакту у внутрішньому шарі циліндра (*b*).

Distribution of tensions on the surfaces of external layer (*a*)
and the contact surface in the internal layer of a cylinder (*b*).

Розрахунки підтвердили збіжність і стійкість розробленого аналітично-числового методу. Точність задоволення крайових умов і умов контакту шарів у двошаровому циліндрі залежить від мінімуму узагальненої квадратичної форми (9), і, якщо він збігається до нуля за зростання кількості членів суми ряду N, то знайдений наближений розв'язок збігається до точного. Похибки визначення напружень у середині шарів циліндра менші, ніж розраховані на бічній поверхні або поверхні контакту.

ВИСНОВКИ

Виявлено, що осесиметричний напружений стан двошарового циліндра з ненавантаженими торцями описують власні функції, які визначають нульові та ненульові власні значення. Розроблена ефективна методика апроксимації умов ідеального контакту прилеглих шарів і крайових умов скінченною кількістю власних функцій. Точність задоволення крайових і контактних умов суттєво залежить як від неперервності розподілу навантажень, так і неперервності їх першої похідної. Для навантажень із неперервною похідною точність задоволення крайових умов у 10÷100 разів вища, ніж із розривною.

Розрахунок осесиметричного напружено-деформованого стану двошарового циліндра зведено до шести рівнянь, коефіцієнти яких залежать тільки від осьової змінної, а їх розв'язання – до обчислення мінімуму узагальненої квадратичної форми. Встановлено, що числове значення її мінімуму одночасно визначає похибки задоволення всіх крайових умов і умов контакту шарів; нормальні напруження на бічній поверхні в межах дії локальних навантажень мають таку саму форму, як і навантаження, а їх максимальні значення суттєво залежать від відношення пружних і геометричних характеристик шарів циліндра.

РЕЗЮМЕ. Предложен аналитико-численный компьютерный метод решения осесимметричных краевых задач теории упругости для двухслойных цилиндрических тел. Компоненты вектора перемещений и тензора напряжений представлены в виде рядов, коэффициенты которых определяют построенные собственные функции. Разработана компьютерная методика решения краевых задач для двухслойного цилиндра. Установлены критерии, при выполнении которых построенное приближенное решение совпадает с точным. Найдены качественные и количественные закономерности поведения компонент напряженно-деформированного состояния двухслойного цилиндра при воздействии локальных нагрузок с четко выраженным максимумом.

SUMMARY. An efficient analytical-numerical method for solving axisymmetric boundary value problems of the theory of elasticity for multilayer cylindrical bodies is proposed. The components of the displacement vector and the stress tensor are represented in the form of series, which are determined by the constructed eigenfunctions. A computer method for the analytic-numerical solution of boundary value problems for a two-layer cylinder is developed. The convergence and existence conditions for the numerical solutions to the boundary-value problems are established. Qualitative and quantitative patterns of behavior of the components of the stress-strain state of a two-layer cylinder during under local loads with clearly expressed maximum are found.

1. *Tarn J.-Q. and Wang, Y.-M.* Laminated composite tubes under extension, torsion, bending, shearing and pressuring: a state space approach // Int. J. Solids Struct. – 2001. – **38**. – P. 9053–9075.
2. *Tsukrov I. and Drach B.* Elastic deformation of composite cylinders with cylindrically orthotropic layers // Int. J. Solids Struct. – 2010. – **47**. – P. 25–33.
3. *Chatzigeorgiou G., Charalambakis N., and Murat F.* Homogenization problems of a hollow cylinder made of elastic materials with discontinuous properties // Int. J. Solids Struct. – 2008. – **45**. – P. 5165–5180.
4. *Ревенко В. П.* Визначення тривимірного напружено-деформованого стану товстостінного двошарового циліндра // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2014. – **50**, № 3. – С. 53–58.

   (*Revenko V. P.* Determination of the three-dimensional stress-strain state of a thick-walled two-layer cylinder // Materials Science. – 2014. – **50**, № 3. – P. 369–376.)
5. *Саврук М. П., Онишко Л. Й., Сенюк М. М.* Плоска динамічна осесиметрична задача для порожнистого циліндра // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – **44**, № 1. – С. 7–14.

   (*Savruk M. P., Onyshko L. I., Senyuk M. M.* A plane dynamic axisymmetric problem for a hollow cylinder // Materials Science. – 2008. – **44**, № 1. – P. 1–9.)
6. *Yin X. C. and Yue Z. Q.* Transient plane-strain response of multilayered elastic cylinders to axisymmetric impulse // J. Appl. Mech. – 2002. – **69**, № 6. – P. 825–835.
7. *Ревенко В. П.* О решении трехмерных уравнений линейной теории упругости // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 7. – С. 52–65.
8. *Лурье А. И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
9. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы. – М.: Наука, 1974. – 830 с.
10. *Ревенко В. П.* Дослідження напруженого стану навантаженого скінченного циліндра з використанням власних функцій // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2009. – Вип. 7. – С. 183–190.
11. *Ревенко В. П.* Дослідження тривимірного напруженого стану в пружній пластині з круговим отвором // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – **45**, № 5. – С. 71–76.

    (*Revenko V. P.* Investigation of the three-dimensional stressed state in elastic plates with circular holes // Materials Science. – 2009. – **45**, № 5. – P. 688–695.)

Одержано 13.06.2017