

УДК 539.3

ВПЛИВ СТИСЛИВОЇ МІЖКОНТАКТНОЇ РІДИНИ НА ВЗАЄМОДІЮ ПРУЖНОГО ТІЛА І ТЕКСТУРОВАНОЇ ПРЯМОКУТНИМИ ВІЙМКАМИ ЖОРСТКОЇ ОСНОВИ

О. П. КОЗАЧОК

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Досліджено безфрикційний контакт пружного тіла та жорсткої основи з періодичною системою прямокутних виїмок за наявності стисливої рідини у міжповерхневих просвітах. Сформульовану контактну задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння (СІР) з ядром Гільберта відносно похідної для висоти міжповерхневих просвітів, яке трансформовано у СІР з ядром Коші, що розв'язано аналітично, та трансцендентного рівняння для тиску рідини, яке отримано з рівняння стану стисливої баротропної рідини. Проаналізовано залежності тиску рідини, форми просвітів, контактних зближення та податливості тіл від прикладеного навантаження і модуля об'ємної пружності рідини.

Ключові слова: *контактна взаємодія, виїмки, міжповерхневі просвіти, стислива рідина, контактна податливість тіл, сингулярне інтегральне рівняння.*

Текстурування поверхонь [1, 2], яке полягає у формуванні на них регулярного рельєфу, використовують для поліпшення функціональних характеристик двокомпонентних з'єднань. Під час контакту між тілами з такими поверхнями виникають періодично розташовані просвіти, які у реальних умовах експлуатації можуть заповнювати рідина чи газ, що тиснуть на спряжені поверхні. Взаємодію тіл з урахуванням впливу тиску газорідинного заповнювача просвіту, зумовленого поодинокую поверхневою виїмкою, вивчали раніше [3, 4]. Огляд публікацій про дослідження взаємодії тіл з періодичним рельєфом за відсутності заповнювача просвітів між ними наведено у працях [5, 6]. Розв'язано [7–13] контактні задачі для тіл з періодично розташованими гладкими поверхневими виїмками чи тіл, поверхня одного з яких хвиляста, за наявності у міжповерхневих просвітах реального газу або стисливої чи нестисливої рідини, яка змочує або не змочує поверхні тіл. Контакт пружного тіла і текстурованої виїмками жорсткої основи, коли просвіти заповнені рідиною, що змочує поверхні тіл, та газом, що перебуває під сталим тиском, досліджено для прямокутних [14] та квазіеліптичних [15] виїмок. Поширення поверхневої тріщини в зоні контакту тіл під тиском рідини, що її заповнює, проаналізовано у працях [16, 17]. Взаємодію ж пружного тіла та жорсткої основи з періодичною системою прямокутних виїмок за наявності стисливої рідини у міжповерхневих просвітах не досліджували.

Формулювання задачі. Вивчимо безфрикційну взаємодію пружного ізотропного півпростору з жорсткою основою, межа якої має нескінченну періодичну систему розташованих з періодом d плиткових тунельних виїмок прямокутної форми шириною $2a$ і висотою A ($A/a \ll 1$). Півпростір притискається до основи під дією рівномірно розподіленого на нескінченності навантаження P^∞ і в ньому реалізується стан плоскої деформації. Через нерівність основи між тілами виникають просвіти висотою $h(x)$ (рис. 1). Вважаємо, що вони заповнені стисливою баротропною рідиною, стан якої описує рівняння [18]

Контактна особа: О. П. КОЗАЧОК, e-mail: OlegKozachok@ukr.net

$$V_2 \exp(P_2 / B) = V_0, \quad (1)$$

де P_2 – тиск рідини; B – модуль її об'ємної пружності; V_2 – об'єм рідини, що припадає на одиницю довжини просвіту в поздовжньому напрямку, перпендикулярному до площини на рис. 1; V_0 – об'єм рідини в одній виїмці в початковому стані за відсутності тиску, рівний об'єму виїмки. Під навантаженням змінюватимуться висота просвітів та тиск рідини P_2 .

Контактно-крайові умови сформульованої задачі мають вигляд

– уздовж просвітів $|x - kd| < a$, ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$):

$$\tau_{xy} = 0, \quad \sigma_{yy} = -P_2;$$

– на ділянках контакту $a \leq |x - kd| \leq d/2$, ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$):

$$\tau_{xy} = 0, \quad v = 0;$$

– на нескінченності ($y \rightarrow \pm\infty$):

$$\sigma_{yy} = -P^\infty, \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \tau_{xy} = 0.$$

Тут і далі σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} – компоненти тензора напружень; v – складова вектора переміщення уздовж осі Oy .

Розв'язання задачі. Використовуючи метод функцій міжконтактних просвітів [4], розв'язок сформульованої задачі подамо через заздалегідь невідому їх висоту $h(x)$, для визначення якої отримаємо [14] сингулярне інтегральне рівняння (СІР) з ядром Гільберта:

$$\frac{2}{d} \int_{-a}^a h'(t) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(t-x)}{d} \right) dt = K(P^\infty - P_2), \quad (2)$$

де $K = 2(1-\nu)/G$; $G = E/[2(1+\nu)]$; $\kappa = 3-4\nu$; G , E , ν – відповідно модуль зсуву, модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона пружного тіла.

У крайніх точках просвітів повинні виконуватися умови рівності їх висоти висоті виїмок $h(-a) = A$, $h(a) = A$, які в еквівалентному вигляді запишемо так:

$$\int_{-a}^a h'(t) dt = 0, \quad h(-a) = A. \quad (3)$$

Замінивши змінні $\xi = \operatorname{tg}(\pi x/d)$, $\eta = \operatorname{tg}(\pi t/d)$, $\alpha = \operatorname{tg}(\pi a/d)$, СІР (2) трансформуємо у СІР з ядром Коші:

$$2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = \frac{d}{1 + \xi^2} K(P^\infty - P_2), \quad |\xi| \leq \alpha. \quad (4)$$

Через наявність на межі основи кутових точок шукатимемо необмежений у точках $\xi = \pm\alpha$ розв'язок [19] рівняння (4), який, враховуючи першу умову з (3), запишемо у вигляді

$$h'(\xi) = \frac{Kd(P^\infty - P_2)}{2\pi} \frac{\xi \sqrt{\alpha^2 + 1}}{(1 + \xi^2) \sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}, \quad |\xi| \leq \alpha. \quad (5)$$

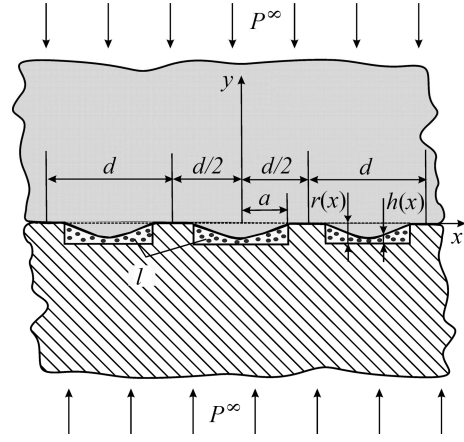


Рис. 1. Схема контакту:
 l – рідина.

Fig. 1. Scheme of the contact:
 l – liquid.

Проінтегрувавши функцію (5) з використанням другої умови з (3), отримаємо:

$$h(\xi) = -\frac{Kd(P^\infty - P_2)}{2\pi} \operatorname{arcth} \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \right) + A, \quad |\xi| \leq \alpha. \quad (6)$$

Рівняння стану стисливої баротропної рідини (1) після заміни змінних матиме вигляд

$$\exp(P_2/B) \frac{ld}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h(\xi)}{1+\xi^2} d\xi = V_0, \quad (7)$$

де $l = 1$ м. Підставляючи вираз (6) у співвідношення (7), дістанемо рівняння для визначення тиску рідини P_2 у просвітах

$$(-Kd(P^\infty - P_2) \ln(\alpha^2 + 1)/4 + 2A \operatorname{arctg}(\alpha)) \exp(P_2/B) = 2A \operatorname{arctg}(\alpha), \quad (8)$$

яке розв'язуємо числово методом поділу відрізка пополам з точністю $\varepsilon = 10^{-8}$.

Зумовлене поодинокую виїмкою збурення переміщень v у півплощині прямує до нуля на нескінченності. Проте за інтегрального впливу періодичної системи виїмок на великих відстанях від поверхні контакту (якщо $y \rightarrow \infty$) у напрямі дії прикладених зусиль P^∞ виникає додаткове зближення матеріалів тіл [7]

$$\Delta v^\infty = \frac{1}{\pi} \left[-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{r(\xi)}{1+\xi^2} d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi)}{1+\xi^2} d\xi \right], \quad (9)$$

яке у нових змінних матиме вигляд

$$\Delta v^\infty = \frac{Kd(P^\infty - P_2)}{4\pi} \ln(\alpha^2 + 1). \quad (10)$$

Контактну податливість тіл знаходимо зі співвідношення $k^* = d(\Delta v^\infty)/d(P^\infty)$ [8], використовуючи формули числового диференціювання.

Контактний тиск поверхонь тіл $P(x) = -\sigma_{yy}(x, 0)$ визначає формула

$$P(x) = \frac{\left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi x}{d} \right) \right| \sqrt{\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi a}{d} \right) + 1}}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi x}{d} \right) - \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi a}{d} \right)}} (P^\infty - P_2) + P_2, \quad a \leq |x - kd| \leq d/2. \quad (11)$$

Проаналізуємо граничний перехід до нестисливої рідини. Для цього необхідно у виразах (8), (11) спрямувати модуль об'ємної пружності рідини B до нескінченності ($B \rightarrow \infty$). Тоді тиск нестисливої рідини рівний прикладеному навантаженню на безмежності ($P_2 = P^\infty$), а контактний тиск поверхонь тіл поза просвітами є сталий і дорівнює тиску рідини ($P(x) = P_2$).

Числові результати. Розраховували для безрозмірних величин: координати $\tilde{x} = x/d$; висоти міжконтактного просвіту $\tilde{h}(\tilde{x}) = h(x)/d$; форми поверхні пружного тіла, яка просіла над виїмкою $\tilde{h}^*(\tilde{x}) = \tilde{r}(\tilde{x}) + \tilde{h}(\tilde{x})$; півширини просвіту $\tilde{a} = a/d$; модуля об'ємної пружності рідини $\tilde{B} = KB$; тиску на нескінченності $\tilde{P}^\infty = KP^\infty$; тиску рідини $\tilde{P}_2 = KP_2$; висоти виїмки $\tilde{A} = A/d$; контактного тиску поверхонь тіл $\tilde{P}(\tilde{x})$; контактного зближення тіл $\Delta \tilde{v}^\infty = \Delta v^\infty/d$; контактної податливості тіл $\tilde{k}^* = d(\Delta \tilde{v}^\infty)/d\tilde{P}^\infty$. Числово аналізували для висоти виїмок $\tilde{A} = 0,001$.

Розглядали діапазон зміни зовнішнього навантаження $0 < \tilde{P}^\infty < \tilde{P}_N^\infty$, де

$$\tilde{P}_N^\infty = \tilde{B} \ln \left[2\tilde{A} \operatorname{arctg}(\alpha) \left[\frac{\tilde{A} \pi \ln(\alpha^2 + 1)}{\ln \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 + 1} + \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 1} - \alpha} \right)} + 2\tilde{A} \operatorname{arctg}(\alpha) \right]^{-1} \right] + \frac{4\pi\tilde{A}}{\ln \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 + 1} + \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 1} - \alpha} \right)}$$

навантаження, за якого починається контакт поверхонь тіл у центрі просвітів (тобто $h(x) = 0$ при $x = kd$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

З ростом навантаження \tilde{P}^∞ та модуля об'ємної пружності рідини \tilde{B} тиск збільшується (рис. 2a): що більша ширина виїмок, то він вищий.

Зі збільшенням зовнішнього навантаження контактне зближення $\Delta\tilde{v}^\infty$ (рис. 2b) тіл зростає, а їх контактна податливість \tilde{k}^* (рис. 2c), навпаки, зменшується: що менший модуль об'ємної пружності рідини \tilde{B} чи більша ширина виїмок, то більші контактні зближення та податливість тіл. Наприклад, за навантаження $\tilde{P}^\infty = 2,1 \cdot 10^{-2}$ з ростом значення \tilde{B} у п'ять разів (від 0,01 до 0,05) контактне зближення тіл зменшується у 2,5 рази.

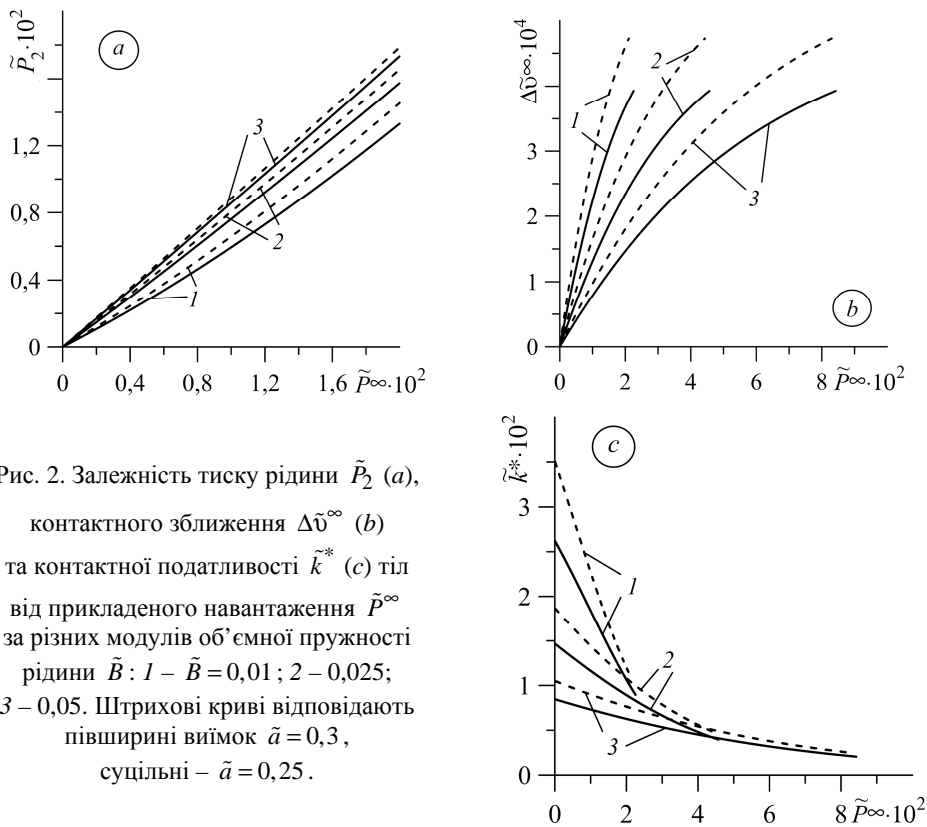


Рис. 2. Залежність тиску рідини \tilde{P}_2 (a), контактної податливості \tilde{k}^* (c) тіл від прикладеного навантаження \tilde{P}^∞ за різних модулів об'ємної пружності рідини \tilde{B} : 1 – $\tilde{B} = 0,01$; 2 – $0,025$; 3 – $0,05$. Штрихові криві відповідають півширині виїмок $\tilde{a} = 0,3$, суцільні – $\tilde{a} = 0,25$.

Fig. 2. Dependence of the liquid pressure \tilde{P}_2 (a), average normal displacement $\Delta\tilde{v}^\infty$ (b) and contact compliance \tilde{k}^* (c) of the bodies on the load \tilde{P}^∞ for different liquid bulk moduli \tilde{B} : 1 – $\tilde{B} = 0.01$; 2 – 0.025 ; 3 – 0.05 . Dashed curves correspond to the grooves half-width $\tilde{a} = 0.3$, solid curves – $\tilde{a} = 0.25$.

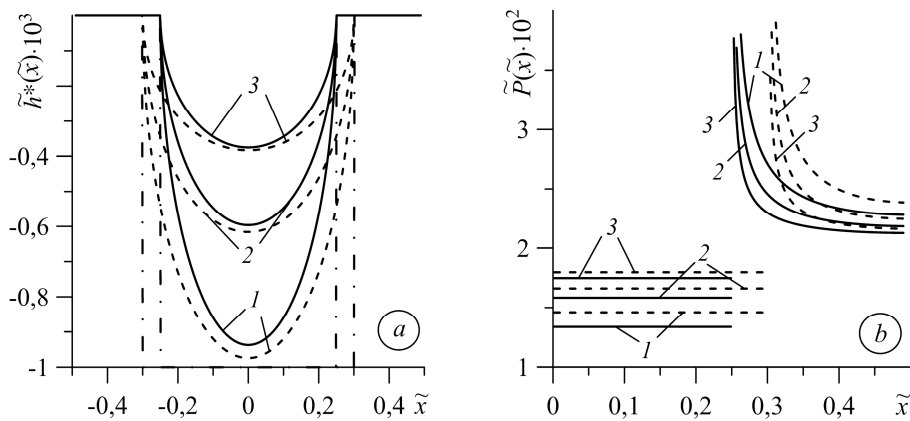


Рис. 3. Форма поверхні, яка просіла $\tilde{h}^*(\tilde{x})$ (a), та контактний тиск поверхонь тіл $\tilde{P}(\tilde{x})$ (b) за зовнішнього навантаження $\tilde{P}^\infty = 0,02$ та різних модулів об'ємної пружності рідини \tilde{B} : 1 – $\tilde{B} = 0,01$; 2 – $0,025$; 3 – $0,05$. Штрихові криві – півширина виїмок $\tilde{a} = 0,3$, суцільні – $\tilde{a} = 0,25$; штрихпунктирні описують форму виїмок $\tilde{r}(\tilde{x})$.

Fig. 3. Shape of the subsided surface $\tilde{h}^*(\tilde{x})$ (a) and contact pressure of the bodies surfaces $\tilde{P}(\tilde{x})$ (b) for the external load $\tilde{P}^\infty = 0.02$ and different liquid bulk moduli \tilde{B} : 1 – $\tilde{B} = 0.01$; 2 – 0.025 ; 3 – 0.05 . Dashed curves correspond to the grooves half-width $\tilde{a} = 0.3$, solid curves – $\tilde{a} = 0.25$. Dashed-dotted curves describe the grooves shape $\tilde{r}(\tilde{x})$.

З ростом модуля \tilde{B} висота просвіту $\tilde{h}(\tilde{x})$ зменшується (рис. 3a), тиск рідини у просвіті підвищується, а контактний тиск тіл поза ним спадає (рис. 3b). Контактний тиск поверхонь тіл ззовні виїмки прямує до нескінченності на її краях, а з віддаленням від неї монотонно спадає, набуваючи локального мінімуму в точках $\pm 0,5$, що ділять навпіл ділянки між виїмками: що більша ширина виїмок, то відчутніший контактний тиск поза просвітом.

ВИСНОВКИ

Досліджено контакт пружного тіла та жорсткої основи, межа якої має періодичну систему виїмок прямокутної форми, за наявності в міжконтактних просвітах стисливої рідини. Сформульовану контактну задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння з ядром Гільберта для похідної від висоти міжконтактних просвітів та трансцендентного рівняння для тиску рідини, яке отримано з рівняння стану стисливої баротропної рідини. Вивчено залежності тиску рідини, висоти просвітів, контактних тиску, зближення та податливості тіл від прикладеного навантаження, ширини виїмок та модуля об'ємної пружності рідини. Встановлено, що зі збільшенням модуля об'ємної пружності рідини контактні зближення і податливість тіл зменшуються, а з його падінням висота просвітів та тиск рідини зменшуються: що більша ширина виїмок, то більший контактний тиск поза просвітом.

РЕЗЮМЕ. Исследован безфрикционный контакт упругого тела и жесткого основания с периодически расположенными выемками прямоугольной формы при наличии сжимаемой жидкости в межповерхностных зазорах. Сформулированная задача сведена к сингулярному интегральному уравнению (СИУ) с ядром Гильберта для производной от высоты межповерхностных зазоров, трансформированному в СИУ с ядром Коши, которое решено аналитически, и трансцендентному уравнению для давления жидкости, полученному из уравнения состояния сжимаемой баротропной жидкости. Проанализированы зависимости давления жидкости, формы зазоров, контактных сближения и податливости тел от приложенной нагрузки и модуля объемной упругости жидкости.

SUMMARY. The frictionless contact between an elastic body and a rigid base with periodic array of rectangular grooves in the presence of a compressible liquid in the interface gaps is investigated. The formulated contact problem is reduced to a singular integral equation (SIE) with Hilbert kernel for a derivative of a height of the interface gaps, which is transformed to a SIE with Cauchy kernel that is solved analytically, and a transcendental equation for liquid pressure, which is obtained from the equation of compressible barotropic liquid state. The dependences of the pressure of the liquid, shape of the gaps, average normal displacement and contact compliance of the bodies on the applied load and bulk modulus of the liquid are analyzed.

1. *Etsion I.* State of the art in laser surface texturing // ASME J. Tribol. – 2005. – **127**, № 1. – P. 248–253.
2. *Stepien P.* Deterministic and stochastic components of regular surface texture generated by a special grinding process // Wear. – 2011. – **271**, № 3–4. – P. 514–518.
3. *Kit G. S., Martynyak R. M., and Machishin I. M.* The effect of a fluid in the contact gap on the stress state of conjugate bodies // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, № 3. – P. 292–299.
4. *Martynyak R. M.* The contact of a half-space and an uneven base in the presence of an inter-contact gap filled by an ideal gas // J. Math. Sci. – 2001. – **107**, № 1. – P. 3680–3685.
5. *Block J. M. and Keer L. M.* Periodic contact problems in plane elasticity // J. Mech. Mater. Struct. – 2008. – **3**, № 7. – P. 1207–1237.
6. *Goryacheva I. G. and Martynyak R. M.* Contact problems for textured surfaces involving frictional effects // Proc. Inst. Mech. Eng., Part J: J. Eng. Tribol. – 2014. – **228**, № 7. – P. 707–716.
7. *Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.* Взаємодія двох пружних тіл за наявності між ними періодично розташованих зазорів, заповнених реальним газом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58**, № 1. – С. 103–111.
(*Kozachok O. P., Slobodyan B. S., Martynyak R. M.* Interaction of two elastic bodies in the presence of periodically located gaps filled with a real gas // J. Math. Sci. – 2017. – **222**, № 2. – P. 131–142.)
8. *Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.* Взаимодействие упругих тел с периодическим рельефом при наличии жидкостных мостиков в межконтактных зазорах // Теорет. и прикл. механика. – 2013. – Вып. 7 (53). – С. 45–52.
9. *Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.* Контакт пружних тіл за наявності газу та незмочувальної рідини у періодичних міжповерхневих просвітах // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2015. – **51**, № 6. – С. 50–57.
(*Kozachok O. P., Slobodyan B. S., Martynyak R. M.* Contact of elastic bodies in the presence of gas and incompressible liquid in periodic interface gaps // Materials Science. – 2016. – **51**, № 6. – P. 804–813.)
10. *Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.* Вплив міжповерхневих рідинних містків на контактну взаємодію тіл з хвилястим рельєфом // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2016. – Вып. 24. – С. 34–46.
11. *Кузнецов Е. А.* О контакте шероховатых тел при наличии сжимаемой смазки // Прикл. механика. – 1988. – **24**, № 12. – С. 85–94.
12. *Козачок О. П.* Контактна взаємодія тіл з хвилястим рельєфом з урахуванням стисливої міжконтактною рідини // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2017. – Вып. 26. – С. 45–54.
13. *Kozachok O. P. and Martynyak R. M.* Contact problem for wavy surfaces in the presence of an incompressible liquid and a gas in interface gaps // Mathematics and Mechanics of Solids. – DOI: 10.1177/1081286518781679.
14. *Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.* Вплив міжповерхневих рідинних містків на контакт пружного тіла і жорсткої основи з періодичною системою прямокутних виїмок // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2015. – Вып. 22. – С. 67–76.
15. *Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.* Контакт пружного тіла і жорсткої основи з періодичною системою квазіеліптичних виїмок, частково заповнених рідиною, яка змочує поверхні тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60**, № 1. – С. 132–140.
16. *Datsyshyn O. P. and Panasyuk V. V.* Pitting of the rolling bodies contact surface // Wear. – 2001. – **251**, № 1–2. – P. 1347–1355.
17. *Дацишин О. П., Левус А. Б.* Ріст крайової тріщини під тиском рідини в околі її вершини // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – **39**, № 5. – С. 120–122.
(*Datsyshyn O. P., Levus A. B.* Propagation of an edge crack under the pressure of liquid in the vicinity of the crack tip // Materials Science. – 2003. – **39**, № 5. – P. 754–757.)
18. *Савельев И. В.* Курс общей физики. – М.: Наука, 1966. – 404 с.
19. *Мухелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 514 с.

Одержано 24.04.2017