УМОВИ СТРИБКА НАПРУЖЕНЬ І ПЕРЕМІЩЕНЬ НА ТОНКИХ АНІЗОТРОПНИХ ПРОШАРКАХ ТА ВКЛЮЧЕННЯХ У СУЦІЛЬНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

В. П. СИЛОВАНЮК [1], *Н. А. ІВАНТИШИН* [1], *О. Н. КУЗЬ* [2]

[1] *Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів;*

[2] *Національний університет "Львівська політехніка"*

Для задач про тонкі анізотропні прошарки, накладки та включення у суцільному тривимірному середовищі отримані умови, які дають можливість дію таких неоднорідностей відобразити поверхнею з певними властивостями. Зокрема, за переходу через цю поверхню відбувається розрив компонент векторів переміщень і напружень. Це дає можливість у складних задачах про анізотропні неоднорідності в середовищі понизити вимірність дефектів однорідної структури з тривимірних до двовимірних, з двовимірних до одновимірних. Внаслідок цього, задачі у математичному відношенні спрощуються, що дає змогу отримувати їх ефективні розв'язки.

Ключові слова: *тонкі включення, анізотропія, умови спряження, неоднорідні тіла.*

Тонкі елементи в структурі матеріалів та конструкціях відіграють найрізноманітніші ролі. Зокрема в композиційних матеріалах з плоскою та волокнистою арматурою, технологіях заліковування тріщин, у різноманітних підкріпленнях і накладках з високомодульних матеріалів у будівельній індустрії вони надають більшої міцності, жорсткості, нових функціональних властивостей. Водночас неметалічні інтерметалідні включення в металах, створюючи зони підвищеної концентрації напружень, стають ініціаторами локального руйнування матеріалу, що під час експлуатації елемента конструкції призводить до виходу його з ладу. Особливо небезпечні плоскі дефекти такі, як графітові включення в залізовуглецевих сплавах, сульфідні в сталях, інтерметалідні в алюмінієвих сплавах тощо.

Для пошуку оптимальних шляхів зміцнення матеріалів та конструкцій з тонкими неоднорідностями, армувальними елементами, накладками тощо необхідні теорії з визначення напружено-деформованого та граничного станів тіл з тонкими включеннями. Проблемі побудови математичних моделей тонких пружних включень присвячено чимало досліджень [1–8]. Загальний підхід до її розв'язання полягає у заміні включення деякими умовами контакту берегів матриці вздовж серединної поверхні неоднорідності. Вперше така ідея висловлена у праці [1] стосовно теплопровідності тіл з тонкими прошарками, а пізніше і задач пружної рівноваги тіл з тонкими включеннями [2]. Достатньо повний огляд праць з цього питання наведено в монографії [8]. Здебільшого матеріал включень вважали ізотропним. Модель тонкого включення із трансверсально-ізотропного матеріалу запропоновано у працях [7, 9]. Нижче отримали умови стрибка переміщень і напружень на тонкому анізотропному включенні у суцільному середовищі.

Розглянемо середовище з тонким анізотропним включенням, обмеженим гладкою поверхнею. Умовно вилучаємо включення із оточуючого матеріалу. Його дію замінюємо невідомими наперед напруженнями на поверхні спряження матеріалів. Розглядаємо окремо рівновагу включення і середовища. Систему прямокутних декартових координат x_1, x_2, x_3 вибираємо так, щоб площина $x_1 0 x_2$ збігалася

Контактна особа: Н. І. ІВАНТИШИН, e-mail: n.ivantyshyn@gmail.com

з серединною площиною включення. Фундаментальна система рівнянь для анізотропного матеріалу включення за відсутності об’ємних сил складається із трьох рівнянь рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \tag{1}$$

рівнянь, що виражають закон Гука для анізотропного тіла [10]

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn} \varepsilon_{mn}, \tag{2}$$

та співвідношень Коші

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \tag{3}$$

де σ_{ij}, ε_{ij} – компоненти симетричного тензора напружень і деформацій; u_i – компоненти вектора переміщень; C_{ijmn} – пружні постійні; i, j, m, n =1, 2, 3. Тут незалежними є тільки 21 коефіцієнт C_{ijmn}, оскільки $C_{ijmn} = C_{jimn} = C_{ijnm} = C_{jinm} = C_{nmij} = C_{mnij}$.

У співвідношеннях (1), (2) виключимо із розгляду компоненти тензора напружень, які не діють у площині включення, а саме σ_{11}, σ_{22}, σ_{12}. В результаті для визначення переміщень u_i та напружень σ_{i3} отримуємо систему рівнянь

$$C_{11mn} \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial x_1} + C_{12mn} \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0; \qquad C_{12mn} \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial x_1} + C_{22mn} \frac{\partial \varepsilon_{mn}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0;$$

$$\frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_i} = 0; \tag{4}$$

$$\sigma_{i3} = C_{i3mn} \varepsilon_{mn}, \qquad i, m, n = 1, 2, 3.$$

На основі припущення про малу товщину h включення приймаємо лінійний розподіл поля переміщень і напружень по осі x_3 в неоднорідності. Усереднюючи рівняння (4) за товщиною включень, з врахуванням співвідношень Коші (3), отримуємо умови на поверхні включення

$$\frac{1}{2} C_{klmn} \left(\frac{\partial^2 (u_m)}{\partial x_l \, \partial x_n} + \frac{\partial^2 (u_n)}{\partial x_l \, \partial x_m} \right) + C_{kl33} \frac{\partial [u_3]}{h \, \partial x_l} + C_{kl3n} \left(\frac{\partial [u_n]}{h \, \partial x_l} + \frac{\partial^2 (u_3)}{\partial x_l \, \partial x_n} \right) + \frac{[\sigma_{k3}]}{h} = 0;$$

$$\frac{\partial (\sigma_{k3})}{\partial x_k} + \frac{[\sigma_{33}]}{h} = 0; \tag{5}$$

$$(\sigma_{i3}) - \frac{1}{2} C_{i3kl} \left(\frac{\partial (u_k)}{\partial x_l} + \frac{\partial (u_l)}{\partial x_k} \right) - C_{i333} \frac{[u_3]}{h} - C_{i33k} \left(\frac{\partial (u_3)}{\partial x_k} + \frac{[u_k]}{h} \right) = 0;$$

$$k, l, m, n = 1, 2; \qquad i = 1, 2, 3,$$

де введені позначення $(f) = f^+ + f^-$; $[f] = f^+ - f^-$. Знаки “+” і “–“ відносять величини до верхньої та нижньої відносно серединної площини поверхонь включення.

Таким чином, отримали шість рівнянь (5), які складають математичну модель тонкого прошарку або включення, матеріал якого володіє анізотропією пружних властивостей загального виду. Ці умови стрибків переміщень і напружень при переході через поверхню, які моделюють включення, разом з рівняннями рівноваги середовища, граничними умовами формують крайові задачі теорії диференціальних рівнянь середовищ з тонкими чужорідними включеннями. Загальні розв’язки таких просторових задач для ізотропних пружних середовищ і включень отримані в працях [6, 11, 12], трансверсально-ізотропних середовищ і включень [9, 13], попередньо напружених середовищ [9, 14]. Плоскі задачі такого типу стосовно пружних середовищ досліджували багато авторів, огляд їх праць наведено в монографії [8].

У зв'язку з існуванням площини симетрії пружних властивостей, яка збігається із площиною $x_1 0 x_2$, ряд коефіцієнтів у співвідношеннях (5) необхідно покласти рівними нулю, а саме:

$$C_{1113} = C_{1123} = C_{2213} = C_{2223} = C_{3313} = C_{3323} = C_{1213} = C_{1223} = 0 \qquad (6)$$

для забезпечення незмінності пружного потенціалу за зміни напрямку осі x_3 на протилежний.

Поклавши у співвідношеннях (5) $C_{1112} = C_{2212} = C_{3312} = C_{1323} = 0$, що необхідно для існування трьох взаємно перпендикулярних площин пружної системи, отримуємо умови взаємодії ортотропного включення із суцільним середовищем.

Трансверсально-ізотропне включення [9] отримуємо, коли виконуються співвідношення

$$C_{1113} = C_{2233} = C_{2323} = C_{3131}\,,\; C_{1111} = C_{2222}\,,\; C_{1212} = \frac{1}{2}(C_{1111} - C_{1122})\,, \qquad (7)$$

які забезпечують незмінність пружного потенціалу за повороту системи координат $x_1\, x_2\, x_3$ навколо осі x_3.

І нарешті, умови стрибка напружень і переміщень на ізотропному включенні отримуємо, якщо виконуються рівності

$$C_{1113} = C_{2222} = C_{3333},\, C_{2323} = C_{3131} - C_{1212},\, C_{2331} = C_{3112} = C_{1223},\, C_{1111} = C_{1122} - 2C_{1212}\,. \quad (8)$$

Для пружних сталих ізотропного тіла використовують позначення Ляме λ і μ, зв'язок яких зі сталими C_{ijkl} такий:

$$C_{ijkl} = \lambda\,\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\,, \qquad (9)$$

де $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ – символ Кронекера.

Умови на вільній поверхні отримуємо, якщо всі пружні модулі у рівняннях (5) покласти рівними нулю $C_{ijmn} = 0$:

$$\sigma_{i3}^{+} = \sigma_{i3}^{-} = 0\,,\; i=1,\,2,\,3. \qquad (10)$$

Відсутність включення (умови ідеального контакту) одержимо з рівнянь (5), якщо вважати, що товщина включення $h \to 0$

$$\begin{aligned} &\sigma_{i3}^{+} = \sigma_{i3}^{-}\,, \\ &u_i^{+} = u_i^{-}\,,\;\; i = 1,2,3\,. \end{aligned} \qquad (11)$$

Модель вінклерівського типу отримуємо, якщо знехтуємо стрибками напружень та величинами вищого порядку малості:

$$(\sigma_{i3}) - C_{i33i}\frac{[u_i]}{h} = 0\,,\; i=1,\,2,\,3. \qquad (12)$$

Зазначимо, що наведеним тут способом можна отримати відповідні результати для тонких анізотропних в'язкопружних включень у суцільному середовищі, якщо скористатися, наприклад, принципом Больцмана, на якому базується один з варіантів лінійної теорії в'язкопружності.

ВИСНОВКИ

На основі рівнянь лінійної теорії пружності анізотропних тіл запропоновано метод, де крайову задачу для тіла з тонким анізотропним включенням зводять до задачі про тіло, в якому включення змодельовано деякою поверхнею нижчої вимірності з певними фізичними властивостями. Ці властивості відображають математичними умовами, які мають задовольняти граничні значення компонент векторів переміщень та зусиль на цій поверхні. Вказані величини зазнають стрибків за переходу через цю поверхню неідеального контакту. В результаті формулюємо граничну задачу теорії диференціальних рівнянь з умовами стрибків переміщень та напружень. Такий підхід дає можливість отримати ефективні розв'язки складних задач для середовищ з анізотропними включеннями, прошарками та поверхневими накладками. Звідси випливають умови для часткових випадків анізотропії матеріалу включення, а також умови ідеального контакту (відсутність включення), вільної поверхні та включення, реакція якого виражена моделлю вінклерівської основи.

РЕЗЮМЕ. Для задач о тонких анизотропных прослойках, накладках и включениях в сплошной трехмерной среде получены условия, позволяющие эти неоднородности отразить некоторой поверхностью с определенными свойствами. В частности, при переходе через эту поверхность происходит разрыв компонент векторов перемещений и напряжений. Эти условия дают возможность в сложных задачах об анизотропных неоднородностях в среде снизить размерность дефектов однородной структуры с трехмерной к двумерной, а с двумерной к одномерной. В результате этого, задачи в математическом отношении упрощаются, что позволяет получать их эффективные решения.

SUMMARY. In a solid three-dimensional body the conditions are obtained for the problems on thin anisotropic layers, overlays or inclusions, which allow us to represent the action of such heterogeneities by some surface with certain properties. In particular when passing through this surface the breaking of the components of the displacement and stress vectors occurs. These conditions allow us in the complicated problems on anisotropic heterogeneity in the body to decrease the dimensions of the defects of a heterogeneous structure from three-dimensional to two-dimensional, while two-dimensional are reduced to the one-dimensional ones. As a result problems are simplified in the mathematical sense and it becomes possible to get the effective solutions.

1. *Підстригач Я. С.* Умови теплового контакту твердих тіл // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1963. – № 7. – С. 872–874.
2. *Підстригач Я. С.* Умови стрибка напружень і переміщень на тонкостінному включенні в суцільному середовищі // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1982. – № 12. – С. 29–31.
3. *Чобанян К. Р., Хачикян А. С.* Плоское деформированное состояние упругого тела с тонкостенным гибким включением // Изв. АН Арм. ССР. – 1967. – № 6. – С. 19–29.
4. *Соткилава О. В., Черепанов Г. П.* Некоторые задачи однородной теории упругости // Прикл. математика и механика. – 1975. – **38**, № 3. – С. 537–550.
5. *Сулим Г. Т.* Термоупругие условия взаимодействия среды с тонкостенным включением // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1979. – № 15. – С. 83–92.
6. *Стадник М. М.* Об одном методе приближенного решения трехмерной задачи для тела с тонким включением // Физ.-хим. механика материалов. – 1988. – **24**, № 1. – С. 53–65.

   (*Stadnik M. M.* A method of approximate solution of a three-dimensional elastic problem for a body with a thin inclusion // Material Science. – 1988. – **24**, № 1. – P. 49–60.)
7. *Силованюк В. П.* Тріщини і тріщиноподібні дефекти в попередньо напруженому тілі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1995. – **31**, № 2. – С. 22–35.

   (*Sylovanyuk V. P.* Cracks and cracklike defects in the preliminarily stressed body // Material Science. – 1996. – **31**, № 2. – P. 170–183.)
8. *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
9. *Силованюк В. П.* Руйнування попередньо напружених і трансверсально-ізотропних тіл із дефектами. – Львів: Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка, 2000. – 300 с.
10. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
11. *Хай М. В.* Інтегральні рівняння задачі про визначення напружень в тілі з тонким чужорідним включенням // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1984. – № 2. – С. 43–46.
12. *Панасюк В. В., Стадник М. М., Силованюк В. П.* Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями. – К.: Наук. думка, 1986. – 216 с.
13. *Силованюк В. П.* Розв'язок задачі теорії пружності для трансверсально-ізотропного тіла з плоскою поверхнею розриву // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1987. – № 2. – С. 63–66.
14. *Силованюк В. П.* Плоска поверхня розриву в попередньо напруженому тілі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1991. – **27**, № 4. – С. 41–44.

    (*Silovanyuk V. P.* A planar surface of discontinuity in a preloaded body // Material Science. – 1992. – **27**, № 4. – P. 367–370.)

Одержано 14.12.2017