

УДК 539.3

ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З МНОЖИНОЮ ОТВОРІВ ДОВІЛЬНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ ТА МІШАНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

Т. В. ШОПА

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

У межах уточненої теорії, яка враховує деформацію поперечного зсуву та інерційні компоненти, розглянуто задачу про усталені коливання ортотропної обмеженої пластини з довільною кількістю криволінійних отворів. Проаналізовано мішані гармонічні в часі крайові умови як на зовнішній межі пластини, так і на контурах отворів. Розв'язок побудовано на основі непрямого методу граничних елементів. Використано секвенціальний підхід до подання функцій Гріна. Інтегральні рівняння розв'язано методом колокацій. Наведено числові результати для прямокутної пластини з двома круглими отворами.

Ключові слова: коливання, ортотропна пластинка, отвори, непрямий метод граничних елементів.

У літературі коливання пластин прямокутної або круглої форми з одним або кількома круглими, прямокутними чи еліптичними отворами досліджують здебільшого методом скінченних елементів у межах класичної або уточненої моделі. У праці [1] зосереджено увагу на удосконаленні методики дискретизації області у методі скінченних елементів для вивчення коливань пластин з отворами довільної форми. Проаналізовано метод R -функцій та варіаційного формулювання для досліджень динамічної стійкості та параметричних коливань пластин складної форми [2].

Нижче розв'язано задачу про усталені коливання ортотропної пластини з довільною кількістю отворів довільних форми, орієнтації та розташування з довільними мішаними гармонічними в часі крайовими умовами на контурах отворів та на зовнішній довільної форми межі пластини непрямим методом граничних елементів у межах уточненої теорії, яка враховує поперечні зсуви і інерційні компоненти, включаючи інерцію обертання.

Формулювання задачі. Розглянемо задачу про усталені коливання ортотропної пластини. Пластина містить N отворів довільних форми та розташування. Контурами отворів є криві $L^{(j)}$, $j = \overline{1, N}$. З них N_1 отворів, на контурах яких задано компоненти переміщень, N_2 отворів, на контурах яких задано компоненти зусиль, та N_3 отворів, на контурах яких задано комбінації компонент переміщень та зусиль. Зовнішня межа пластини також довільної форми, а її контуром є три взаємодоповнювальні криві $L^{(N+1)}$, $L^{(N+2)}$ та $L^{(N+3)}$. Вважаємо, що середина поверхня пластини займає багатозв'язну область Ω . Область Π – однозв'язна прямокутна з довжинами сторін l_1, l_2 , яка містить область Ω .

Використали такі позначення: \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$ – нормальний і дотичний вектори уздовж деякого напрямку; E_i – модулі Юнга; G_{12} , G_{13} , G_{23} – модулі зсуву матеріалу; ν_{12} ,

ν_{21} – коефіцієнти Пуассона; ρ – густина матеріалу; $2h$ – товщина пластини; q, m_i – компоненти зовнішнього навантаження; w – прогин; γ_1, γ_2 – кути повороту нормалі до серединної поверхні; γ_n, γ_τ – нормальні й тангенціальні компоненти кутів повороту нормалі до серединної поверхні; Q_n – нормальна компонента перерізувальних сил; M_n, M_τ – нормальна і тангенціальна компоненти згинальних моментів; ω – частота коливань; t – час.

Крайові умови на контурах отворів та на зовнішній межі пластини такі:

$$w = w_0^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad \gamma_n = \gamma_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad \gamma_\tau = \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t),$$

$$\alpha \in L^{(j)}, \quad j = \overline{1, N_1}, \quad j = N + 1, \quad (1)$$

$$Q_n = Q_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad M_n = M_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad M_\tau = M_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t),$$

$$\alpha \in L^{(j)}, \quad j = \overline{N_1 + 1, N_1 + N_2}, \quad j = N + 2, \quad (2)$$

$$w = w_0^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad M_n = M_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad \gamma_\tau = \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t),$$

$$\alpha \in L^{(j)}, \quad j = \overline{N_1 + N_2 + 1, N}, \quad j = N + 3. \quad (3)$$

Розв'язування задачі. Для цього використали рівняння пластин, які враховують поперечні зсуви та інерційні компоненти, включаючи інерцію обертання:

$$[\mathbf{L}]\mathbf{U} = -\mathbf{P}, \quad \mathbf{U} = \{w, \gamma_1, \gamma_2\}^T, \quad \mathbf{P} = \{q, m_1, m_2\}^T, \quad (4)$$

$$\mathbf{L}_{11} = \Lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \Lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - 2h\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \mathbf{L}_{22} = D_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \Lambda_1 - \frac{2h^3}{3} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$\mathbf{L}_{33} = D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + D_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \Lambda_2 - \frac{2h^3}{3} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \mathbf{L}_{23} = (D_{12}\nu_{12} + D_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2},$$

$$\mathbf{L}_{32} = (D_{12} + D_2\nu_{21}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \quad \mathbf{L}_{12} = -\mathbf{L}_{21} = \Lambda_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \quad \mathbf{L}_{13} = -\mathbf{L}_{31} = \Lambda_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2},$$

$$D_i = \frac{2h^3 E_i}{3(1 - \nu_{ij}\nu_{ji})}, \quad D_{ij} = \frac{2h^3 G_{ij}}{3}, \quad \Lambda_i = 2hG_{i3}, \quad i, j = 1, 2; \quad i \neq j.$$

Розв'язок крайової задачі шукаємо на основі непрямого методу граничних елементів. Для побудови функцій Гріна для рівнянь (4) у прямокутній області Π з однорідними крайовими умовами вигляду

$$w = 0, \quad M_n = 0, \quad \gamma_\tau = 0, \quad \alpha \in \partial\Pi,$$

використовуємо послідовне подання дельта-функції Дірака та метод рядів Фур'є [3–6]. У результаті одержуємо:

$$\mathbf{U}^G(\alpha, \alpha^r, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{U}^G(\alpha, \alpha^r, \varepsilon, t) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon) [\mathbf{E}_{km}(\alpha)] [\mathbf{U}_{km}] [\mathbf{E}_{km}(\alpha^r)] \{T^r\} \sin(\omega t),$$

$$\mathbf{U}^G(\alpha, \alpha^r, t) = \{w^G(\alpha, \alpha^r, t), \gamma_1^G(\alpha, \alpha^r, t), \gamma_2^G(\alpha, \alpha^r, t)\}^T, \quad \{T^r\} = \{T_1^r, T_2^r, T_3^r\}^T,$$

$$[\mathbf{E}_{km}(\alpha)] = \begin{bmatrix} \Phi_{km}^{ss}(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{km}^{cs}(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{km}^{sc}(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{E}_{km}(\alpha^r)] = \begin{bmatrix} \Phi_{km}^{ss}(\alpha^r) & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{km}^{cs}(\alpha^r) & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{km}^{sc}(\alpha^r) \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{U}_{km}] = \begin{bmatrix} w_{km}^1 & w_{km}^2 & w_{km}^3 \\ \gamma_{1km}^1 & \gamma_{1km}^2 & \gamma_{1km}^3 \\ \gamma_{2km}^1 & \gamma_{2km}^2 & \gamma_{2km}^3 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{km}^{ss}(\alpha) = \sin(\lambda_{1k}\alpha_1)\sin(\lambda_{2m}\alpha_2), \quad \lambda_{1k} = \frac{k\pi}{l_1}, \quad \lambda_{2m} = \frac{m\pi}{l_2},$$

$$\Phi_{km}^{cs}(\alpha) = \cos(\lambda_{1k}\alpha_1)\sin(\lambda_{2m}\alpha_2), \quad \Phi_{km}^{sc}(\alpha) = \sin(\lambda_{1k}\alpha_1)\cos(\lambda_{2m}\alpha_2),$$

$$w_{km}^1 = \frac{1}{\det|\mathbf{L}^{km}|} \det \begin{vmatrix} \mathbf{L}_{22}^{km} & \mathbf{L}_{23}^{km} \\ \mathbf{L}_{32}^{km} & \mathbf{L}_{33}^{km} \end{vmatrix},$$

$$w_{km}^2 = \frac{-1}{\det|\mathbf{L}^{km}|} \det \begin{vmatrix} \mathbf{L}_{21}^{km} & \mathbf{L}_{23}^{km} \\ \mathbf{L}_{31}^{km} & \mathbf{L}_{33}^{km} \end{vmatrix}, \quad w_{km}^3 = \frac{1}{\det|\mathbf{L}^{km}|} \det \begin{vmatrix} \mathbf{L}_{21}^{km} & \mathbf{L}_{22}^{km} \\ \mathbf{L}_{31}^{km} & \mathbf{L}_{32}^{km} \end{vmatrix},$$

$$\gamma_{1km}^1 = \frac{-1}{\det|\mathbf{L}^{km}|} \det \begin{vmatrix} \mathbf{L}_{12}^{km} & \mathbf{L}_{13}^{km} \\ \mathbf{L}_{32}^{km} & \mathbf{L}_{33}^{km} \end{vmatrix}, \quad \gamma_{1km}^2 = \frac{1}{\det|\mathbf{L}^{km}|} \det \begin{vmatrix} \mathbf{L}_{11}^{km} & \mathbf{L}_{13}^{km} \\ \mathbf{L}_{31}^{km} & \mathbf{L}_{33}^{km} \end{vmatrix},$$

$$\gamma_{1km}^3 = \frac{-1}{\det|\mathbf{L}^{km}|} \det \begin{vmatrix} \mathbf{L}_{11}^{km} & \mathbf{L}_{12}^{km} \\ \mathbf{L}_{31}^{km} & \mathbf{L}_{32}^{km} \end{vmatrix}, \quad \gamma_{2km}^1 = \frac{1}{\det|\mathbf{L}^{km}|} \det \begin{vmatrix} \mathbf{L}_{12}^{km} & \mathbf{L}_{13}^{km} \\ \mathbf{L}_{22}^{km} & \mathbf{L}_{23}^{km} \end{vmatrix},$$

$$\gamma_{2km}^2 = \frac{-1}{\det|\mathbf{L}^{km}|} \det \begin{vmatrix} \mathbf{L}_{11}^{km} & \mathbf{L}_{13}^{km} \\ \mathbf{L}_{21}^{km} & \mathbf{L}_{23}^{km} \end{vmatrix}, \quad \gamma_{2km}^3 = \frac{1}{\det|\mathbf{L}^{km}|} \det \begin{vmatrix} \mathbf{L}_{11}^{km} & \mathbf{L}_{12}^{km} \\ \mathbf{L}_{21}^{km} & \mathbf{L}_{22}^{km} \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{L}_{11}^{km} = -\Lambda_1\lambda_{1k}^2 - \Lambda_2\lambda_{2m}^2 + 2\rho h\omega^2,$$

$$\mathbf{L}_{22}^{km} = -D_1\lambda_{1k}^2 - D_{12}\lambda_{2m}^2 - \Lambda_1 + \frac{2h^3}{3}\rho\omega^2, \quad \mathbf{L}_{33}^{km} = -D_{12}\lambda_{1k}^2 - D_2\lambda_{2m}^2 - \Lambda_2 + \frac{2h^3}{3}\rho\omega^2,$$

$$\mathbf{L}_{23}^{km} = -(D_1\nu_{12} + D_{12})\lambda_{1k}\lambda_{2m}, \quad \mathbf{L}_{32}^{km} = -(D_2\nu_{21} + D_{12})\lambda_{1k}\lambda_{2m},$$

$$\mathbf{L}_{12}^{km} = \mathbf{L}_{21}^{km} = -\Lambda_1\lambda_{1k}, \quad \mathbf{L}_{13}^{km} = \mathbf{L}_{31}^{km} = -\Lambda_2\lambda_{2m},$$

$$C_{km}(\varepsilon) = \mu_{km} \frac{4}{l_1 l_2} \varphi(\lambda_{1k}\varepsilon_1)\varphi(\lambda_{2m}\varepsilon_2), \quad \mu_{km} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } k \neq 0, m \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{якщо } k = 0, m \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{якщо } k \neq 0, m = 0, \\ \frac{1}{4}, & \text{якщо } k = 0, m = 0, \end{cases}$$

$\varphi(\lambda_{1k}\varepsilon_1)$, $\varphi(\lambda_{2m}\varepsilon_2)$ – вагові функції, які визначають тип узагальненого підсумовування.

де $\Phi_{km}^1(\xi) = \Phi_{km}^{ss}(\xi)$, $\Phi_{km}^2(\xi) = \Phi_{km}^{cs}(\xi)$, $\Phi_{km}^3(\xi) = \Phi_{km}^{sc}(\xi)$,

$$\left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(U)}(\alpha) \right] = \begin{bmatrix} w_1(\alpha) & w_2(\alpha) & w_3(\alpha) \\ \gamma_{1n}(\alpha) & \gamma_{2n}(\alpha) & \gamma_{3n}(\alpha) \\ \gamma_{1\tau}(\alpha) & \gamma_{2\tau}(\alpha) & \gamma_{3\tau}(\alpha) \end{bmatrix}, \quad \left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(P)}(\alpha) \right] = \begin{bmatrix} Q_{1n}(\alpha) & Q_{2n}(\alpha) & Q_{3n}(\alpha) \\ M_{1n}(\alpha) & M_{2n}(\alpha) & M_{3n}(\alpha) \\ M_{1\tau}(\alpha) & M_{2\tau}(\alpha) & M_{3\tau}(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$\gamma_{jn}(\alpha) = n_1(\alpha) \gamma_{1km}^j \Phi_{km}^{cs}(\alpha) + n_2(\alpha) \gamma_{2km}^j \Phi_{km}^{sc}(\alpha),$$

$$\gamma_{j\tau}(\alpha) = \tau_1(\alpha) \gamma_{1km}^j \Phi_{km}^{cs}(\alpha) + \tau_2(\alpha) \gamma_{2km}^j \Phi_{km}^{sc}(\alpha), \quad w_j(\alpha) = w_{km}^j \Phi_{km}^{ss}(\alpha),$$

$$Q_{jn} = \Lambda_1 n_1(\alpha) \Phi_{km}^{cs}(\alpha) (\gamma_{1km}^j + \lambda_{1k} w_{km}^j) + \Lambda_2 n_2(\alpha) \Phi_{km}^{sc}(\alpha) (\gamma_{2km}^j + \lambda_{2m} w_{km}^j),$$

$$M_{jn} = D_1 n_1^2(\alpha) \Phi_{km}^{ss}(\alpha) (-\lambda_{1k} \gamma_{1km}^j - \nu_{12} \lambda_{2m} \gamma_{2km}^j) +$$

$$+ D_2 n_2^2(\alpha) \Phi_{km}^{ss}(\alpha) (-\lambda_{2m} \gamma_{2km}^j - \nu_{21} \lambda_{1k} \gamma_{1km}^j) +$$

$$+ 2D_{12} n_1(\alpha) n_2(\alpha) \Phi_{km}^{cc}(\alpha) (\lambda_{2m} \gamma_{1km}^j + \lambda_{1k} \gamma_{2km}^j),$$

$$M_{j\tau} = D_1 n_1(\alpha) \tau_1(\alpha) \Phi_{km}^{ss}(\alpha) (-\lambda_{1k} \gamma_{1km}^j - \nu_{12} \lambda_{2m} \gamma_{2km}^j) +$$

$$+ D_2 n_2(\alpha) \tau_2(\alpha) \Phi_{km}^{ss}(\alpha) (-\lambda_{2m} \gamma_{2km}^j - \nu_{21} \lambda_{1k} \gamma_{1km}^j) +$$

$$+ D_{12} (n_1(\alpha) \tau_2(\alpha) + n_2(\alpha) \tau_1(\alpha)) \Phi_{km}^{cc}(\alpha) (\lambda_{2m} \gamma_{1km}^j + \lambda_{1k} \gamma_{2km}^j), \quad j = \overline{1, 3}.$$

Її розв'язок можна знайти, застосовуючи різні числові схеми. Зокрема, достатньо добрі результати дає метод колокацій, коли контури узагальненої кривої L замінюємо ламаними ($S^{(j)}$ – кількість відрізків розбиття j -го контуру, $\alpha^{(j)r}$ – середини відрізків його розбиття, $r = 1, S^{(j)}$), а на кожному з прямолінійних відрізків контурів задаємо розподіл невідомих густин $\{T^{(j)r}(\xi)\} = \{T^{(j)r}\} \delta(\alpha^{(j)r}, \xi)$. Мінімізуємо нев'язку в контрольних точках колокацій $\alpha^{(j)q}$.

Звідси система $3 \sum_{j=1}^{N+3} S^{(j)}$ лінійних алгебричних рівнянь для дискретних значень невідомих густин $\{T^{(j)r}\}$, $j = \overline{1, N+3}$, $r = \overline{1, S^{(j)}}$ набуде вигляду

$$\begin{aligned} & \left\{ w_0^{(j)}(\alpha^{(j)q}), \gamma_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) \right\}^T = \\ & = \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) \left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(U)}(\alpha^{(j)q}) \right] \left[\mathbf{E}_{km}(\alpha^{(f)r}) \right] \{T^{(f)r}\}, \\ & \quad \alpha^{(j)q} \in L^{(j)}, \quad j = \overline{1, N_1}, \quad j = N+1, \quad q = \overline{1, S^{(j)}}, \\ & \left\{ Q_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), M_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), M_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) \right\}^T = \\ & = \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) \left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(P)}(\alpha^{(j)q}) \right] \left[\mathbf{E}_{km}(\alpha^{(f)r}) \right] \{T^{(f)r}\}, \end{aligned}$$

$$\alpha^{(j)q} \in L^{\varepsilon(j)}, \quad j = \overline{N_1+1, N_1+N_2}, \quad j = N+2, \quad q = \overline{1, S^{(j)}},$$

$$w_0^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^3 C_{km}(\varepsilon) w_i(\alpha^{(j)q}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r},$$

$$\gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^3 C_{km}(\varepsilon) \gamma_{i\tau}(\alpha^{(j)q}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r},$$

$$\alpha^{(j)q} \in L^{(j)}, \quad j = \overline{N_1+N_2+1, N}, \quad j = N+3, \quad q = \overline{1, S^{(j)}},$$

$$M_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^3 C_{km}(\varepsilon) M_{in}(\alpha^{(j)q}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r},$$

$$\alpha^{(j)q} \in L^{\varepsilon(j)}, \quad j = \overline{N_1+N_2+1, N}, \quad j = N+3, \quad q = \overline{1, S^{(j)}}.$$

Власні частоти знаходимо з умови існування нетривіального розв'язку відповідної системи однорідних лінійних алгебричних рівнянь, прирівнюючи визначник системи до нуля. Характеристики напружено-деформованого стану вздовж довільного напрямку з вектором нормалі $\mathbf{n}(\alpha)$ та дотичним $\boldsymbol{\tau}(\alpha)$ можна отримати з допомогою дискретних значень густин потенціалів простого шару:

$$\begin{cases} w(\alpha, t) \\ \gamma_n(\alpha, t) \\ \gamma_\tau(\alpha, t) \end{cases} = \sum_{j=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(j)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) [\boldsymbol{\Omega}_{km}^{(U)}(\alpha)] [\mathbf{E}_{km}(\alpha^{(j)r})] \{T^{(j)r}\} \sin(\omega t), \quad \alpha^{(j)r} \in L,$$

$$\begin{cases} Q_n(\alpha, t) \\ M_n(\alpha, t) \\ M_\tau(\alpha, t) \end{cases} = \sum_{j=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(j)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) [\boldsymbol{\Omega}_{km}^{(P)}(\alpha)] [\mathbf{E}_{km}(\alpha^{(j)r})] \{T^{(j)r}\} \sin(\omega t), \quad \alpha^{(j)r} \in L.$$

Числові результати. Використовуючи побудовані алгебричні рівняння, можна розглянути різні окремі випадки задачі, коли задані довільні комбінації амплітуд $w(\alpha)$, $\gamma_n(\alpha)$, $\gamma_\tau(\alpha)$, $Q_n(\alpha)$, $M_n(\alpha)$, $M_\tau(\alpha)$ як на контурі зовнішньої межі, так і на кожному контурі внутрішньої межі. Також можливі різні мішані крайові умови на різних складових частинах контурів отворів і зовнішньої межі.

Розглянемо окремий випадок, коли маємо шарнірно оперту ортотропну прямокутну пластину з двома підкріпченими круглими отворами. Тоді область Π доцільно вибрати так, щоб її межа збігалася з зовнішньою межею пластини. Геометричні та фізичні параметри пластини такі: $l_1 = 2$ м, $l_2 = 1$ м, $h = 0,003$ м, $E_1 = 128$ ГПа, $E_2 = 11$ ГПа, $G_{12} = G_{13} = 4,48$ ГПа, $G_{23} = 1,53$ ГПа, $\nu_{12} = 0,25$, $\rho = 1500$ кг/м³. Крайові умови на контурах отворів: $w_0^{(1)} = 0,002$ м, $\gamma_{0n}^{(1)} = \gamma_{0\tau}^{(1)} = 0$, $w_0^{(2)} = -0,004$ м, $\gamma_{0n}^{(2)} = \gamma_{0\tau}^{(2)} = 0$. Частота усталених коливань $\omega = 15$ Hz. Радіуси та розташування центрів отворів: $b_1 = 0,1$ м, $\alpha_1^{*(1)} = 0,5$ м, $\alpha_2^{*(1)} = 0,5$ м; $b_2 = 0,1$ м, $\alpha_1^{*(2)} = 1,5$ м, $\alpha_2^{*(2)} = 0,5$ м. Параметри апроксимації: $K = 50$, $S^{(1)} = S^{(2)} = 20$,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{b_1 \pi}{S^{(1)}} m, \quad C_{km}(\varepsilon) = \mu_{km} \frac{4}{l_1 l_2} \frac{\left(\sin\left(\frac{\lambda_{1k} \varepsilon_1}{2}\right) \right)^2 \left(\sin\left(\frac{\lambda_{2m} \varepsilon_2}{2}\right) \right)^2}{\left(\frac{\lambda_{1k} \varepsilon_1}{2} \right)^2 \left(\frac{\lambda_{2m} \varepsilon_2}{2} \right)^2}.$$

Використовуємо параметричне задання контурів отворів, враховуючи правило їх обходу та орієнтацію нормалі.

На рис. 1 зображено амплітуду прогину пластини для різних значень радіусів отворів, яка досягає своїх значень згідно з крайовими умовами саме в точках на контурах отворів, а на рис. 2 – амплітуду прогину пластини для різного розташування отворів.

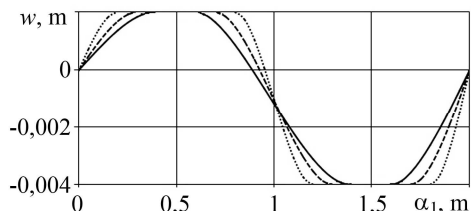


Рис. 1. Fig. 1.

Рис. 1. Амплітуда прогину пластини на лінії $\alpha_2 = 0,5$ m для різних значень радіусів отворів b_1 і b_2 : суцільна лінія – 0,1 m; штрихова – 0,2; пунктирна – 0,3.

Fig. 1. Deflection amplitude of the plate on the line $\alpha_2 = 0.5$ m for different radii b_1 and b_2 of the holes: solid line – 0.1 m; dashed – 0.2; dotted – 0.3.

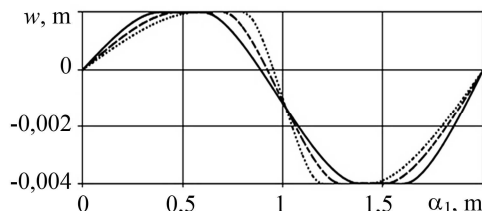


Рис. 2. Fig. 2.

Рис. 2. Амплітуда прогину пластини на лінії $\alpha_2 = 0,5$ m для різного розташування отворів:

суцільна лінія – $\alpha_1^{*(1)} = 0,5$ m, $\alpha_2^{*(1)} = 0,5$ m, $\alpha_1^{*(2)} = 1,5$ m, $\alpha_2^{*(2)} = 0,5$ m;

штрихова – $\alpha_1^{*(1)} = 0,6$ m, $\alpha_2^{*(1)} = 0,5$ m, $\alpha_1^{*(2)} = 1,4$ m, $\alpha_2^{*(2)} = 0,5$ m;

пунктирна – $\alpha_1^{*(1)} = 0,7$ m, $\alpha_2^{*(1)} = 0,5$ m, $\alpha_1^{*(2)} = 1,3$ m, $\alpha_2^{*(2)} = 0,5$ m.

Fig. 2. Deflection amplitude of the plate on the line $\alpha_2 = 0.5$ m for different location of the holes: solid line – $\alpha_1^{*(1)} = 0.5$ m, $\alpha_2^{*(1)} = 0.5$ m, $\alpha_1^{*(2)} = 1.5$ m, $\alpha_2^{*(2)} = 0.5$ m,

dashed – $\alpha_1^{*(1)} = 0.6$ m, $\alpha_2^{*(1)} = 0.5$ m, $\alpha_1^{*(2)} = 1.4$ m, $\alpha_2^{*(2)} = 0.5$ m,

dotted – $\alpha_1^{*(1)} = 0.7$ m, $\alpha_2^{*(1)} = 0.5$ m, $\alpha_1^{*(2)} = 1.3$ m, $\alpha_2^{*(2)} = 0.5$ m.

За зближення отворів їхній взаємний вплив на амплітуду прогину пластини в зоні між ними суттєво зростає.

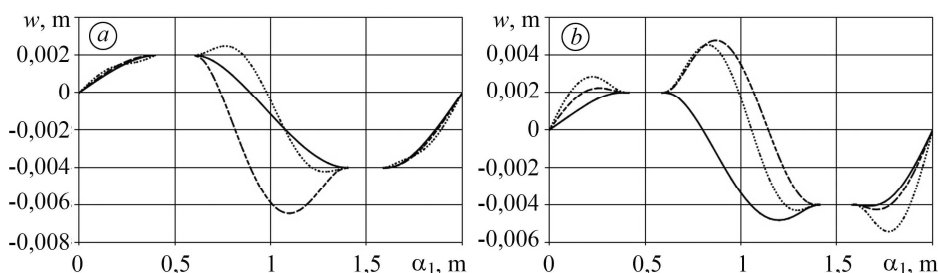


Рис. 3. Амплітуда прогину пластини на лінії $\alpha_2 = 0,5$ m для різних значень частот коливань (a: суцільна лінія – $\omega = 50$ Hz, штрихова – 100, пунктирна – 150; b: суцільна – $\omega = 200$ Hz, штрихова – 250, пунктирна – 300).

Fig. 3. Deflection amplitude of the plate on the line $\alpha_2 = 0.5$ m for different values of the vibration frequency (a: solid line – $\omega = 50$ Hz, dashed – 100, dotted – 150; b: solid – $\omega = 200$ Hz, dashed – 250, dotted – 300).

На рис. 3 подано амплітуду прогину пластини для різних значень частот коливань. Зі збільшенням частоти форма коливань ускладнюється. Також можна стверджувати, що частота впливає не тільки на форму коливань, але і суттєво – на їх амплітуду як у точках резонансу, так і в позарезонансному діапазоні.

ВИСНОВКИ

У межах уточненої теорії, яка враховує поперечні зсуви та інерційні компоненти, розглянуто задачу про усталені коливання ортотропної пластини з довільною кількістю отворів довільних геометричної форми та розташування за мішаних гармонічних у часі крайових умов. Розв'язок заснований на непрямому методі граничних елементів за послідовнісного подання функцій Гріна. Систему інтегральних рівнянь розв'язано методом колокацій. Числову схему верифіковано для прямокутної шарнірно опертої пластини з двома круглими підкріпченими отворами. На основі отриманих числових результатів можна стверджувати, що динамічний прогин суттєво залежить від частоти, крайових умов, взаємного розташування отворів, а також їх розмірів. Запропонована числова схема є загальною для досліджень поведінки розв'язків для різних окремих випадків задачі.

РЕЗЮМЕ. В пределах уточненной теории, учитывающей поперечные сдвиги и инерционные компоненты, рассмотрена задача об установившихся колебаниях ортотропной ограниченной пластины с произвольным количеством криволинейных отверстий. Оценены смешанные гармонические во времени граничные условия как на внешней границе пластины, так и на контурах отверстий. Решение построено на основе непрямого метода граничных элементов. Использован секвенциальный подход к представлению функций Грина. Интегральные уравнения решено методом коллокаций. Приведены численные результаты для прямоугольной пластины с двумя круглыми отверстиями.

SUMMARY. In the framework of the refined theory, which takes into account transverse shear deformation and inertial components, the problem on the steady state vibrations of the orthotropic finite plate with arbitrary number of curvilinear holes is considered. Mixed harmonic in time boundary conditions are evaluated both on the external boundary of the plate and on the contours of the holes. The solution is built on the basis of the indirect boundary elements method. The sequential approach to the representation of the Green's functions is used. Integral equations are solved by the collocation method. Numerical results for the rectangular plate with two circular holes are presented.

1. Hota S. S. and Padhi P. Vibration of plates with arbitrary shapes of cutouts // J. of Sound and Vibration. – 2007. – **302**, № 4–5. – P. 1030–1036.
2. Kurpa L., Mazur O., and Tkachenko V. Dynamical stability and parametrical vibrations of laminated plates with complex shape // Latin American J. of Solids and Struct. – 2013. – **10**. – P. 175–188.
3. Шона Т. Коливання ортотропної панелі подвійної кривини з множиною отворів довільної конфігурації // Вісник Тернопільськ. нац. техн. ун-ту. – 2012. – № 3. – С. 63–74.
4. Бурак Я. Й., Рудавський Ю. К., Сухорольський М. А. Аналітична механіка локально навантажених оболонок. – Львів: Інтеллект-Захід, 2007. – 240 с.
5. Lighthill J. Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions. – Cambridge University Press, 1958. – 80 p.
6. Сухорольський М. А. Функціональні послідовності та ряди. – Львів: Растр-7, 2010. – 346 с.

Одержано 26.12.2017