

УДК 539.421.2

## УМОВИ АВТОМОДЕЛЬНОСТІ КРАЙОВОЇ ТРІЩИНИ ПОПЕРЕЧНОГО ЗСУВУ В КВАДРАТНІЙ ПЛАСТИНІ

Т. М. ЛЕНКОВСЬКИЙ<sup>1,2</sup>, П. С. КУНЬ<sup>1</sup>, В. ДУДДА<sup>3</sup>, Є. В. ХАРЧЕНКО<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів;

<sup>2</sup> Національний університет "Львівська політехніка";

<sup>3</sup> Вармінсько-Мазурський університет в Ольштині, Польща

Оцінено напружено-деформований стан прямокутної пластини з крайовою тріщиною за поперечного зсуву. Встановлено умови автомодельного поширення тріщини. Записано формулу для обчислення коефіцієнта інтенсивності напружень  $K_{II}$ , виражену через зсувні напруження.

**Ключові слова:** поперечний зсув, крайова тріщина, коефіцієнт інтенсивності напружень, поправкова функція, умови автомодельності.

Актуальною науковою задачею є розроблення силових схем зразків, а також методик дослідження кінетики зсувних тріщин у лабораторних умовах для визначення характеристик циклічної тріщиностійкості сталей за поперечного зсуву [1–3]. На основі аналізу літературних даних [2, 4] та теоретичних досліджень [5] у Фізико-механічному інституті ім. Г. В. Карпенка НАН України запропоновано зразок у вигляді квадрата з крайовим надрізом довжиною  $h$  (рис. 1) навантажувати циклічним зусиллям  $P$ , по черговому прикладеним паралельно до площини цього надрізу. На сьогодні записано формулу для обчислення коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН)  $K_{II}$  у квадратній пластині з крайовою тріщиною за поперечного зсуву, яка є прототипом запропонованого зразка ( $a = 0,2b$ ;  $c = 0,1b$ ):

$$K_{II} = \frac{P}{t\sqrt{b}} \cdot f_1(\lambda), \quad (1)$$

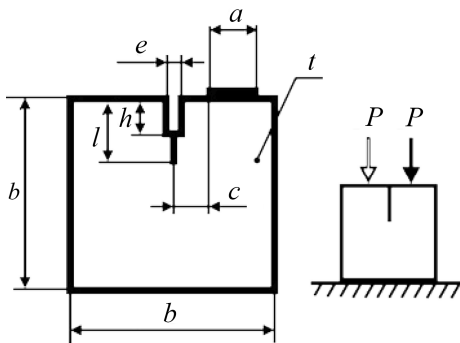


Рис. 1. Квадратний зразок з крайовим надрізом для випробувань циклічним поперечним зсувом.

Fig. 1. A square specimen with an edge notch for cyclic transverse shear testing.

де поправкову функцію  $f_1(\lambda)$  визначили методом скінченних елементів для відносних довжин тріщин  $\lambda = l/b$  від 0,2 до 0,8. Подальше розроблення конструкції зразка вимагає встановлення умов автомодельного поширення тріщини, що слугуватимуть основним критерієм вибору оптимальних розмірів зразків, за випробувань яких реалізується механізм квазікрихкого руйнування, а визначені характеристики циклічної тріщиностійкості будуть інваріантними характеристиками матеріалу.

Відомо, що умови автомодельності регламентують розміри тріщини і тіла, які не порушують заданого відхилення напружень біля вершини тріщини (або в малому околі вершини скінченної тріщини) в тілі зі скінченними її розмірами від

напружень біля вершини півбезмежної тріщини у безмежному тілі аж до краю зони передруйнування (пластичної зони) (рис. 2).

Зазначене вище можна формально записати так:

$$|\sigma_y^{(0)}(x_0) - \sigma_y^{(1)}(x_0)| \leq \chi \sigma_y^{(0)}(x_0), \quad (2)$$

або

$$\left| 1 - \frac{\sigma_y^{(1)}(x_0)}{\sigma_y^{(0)}(x_0)} \right| \leq \chi.$$

Тут  $\sigma_y^{(0)}(x) = \frac{K_I^{(0)}}{\sqrt{2\pi x}}$  – розподіл напружень біля вершини тріщини у безмежному тілі;

$\sigma_y^{(1)}(x) = \frac{K_I^{(0)}}{\sqrt{2\pi x}} \cdot f(\lambda) =$

$= \frac{K_I^{(1)}}{\sqrt{2\pi x}}$  – розподіл напружень на про-

довженні тріщини у тілі обмежених розмірів;  $\chi$  – задане відхилення,  $\lambda$  – параметр, який вказує на зв'язок між розмірами тріщини і тіла.

Таким чином, рівняння (2) набуде вигляду

$$|1 - f(\lambda)| \leq \chi.$$

Для крайової тріщини поперечного зсуву в півплощині КІН визначаємо за формулою

$$K_{II}^{(0)} = 1,12\tau\sqrt{\pi l}.$$

За крайової тріщини у смузі [6] (рис. 3а):

$$K_{II}^{(1)} = \tau\sqrt{\pi l} \cdot f(\lambda).$$

Тут

$$f(\lambda) = (1,12 - 0,56\lambda + 0,09\lambda^2 + 0,18\lambda^3) / \sqrt{1-\lambda}; \quad \lambda = l/b.$$

З огляду на логіку суперпозицій напружених станів та розв'язків [7, 8] за бічної тріщини з несиметричним навантаженням (рис. 3б)

$$K_{II} = 0,5\tau\sqrt{\pi l} \cdot f_2(\lambda), \quad (3)$$

де

$$f_2(\lambda) = 1,12(1 - 0,50\lambda + 0,08\lambda^2 + 0,16\lambda^3) / \sqrt{1-\lambda}. \quad (4)$$

Поправкову функцію  $f_1(\lambda)$ , зображену графічно (рис. 4), подамо у вигляді полінома 6-го степеня

$$f_1(\lambda) = -0,2438 + 5,8482\lambda - 16,729\lambda^2 + 23,175\lambda^3 - 15,051\lambda^4 + 3,2917\lambda^5. \quad (5)$$

Для встановлення взаємозв'язку між зосередженим зусиллям на краю квадратної пластини з крайовою тріщиною і дотичними напруженнями на березі тріщини (рис. 3с) використаємо принцип еквівалентних напружених станів, прирівнявши значення КІН  $K_{II}$  для двох зазначених силових схем. А саме, із формул (1) і (3) отримаємо:

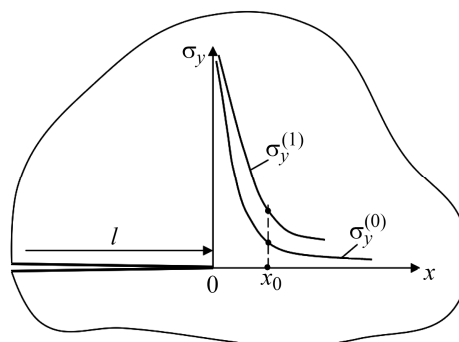


Рис. 2. Схема розподілу напружень біля вершини тріщини в площині нормального відриву.

Fig. 2. Scheme of stress distribution near the crack tip in the normal opening plane.

$$\frac{P}{t\sqrt{b}} \cdot f_1(\lambda) = 0,5\tau\sqrt{\pi l} \cdot f_2(\lambda).$$

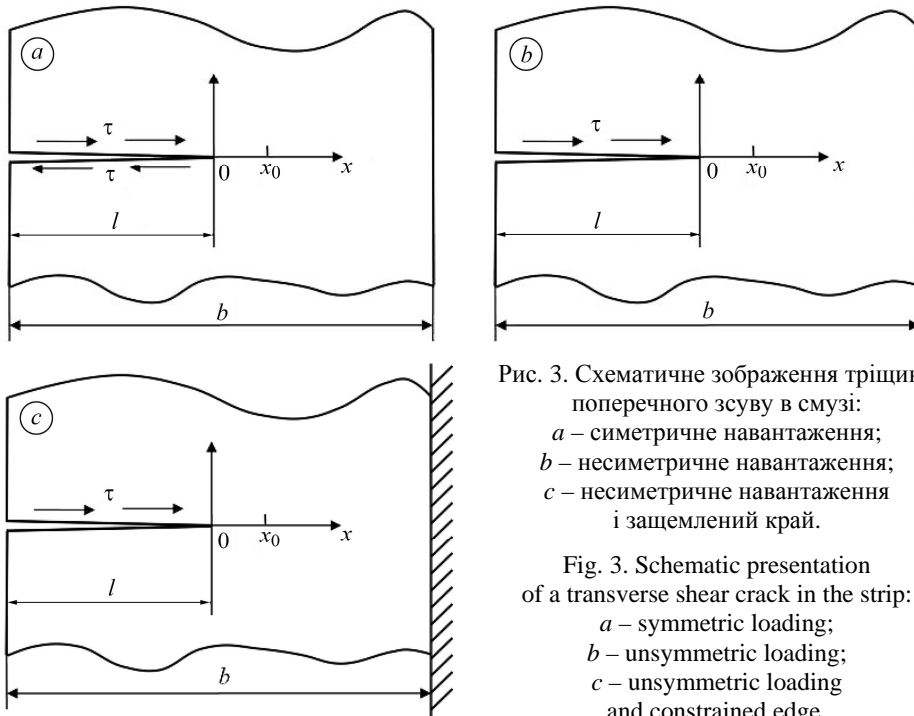


Рис. 3. Схематичне зображення тріщини поперечного зсуву в смузі:  
*a* – симетричне навантаження;  
*b* – несиметричне навантаження;  
*c* – несиметричне навантаження і защемлений край.

Fig. 3. Schematic presentation of a transverse shear crack in the strip:  
*a* – symmetric loading;  
*b* – unsymmetric loading;  
*c* – unsymmetric loading and constrained edge.

Тоді за значеннями  $P$ , згідно зі силовою схемою, напруження  $\tau$  на березі крайової тріщини у квадратній пластині визначатимемо з виразу

$$\tau = \frac{P \cdot f_1(\lambda)}{t\sqrt{b} \cdot 0,5\sqrt{\pi l} \cdot f_2(\lambda)}.$$

Або

$$\tau = \frac{P \cdot f_t(\lambda)}{0,5\sqrt{\pi l} \cdot t\sqrt{b}}, \quad (6)$$

де  $f_t(\lambda) = f_1(\lambda) / f_2(\lambda)$ .

З огляду на це, формулу для визначення КІН  $K_{II}$  у квадратній пластині з крайовою тріщиною запишемо у вигляді

$$K_{II} = 0,5\tau\sqrt{\pi l} \cdot f_3(\lambda). \quad (7)$$

За значеннями КІН  $K_{II}$  для одичної сили відповідних відносних довжин тріщин у діапазоні  $\lambda$  від 0,2 до 0,8 з формул (1) та (5) поправкову функцію кінцевої формули для обчислення КІН  $K_{II}$ , виражену через зсувні напруження, знаходимо зі співвідношення

$$f_3(\lambda) = K_{II} / 0,5\tau\sqrt{\pi l}.$$

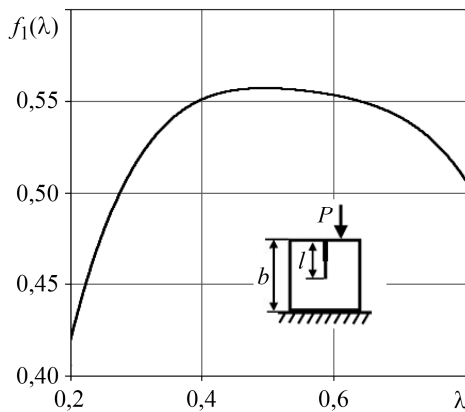


Рис. 4. Залежність безрозмірного КІН  $K_{II}$  від відносної довжини тріщини в квадратній пластині.

Fig. 4. Dependence of normalized SIF  $K_{II}$  on relative crack length in a square plate.

Апроксимувавши отримані значення поліномом 6-го степеня, запишемо вираз для поправкової функції:

$$f_3(\lambda) = 1,12(1 - 1,997\lambda + 20,699\lambda^2 - 70,306\lambda^3 + 91,918\lambda^4 - 42,005\lambda^5). \quad (8)$$

Тоді умова (2) буде

$$\left| 1,997\lambda - 20,699\lambda^2 + 70,306\lambda^3 - 91,918\lambda^4 + 42,005\lambda^5 \right| \leq \chi. \quad (9)$$

Значення  $\lambda$  в інтервалі  $[0; \lambda_0]$  задовольняють нерівність (9). Тут  $\lambda_0 = 0,424$  є розв'язком трансцендентного рівняння (9).

Оскільки

$$\lambda_0 = \frac{l + x_0}{b} = \frac{l + lp_{II}}{b},$$

то

$$\frac{l}{b} + \frac{lp_{II}}{b} \leq 0,424.$$

Тут  $lp_{II} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{K_{II}^*}{\tau_T^2} = 0,4 \frac{K_{II}^*}{\tau_T^2}$ , де  $K_{II}^*$  – критичний КІН  $K_{II}$ ,  $\tau_T$  – границя плинності

ідеального пружно-пластичного матеріалу за зрізу.

Із умов автомодельності для задачі Гріффітса (за нормального відриву) відомо [9]:

$$\frac{lp_I}{l} \leq 0,12.$$

За аналогією, для крайової тріщини поперечного зсуву запишемо вираз:

$$\frac{(1,12)^2 lp_{II}}{l} \leq 0,12$$

або

$$\frac{lp_{II}}{l} \leq 0,096 \approx 0,1.$$

Звідси остаточно знаходимо:

$$l \geq 10lp_{II}, \quad b \geq \frac{1}{0,424}(l + lp_{II}) = 25,94lp_{II}.$$

Якщо виразити розмір пластичної зони через характеристики (механічні і тріщиностійкості) матеріалу, то

$$l \geq 4 \left( \frac{K_{II}^*}{\tau_T} \right)^2; \quad b \geq 11 \left( \frac{K_{II}^*}{\tau_T} \right)^2.$$

Прийнявши  $\tau_T = \tau_{0,3}$ , де  $\tau_{0,3}$  – умовна границя плинності матеріалу за зрізу, умови автомодельного поширення тріщини за поперечного зсуву, які обмежують мінімальну довжину тріщини  $l$  та ширину нетто перерізу робочої частини зразка, набудуть вигляду

$$l \geq 4 \left( \frac{K_{II}^*}{\tau_{0,3}} \right)^2; \quad b - l \geq 7 \left( \frac{K_{II}^*}{\tau_{0,3}} \right)^2. \quad (10)$$

Таким чином, отримані математичні залежності (10), які визначають співвідношення розміру заданого зразка і тріщини в ньому з урахуванням властивостей матеріалу, забезпечуватимуть правомірність використання силових критеріїв лінійної механіки руйнування. Під час дослідження пропонується зразків реалізуватиметься механізм квазікрихкого руйнування, а визначені параметри тріщиностійкості будуть інваріантними характеристиками матеріалу за поперечного зсуву.

*РЕЗЮМЕ.* Проведена оцінка напружено-деформованого стану прямокутної пластини з боковою тріщиною поперечного сдвига. Установлені умови автомодельного розповсюдження тріщини. Записана формула для обчислення коефіцієнта інтенсивності напружень  $K_{II}$ , виражена через сдвигові напруження.

*SUMMARY.* The strained-deformed state of a rectangular plate with an edge crack for transverse shear is evaluated. The conditions of self-similar propagation of the crack are established. A formula is written for calculating the stress intensity factor  $K_{II}$  expressed in terms of the shear stress.

1. *Про концепцію вибору сталей для високоміцних залізничних коліс /* О. П. Осташ, В. Г. Анофрієв, І. М. Андрейко, Л. А. Мурадян, В. В. Кулик // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2012. – **48**, № 6. – С. 7–13.  
(*Ostash O. P., Anofriev V. H., Andreiko I. M., Muradyan L. A., Kulyk V. V.* On the concept of selection of steels for high-strength railroad wheels // *Materials Science*. – 2013. – **48**, № 6. – P. 697–703.)
2. *Ленковський Т. М.* Визначення характеристик циклічної тріщиностійкості сталей за поперечного зсуву (огляд) // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2014. – **50**, № 3. – С. 29–37.  
(*Lenkovs'kyi T. M.* Determination of the characteristics of cyclic crack resistance of steels under transverse shear (A survey) // *Materials Science*. – 2014. – **50**, № 3. – P. 340–349.)
3. *Методика побудови кінетичних діаграм втомного руйнування сталей за поперечного зсуву з врахуванням тертя берегів тріщини /* Я. Л. Іваницький, Т. М. Ленковський, В. М. Бойко, С. Т. Штаюра // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2013. – **49**, № 6. – С. 41–45.  
(*Ivanyts'kyi Ya. L., Lenkovs'kyi T. M., Boiko V. M., Shtayura S. T.* Methods for the construction of the kinetic diagrams of fatigue fracture for steels under the conditions of transverse shear with regard for the friction of crack lips // *Materials Science*. – 2014. – **49**, № 6. – P. 749–754.)
4. *Дацишин О. П., Панасюк В. В.* Методи оцінювання контактної довговічності елементів трибоз'єднань (Огляд) // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2016. – **52**, № 4. – С. 7–20.  
(*Datsyshyn O. P., Panasyuk V. V.* Methods for the evaluation of the contact durability of elements of the tribojoints (A survey) // *Materials Science*. – 2017. – **52**, № 4. – P. 447–459.)
5. *Datsyshyn O. P., Panasyuk V. V., and Glazov A. Yu.* The model of the residual life time estimation of tribojoint elements by formation criteria of the typical contact fatigue damages // *Int. J. of Fatig.* – 2016. – **83**, №2. – P. 300–312.
6. *Tada Hiroshi, Paris Paul C., and Irwin George* The Stress Analysis of Cracks: Handbook. – Hellertown: Del Research Corp., 1973. – 386 p.
7. *Hartranft R. J. and Sih G. C.* Alternating method applied to edge and surface crack problems // *Methods of analysis and solutions of crack problems*. – Leyden: Noordhoff Intern. Publ., 1973. – P. 179–238.
8. *Rooke D. P. and Jones D. A.* Stress intensity factors in fretting fatigue // *J. of Strain Analysis for Eng. Design*. – 1979. – **14**, № 1. – P. 1–6.
9. *Панасюк В. В.* Механіка квазіхрупкого руйнування матеріалів. – К.: Наук. думка, 1991. – 416 с.

Одержано 19.04.2018