

УДК 539.3

**КОНТАКТ ДВОХ ПРУЖНИХ ТІЛ ІЗ ХВИЛЯСТИМ РЕЛЬЄФОМ
ЗА НАЯВНОСТІ ГАЗУ У ПРОСВІТАХ***О. П. КОЗАЧОК, Б. С. СЛОБОДЯН, Р. М. МАРТИНЯК**Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів*

Досліджено контакт двох півбезмежних пружних тіл, одне з яких має хвилясту поверхню, за наявності в міжповерхневих просвітах реального газу. Його стан описує рівняння Ван дер Ваальса, яке дає можливість урахувати фазовий перехід газу в рідину. Сформульовану контактну задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння (СІР) з ядром Гільберта відносно похідної від висоти міжповерхневих просвітів, яке трансформовано у СІР з ядром Коші, що розв'язано аналітично. З умови існування обмеженого розв'язку цього СІР і з рівняння Ван дер Ваальса отримано систему трансцендентних рівнянь для ширини просвітів і тиску газу, яку розв'язано числово. Проаналізовано залежності ширини просвітів, тиску та об'єму газу, контактного зближення і контактної податливості тіл від навантаження і температури.

Ключові слова: *контактна взаємодія, хвилястий рельєф, міжповерхневі просвіти, реальний газ, фазовий перехід, сингулярне інтегральне рівняння.*

Для поліпшення функціональних характеристик контактних пар використовують текстування поверхонь [1, 2], яке полягає у формуванні на них регулярного рельєфу. Під час контакту між тілами з такими поверхнями виникають періодично розташовані просвіти. В реальних умовах експлуатації вони часто заповнюються рідиною чи газом, тиск яких впливає на розмір ділянок контакту і контактні напруження. Окрім того, рідина, проникаючи під тиском у поверхневі дефекти і тріщини, може зумовити їх поширення [3, 4]. Тому для прогнозування контактної поведінки і міцності тіл з регулярним рельєфом у газорідних середовищах важливо дослідити їх напружено-деформований стан з урахуванням тиску заповнювача просвітів між ними. Раніше такі дослідження вже виконували для контактних пар з одною поверхневою виїмкою [5–7]. Для визначення тиску газу у міжповерхневому просвіті спочатку використано рівняння стану ідеального газу [6]. Вивчено одночасний вплив тиску й теплопровідності ідеального газу в просвіті на термопружну взаємодію тіл [7]. Проте за високого тиску і низької температури механічну поведінку газу адекватніше описує рівняння стану реального газу Ван дер Ваальса [8], яке на протигагу рівнянню стану ідеального газу враховує розміри і взаємодію молекул газу, а також можливість фазового переходу “газ–рідина” при температурі, нижчій за критичну. Тому у праці [5] вивчали контакт тіл з поодиноким поверхневою виїмкою, заповненою реальним газом. Досліджували [9–13] взаємодію тіл з регулярним рельєфом за відсутності заповнювача просвітів. Розв'язано [14–18] контактні задачі для тіл з періодично розташованими поверхневими виїмками за наявності в просвітах ідеального та реального газу, а також нестисливої рідини, що утворює рідинні містки в центральних частинах або на краях просвітів. Розглядали [19] усталений рух штампа з подвійно-періодичним синусоїдальним рельєфом по в'язкопружному шару, який описано моделлю Вінклера, за наявності нестисливої рідини в просвітах між ними. Ви-

вчено [20–23] контакт плоскої і хвилястої поверхонь, проsvіти між якими повністю заповнені стисливою або нестисливою рідиною чи ідеальним газом. Взаємодію ж двох тіл, поверхня одного з яких є хвиляста, за наявності у проsvітах реального газу, в якому може відбуватися фазовий перехід “газ–рідина”, не досліджували.

Формулювання задачі. Розглянемо безфрикційну контактну взаємодію двох пружних півнескінченних тіл D_1 і D_2 із різних матеріалів за умов плоскої деформації. Межа одного з тіл плоска, а іншого – хвиляста, що задана періодичною функцією

$$r(x) = A \cos^2(\pi x / d), \quad x \in [-\infty; \infty] \quad (1)$$

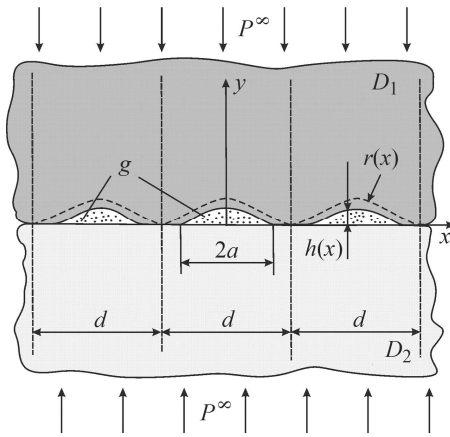


Рис. 1. Схема контакту: g – реальний газ.

Fig. 1. The scheme of the contact: g – real gas.

($A \ll d$) умови контакту тіл, як це прийнято в теорії контактних задач [13], знесемо на плоску поверхню. Тому контактні-крайові умови задачі запишемо так:

уздовж проsvітів $|x - kd| < a$, ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$\tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = 0, \quad \sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^- = -p;$$

на ділянках контакту $a \leq |x - kd| \leq d/2$, ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$\tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = 0, \quad \sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^-, \quad \frac{d}{dx}(\nu^- - \nu^+) = \frac{d}{dx}r(x);$$

на нескінченності

$$\sigma_{yy} = -p^\infty, \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \tau_{xy} = 0.$$

Тут і далі σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} – компоненти тензора напружень; ν – складова вектора переміщення уздовж осі Oy ; p – тиск газу у проsvіті, який заздалегідь невідомий і змінюється зі зміною навантаження; індексами “+” і “-” позначено граничні значення функції за прямування точки до осі Ox у верхній і нижній півплощинах ($y \rightarrow \pm 0$).

Для опису поведінки речовини в газоподібному і рідкому станах, а також фазового переходу прийнемо за базове рівняння Ван дер Ваальса [8]:

$$\left(p + n^2 a_g / V^2\right)(V - nb_g) = nRT, \quad (2)$$

де T – абсолютна температура; R – універсальна газова стала; V і n – об’єм і кількість газу (mol), які припадають на одиницю довжини проsvіту в поздовжньому

(штрихова лінія на рис. 1). Максимальна висота хвилястої межі A значно менша, ніж період d ($A \ll d$). Тіла контактують під дією однорідних стискальних напружень p^∞ , заданих на нескінченності. Внаслідок нерівності межі одного з тіл їх контакт неповний і між ними виникають міжповерхневі проsvіти висотою $h(x)$ та шириною $2a$. Вважаємо, що вони заповнені речовиною (рис. 1), яка залежно від навантаження і температури системи перебуває у газоподібному або рідкому станах. Кількість речовини у кожному проsvіті однакова.

Через мале відхилення хвилястої межі верхнього тіла від площини

напрямку, перпендикулярному до площини на рис. 1; a_g, b_g – константи Ван дер Ваальса.

На рис. 2 ділянка кривої 1–2 відповідає газоподібному стану, 5–6 – рідині, а ділянки 2–3 і 4–5 – метастабільним станам. Ділянка 3–4 не описує жодного реального стану речовини. Експерименти засвідчили [8], що ізотерма Ван дер Ваальса на ділянці 2–3–4–5 горизонтальна, а не S-подібна. Крайні точки цього відрізка відповідають рівноважному стану між рідкою і газоподібною фазами, а їх ордината – тиску насиченої пари p_{sv} . Тому стан міжконтактної речовини описують [8] ізотермами виду 1–2–5–6, які отримують із ізотерм рівняння (2) заміною кривої 2–3–4–5 відрізком 2–5, і для визначення тиску реального газу p використовують модифіковане рівняння Ван дер Ваальса:

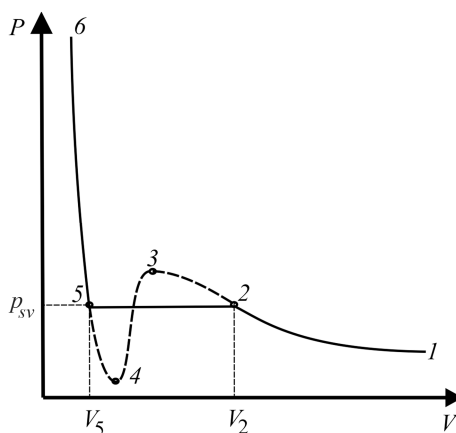


Рис. 2. Ізотерма рівняння Ван дер Ваальса.

Fig. 2. The van der Waals isotherm.

$$p = \begin{cases} nRT/(V - nb_g) - n^2 a_g / V^2, & V < V_5 \cup V > V_2, \\ p_{sv}, & V_5 \leq V \leq V_2, \end{cases} \quad (3)$$

де V_2 і V_5 – об'єм газу на початку та у кінці фазового переходу.

Розв'язання задачі. Використовуючи метод функцій міжконтактних просвітів [8], розв'язок сформульованої задачі подамо через функцію $r(x)$ (I) і заздалегідь невідому висоту просвітів $h(x)$, для визначення якої отримаємо [16] сингулярне інтегральне рівняння (СІР) з ядром Гільберта:

$$\frac{2}{d} \int_{-a}^a h'(t) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(t-x)}{d} \right) dt = K(p^\infty - p) + \frac{2}{d} \int_{-d/2}^{d/2} r'(t) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(t-x)}{d} \right) dt, \quad (4)$$

де $K = \sum_{n=1}^2 4(1 - \nu_n^2) / E_n$; E_n, ν_n – відповідно модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу півплощини $D_n, n = 1, 2$.

Замінивши $\xi = \operatorname{tg}(\pi x/d)$, $\eta = \operatorname{tg}(\pi t/d)$, $\alpha = \operatorname{tg}(\pi a/d)$, СІР (4) трансформуємо у СІР з ядром Коші:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = \frac{d}{2(1 + \xi^2)} K(p^\infty - p) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta, \quad \xi \in [-\alpha, \alpha]. \quad (5)$$

Функція $h(\xi)$ задовольняє умови плавного змикання берегів просвітів:

$$h(\pm\alpha) = 0, \quad h'(\pm\alpha) = 0. \quad (6)$$

Функція (1), що описує хвилясту межу, у нових змінних має вигляд $r(\xi) = A/(1 + \xi^2)$. Підставивши її в інтеграл у правій частині рівняння (5), запишемо його так:

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = \frac{dK(p^\infty - p)}{\pi(1 + \xi^2)} + \frac{2A(\xi^2 - 1)}{(1 + \xi^2)^2}, \quad \xi \in [-\alpha, \alpha]. \quad (7)$$

Згідно з теорією СІР рівняння з ядром Коші може мати необмежений або обмежений на кінцях відрізка інтегрування розв'язок. Враховуючи другу умову (6), шукатимемо обмежений розв'язок

$$h'(\xi) = -\frac{2A}{\sqrt{\alpha^2+1}} \frac{\xi\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}{(1+\xi^2)^2} - \frac{1}{\pi\sqrt{\alpha^2+1}} \left(\frac{A\pi}{\alpha^2+1} - \frac{dK(p^\infty-p)}{2} \right) \frac{\xi\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}{(1+\xi^2)}, \quad (8)$$

який існує за накладання додаткової умови на праву частину рівняння (7) [24]:

$$K(p^\infty-p) - 2A\pi/[d(\alpha^2+1)] = 0. \quad (9)$$

Інтегруючи функцію (8) з урахуванням першої з умов (6) та співвідношення (9), знаходимо висоту просвітів:

$$h(\xi) = \frac{A}{\sqrt{\alpha^2+1}} \frac{\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}{1+\xi^2} + \frac{A}{\alpha^2+1} \operatorname{arcth} \left(\frac{\sqrt{\alpha^2-\xi^2}}{\sqrt{\alpha^2+1}} \right). \quad (10)$$

Підставивши функцію $h(\xi)$ у формулу для визначення об'єму просвіту

$$V = l \int_{-a}^a h(x) dx = \frac{dl}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h(\xi)}{1+\xi^2} d\xi, \text{ де } l = 1 \text{ м, отримаємо:} \quad (11)$$

$$V = dAl[\alpha^2 - \ln(\alpha^2+1)]/(2\alpha^2+2).$$

Функція $h(\xi)$ (10) містить дві невідомі величини – півширину просвіту α і тиск його заповнювача P . Для їх знаходження використаємо систему двох трансцендентних рівнянь: рівняння (9) і те, яке одержуємо з модифікованого рівняння Ван дер Ваальса (3), підставивши в нього об'єм заповнювача (11). Для інженерних розрахунків контактної взаємодії тіл з регулярним рельєфом важливу роль відіграють контактні зближення Δv^∞ та податливість k^* тіл [16], які виразимо через висоту міжповерхневих просвітів та похідну контактного зближення за зовнішнім навантаженням:

$$\Delta v^\infty = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} (r(x) - h(x)) dx = A[1 + \ln(\alpha^2+1)]/(2\alpha^2+2), \quad (12)$$

$$k^* = d(\Delta v^\infty)/d(p^\infty). \quad (13)$$

Числові результати. Числові розрахунки виконали для контакту двох пружних півпросторів, один з яких відповідає каучуку ($\nu_1 = 0,47$, $E_1 = 8$ МПа), а інший – гумі ($\nu_2 = 0,49$, $E_2 = 10,65$ МПа); $d = 1$ м; $A = 0,01$ м, коли просвіти заповнені водяною парою, константи Ван дер Ваальса якої $a_g = 0,555$ J·м³/mol, $b_g = 3,05 \cdot 10^{-5}$ м³/mol; кількість газу в просвіті $n = 1,2 \cdot 10^{-3}$ mol.

Зі збільшенням зовнішнього навантаження тиск газу нелінійно зростає (рис. 3a). З досягненням ним у просвіті тиску насиченої пари для вибраної температури починається фазовий перехід газ–рідина (точки S_1 , S_2), якому відповідають горизонтальні відрізки графіків. Отже, на цьому етапі навантаження приріст зовнішніх зусиль витрачається лише на деформування матеріалу пружного тіла, а заповнювач просвіту не опирається його трансформації. Після повного перетворення газу в рідину (точки F_1 , F_2) залежність тиску рідини від зовнішнього навантаження можна вважати лінійною, на що вказують близькі до прямолінійних ділянки після горизонтальних відрізків. За збільшення зовнішнього навантаження ширина просвітів a зменшується (рис. 3b), причому після переходу заповнювача у рідкий стан вона майже не залежить від зовнішнього тиску p^∞ (графіки стають горизонтальними). Отже, після фазового переходу газ–рідина значно по-

силується опір заповнювача закриттю просвітів. У точках S_1 , S_2 початку фазового переходу газу в рідину криві мають малопомітні злами, а в точках F_1 , F_2 його завершення чітко виражені.

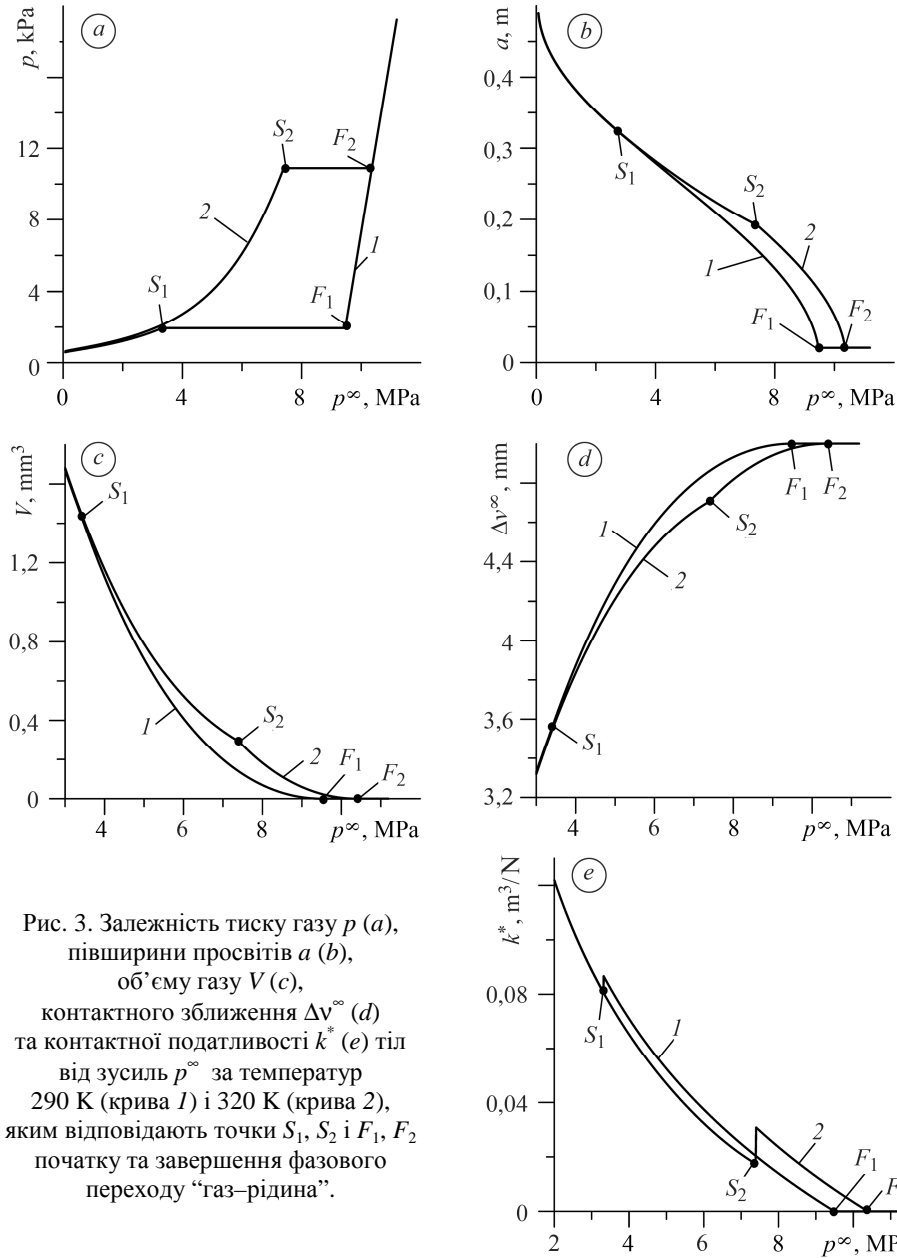


Рис. 3. Залежність тиску газу p (а), півширини просвітів a (b), об'єму газу V (c), контактної податливості k^* (e) тіл від зусиль p^∞ за температур 290 К (крива 1) і 320 К (крива 2), яким відповідають точки S_1 , S_2 і F_1 , F_2 початку та завершення фазового переходу "газ-рідина".

Fig. 3. Dependence of the gas pressure p (a), gaps half-width a (b), gas volume V (c), average normal displacement Δv^∞ (d) and contact compliance k^* (e) of the bodies on load p^∞ for temperatures 290 K (curve 1) and 320 K (curve 2), which the points S_1 , S_2 and F_1 , F_2 correspond to start and end of the phase transition "gas-liquid".

Що вища температура, то більший об'єм газу, особливо за великих тисків p^∞ (рис. 3c). Після завершення фазового переходу газ-рідина об'єм просвіту суттєво зменшується, а його залежність від зовнішнього тиску описує практично горизонтальна лінія. Це означає, що після переходу заповнювача в рідину її стисли-

вість невідчутно впливає на контактну поведінку тіл, тому рідину під час інженерних розрахунків можна вважати нестисливою.

Контактне зближення тіл Δv^∞ (12) збільшується з ростом зовнішнього навантаження (рис. 3d), а за фіксованого навантаження з підвищенням температури дещо зменшується. На початку та у кінці фазового переходу (точки S_1, F_1, S_2, F_2) воно має злами і його перепад зменшується з підвищенням температури. Зі збільшенням зовнішнього тиску контактна податливість тіл k^* (13) монотонно знижується (рис. 3e). На початку та у кінці фазового переходу вона має стрибки, які наприкінці малопомітні. Після завершення фазового переходу залежність контактної податливості тіл від зусиль p^∞ описує практично горизонтальна лінія. Що вища температура, то більші стрибки k^* у точках початку фазового переходу.

ВИСНОВКИ

Досліджено контакт двох пружних ізотропних півнескінчених тіл, поверхня одного з яких плоска, а іншого – хвиляста. Тому їх контакт неповний і між ними виникають просвіти, що містять реальний газ, стан якого описує рівняння Ван дер Ваальса, яке враховує фазовий перехід “газ–рідина”. Сформульовану контактну задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння з ядром Гільберта відносно похідної від висоти міжконтактних просвітів та системи двох трансцендентних рівнянь для ширини просвітів та тиску газу. Досліджено залежності ширини просвітів, тиску і об’єму газу, контактного зближення та контактної податливості тіл від прикладеного навантаження та температури. Встановлено, що на початку та у кінці фазового переходу ширина просвітів, контактне зближення тіл, тиск та об’єм газу мають злами, а контактна податливість у цих точках має стрибки. Перепад контактного зближення тіл зменшується зі зростанням температури.

РЕЗЮМЕ. Исследован контакт двух полубесконечных упругих тел, одно из которых имеет волнистую поверхность, при наличии в межповерхностных зазорах реального газа. Его состояние описывает уравнение Ван дер Ваальса, учитывающее фазовый переход газа в жидкость. Сформулированная задача сведена к сингулярному интегральному уравнению (СИУ) с ядром Гильберта относительно производной от высоты межповерхностных зазоров, которое трансформировано в СИУ с ядром Коши, решенное аналитически. Из условия существования ограниченного решения этого СИУ и из уравнения Ван дер Ваальса получена система трансцендентных уравнений для ширины зазоров и давления газа, которая решена численно. Проанализированы зависимости ширины зазоров, давления и объема газа, контактного сближения и контактной податливости тел от нагрузки и температуры.

SUMMARY. The contact of two elastic semi-infinite bodies, one of which has a wavy surface, in the presence of a real gas in the interface gaps is investigated. The state of the gas is described by the van der Waals equation, which makes it possible to take into account the phase transition of gas to liquid. The contact problem formulated is reduced to a singular integral equation (SIE) with Hilbert kernel for a derivative of a height of the interfacial gaps, and then it is transformed to a SIE with Cauchy kernel that it is solved analytically. A system of transcendental equations for a width of the gaps and a gas pressure is obtained from the consistency condition for this SIE and the van der Waals equation. This system is solved numerically. The dependences of the width of the gaps, the pressure and the volume of the gas, the average normal displacement and the contact compliance of the bodies on the applied load and the temperature are analysed.

1. *Etsion I.* State of the art in laser surface texturing // ASME J. Tribol. – 2005. – **127**, № 1. – P. 248–253.
2. *Stepien P.* Deterministic and stochastic components of regular surface texture generated by a special grinding process // Wear. – 2011. – **271**, № 3–4. – P. 514–518.
3. *Datsyshyn O. P. and Panasyuk V. V.* Pitting of the rolling bodies contact surface // Wear. – 2001. – **251**, № 1–2. – P. 1347–1355.

4. *Datsyshyn O. P., Panasyuk V. V., and Glazov A. Yu.* Modelling of fatigue contact damages formation in rolling bodies and assesment of their durability // *Wear.* – 2011. – **271**, № 1–2. – P. 186–194.
5. *Kit G. S., Martynyak R. M., and Machishin I. M.* The effect of a fluid in the contact gap on the stress state of conjugate bodies // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – **39**, № 3. – P. 292–299.
6. *Martynyak R. M.* The contact of a half-space and an uneven base in the presence of an inter-contact gap filled by an ideal gas // *J. Math. Sci.* – 2001. – **107**, № 1. – P. 3680–3685.
7. *Martynyak R. and Chumak K.* Effect of heat-conductive filler on interface gap on thermo-elastic contact of solids // *Int. J. Heat Mass Transfer.* – 2012. – **55**, № 4. – P. 1170–1178.
8. *Савельев И. В.* Курс общей физики. – М.: Наука, 1966. – 404 с.
9. *Block J. M. and Keer L. M.* Periodic contact problems in plane elasticity // *J. Mech. Mater. Struct.* – 2008. – **3**, № 7. – P. 1207–1237.
10. *Goryacheva I. G. and Martynyak R. M.* Contact problems for textured surfaces involving frictional effects // *Proc. Inst. Mech. Eng., Part J: J. Eng. Tribol.* – 2014. – **228**, № 7. – P. 707–716.
11. *Kryshchak A. and Martynyak R.* Frictional contact of two elastic half-planes with wavy surfaces // *J. Friction and Wear.* – 2000. – **21**, № 5. – P. 1–8.
12. *Маланчук Н.* Локальне фрикційне проковзування пружних тіл із хвилястим рельєфом поверхонь // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2013. – Вип. 17. – С. 112–119.
13. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. – 270 с.
14. *Slobodian B., Chumak K., and Martynyak R.* Mechanical and thermal effect of a filler of intercontact gaps on contact between two semi-infinite solids with microtextured surfaces // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2013. – Вип. 17. – С. 168–174.
15. *Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.* Взаємодія двох пружних тіл за наявності між ними періодично розташованих зазорів, заповнених реальним газом // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2015. – **58**, № 1. – С. 103–111.
(*Kozachok O. P., Slobodian B. S., and Martynyak R. M.* Interaction of two elastic bodies in the presence of periodically located gaps filled with a real gas // *J. Math. Sci.* – 2017. – **222**, № 2. – P. 131–142.)
16. *Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.* Взаимодействие упругих тел с периодическим рельефом при наличии жидкостных мостиков в межконтактных зазорах // *Теорет. и прикл. механика.* – 2013. – Вып. 7 (53). – С. 45–52.
17. *Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.* Контакт пружних тіл за наявності газу та незмочувальної рідини у періодичних міжповерхневих просвітах // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2015. – **51**, № 6. – С. 50–57.
(*Kozachok O. P., Slobodyan B. S., and Martynyak R. M.* Contact of elastic bodies in the presence of gas and incompressible liquid in periodic interface gaps // *Materials Science.* – 2016. – **51**, № 6. – P. 804–813.)
18. *Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.* Контакт пружного тіла і жорсткої основи з періодичною системою квазіеліптичних виїмок, частково заповнених рідиною, яка змочує поверхні тіл // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2017. – **60**, № 1. – С. 132–140.
19. *Горячева И. Г., Шпенёв А. Г.* Моделирование скольжения штампа с регулярным рельефом подошвы по вязкоупругому основанию при наличии жидкой смазки // *Прикл. механика и математика.* – 2012. – **76**, вып. 5. – С. 754–763.
20. *Кузнецов Е. А.* О контакте шероховатых тел при наличии сжимаемой смазки // *Прикл. механика.* – 1988. – **24**, № 12. – С. 85–94.
21. *Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.* Вплив ідеального газу у міжповерхневих зазорах на контакт двох пружних тіл із хвилястим рельєфом поверхні // *Прикл. проблеми механіки і математики.* – 2015. – Вип. 13. – С. 135–140.
22. *Козачок О. П.* Контактна взаємодія тіл з хвилястим рельєфом з урахуванням стисливої міжконтактної рідини // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2017. – Вип. 26. – С. 45–54.
23. *Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.* Вплив міжповерхневих рідинних містків на контакту взаємодію тіл з хвилястим рельєфом // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2016. – Вип. 24. – С. 34–46.
24. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 514 с.

Одержано 27.01.2017