

УДК 539.3

## ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ У ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ

Р. М. КУШНІР<sup>1</sup>, У. В. ЖИДИК<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України, Львів;

<sup>2</sup> Національний університет "Львівська політехніка"

Для функціонально-градієнтних ізотропних кругових циліндричних оболонок записано нестационарні рівняння теплопровідності та рівняння термопружності з відповідними крайовими умовами. Рівняння термопружності враховують деформацію поперечного зсуву та поперечну нормальну деформацію. Розподіл температури за товщиною прийнято лінійним. За матеріал оболонки взято композит метал-кераміка. Об'ємна частка цих матеріалів змінюється у напрямку товщини за степеневим законом. Розв'язок квазістатичної задачі для скінченної шарнірно опертої оболонки за локального нагріву знайдено методами перетворень Фур'є та Лапласа.

**Ключові слова:** термопружність, циліндрична оболонка, функціонально-градієнтний матеріал, температурне навантаження.

Оболонки і пластинки є важливими елементами сучасних конструкцій. Для їх виготовлення широко використовують композитні матеріали шаруватої структури [1, 2]. Проте різка зміна властивостей за переходу від одного шару до іншого викликає міжшарові деформації і напруження, які можуть спричинити розшарування і руйнування в зоні контакту. Одним із способів подолання цього небажаного ефекту є використання функціонально-градієнтних (ФГ) матеріалів, у яких об'ємна частка складових матеріалів змінюється поступово, зазвичай лише у напрямку товщини [3]. Ці матеріали проєктують так, щоб вони мали бажані властивості в конкретних умовах, особливо за підвищених температур. Тому розроблення відповідних моделей та методів розрахунку конструкцій із цих матеріалів є важливою інженерною задачею.

Дослідженню пластин і оболонок із функціонально-градієнтних матеріалів в останні роки приділяють значну увагу [3, 4]. Здатність ФГ матеріалів витримувати екстремальні температурні навантаження та вибір оптимального складу цих матеріалів для зменшення температурних напружень і підвищення термостійкості проаналізовано в праці [3]. Побудовані також точні розв'язки задач термопружності для ФГ оболонок на основі тривимірних рівнянь [5–8]. Отримані аналітичні розв'язки на основі рівнянь класичної та уточнених теорій оболонок з ФГ матеріалів за дії температурних і механічних навантажень [9, 10]. Використано [11, 12] метод скінченних елементів для аналізу нестационарних процесів у термопружних ФГ оболонках. Досліджували також температурну тривкість неоднорідних оболонок [13]. Детальніший огляд різних теорій моделювання і дослідження ФГ оболонок і пластин наведено в праці [14].

Мета роботи – на основі рівнянь термопружності та теплопровідності уточненої теорії неоднорідних оболонок [15] дослідити термопружний стан кругової циліндричної оболонки з функціонально-градієнтного матеріалу за умови її локального нагріву через конвективний теплообмін.

---

Контактна особа: У. В. ЖИДИК, e-mail: flyachok@ukr.net

**Формулювання задачі і основні рівняння.** Розглянемо неоднорідну ізотропну кругову циліндричну оболонку сталюї товщини  $2h$  і скінченної довжини  $l$ . Точки оболонки належать до циліндричної системи координат  $x, \theta, z$ , які позначають відповідно осьову, колову та радіальну координати. Початок координат помістимо у середній поверхні, радіус якої дорівнює  $R$ . Надалі цим координатам відповідатимуть індекси 1, 2, 3, а кома перед індексами 1, 2 позначатиме частинні похідні за координатами  $x$  і  $\theta$  відповідно.

Нехай на оболонку діють зовнішні сили, а також вона нагрівається шляхом конвективного теплообміну. Для дослідження термопружного стану такої оболонки використаємо математичну модель, яка базується на припущеннях про лінійну залежність вектора переміщень і температури від поперечної координати [1, 15]. В загальному випадку ця модель складається з взаємозв'язаних систем рівнянь термопружності і рівнянь теплопровідності. Якщо знехтувати впливом деформації на зміну температурного поля, то ці системи будуть незалежними.

*Система рівнянь термопружності.* Кінематичні співвідношення для компонентів деформації довільної точки оболонки  $e_{ij}$

$$\begin{aligned} e_{11} &= \varepsilon_{11} + z\kappa_{11}, & e_{22} &= (\varepsilon_{22} + z\kappa_{22})/(1+z/R), & e_{33} &= \varepsilon_{33}, & e_{13} &= \varepsilon_{13} + z\kappa_{13}, \\ e_{12} &= (\varepsilon_{12} + z\kappa_{12} + z^2\omega_{12})/(1+z/R), & e_{23} &= (\varepsilon_{23} + z\kappa_{23})/(1+z/R), \end{aligned} \quad (1)$$

де компоненти деформації середньої поверхні  $\varepsilon_{ij}, \kappa_{ij}, \omega_{12}$  через узагальнені переміщення  $u_i, \gamma_i$  виражають формулами

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= u_{1,1}, & \varepsilon_{22} &= (u_3 + u_{2,2})/R, & \varepsilon_{33} &= \gamma_3, & \varepsilon_{12} &= u_{1,2}/R + u_{2,1}, \\ \varepsilon_{13} &= \gamma_1 + u_{3,1}, & \varepsilon_{23} &= \gamma_2 + (u_{3,2} - u_2)/R, & \omega_{12} &= \gamma_{2,1}/R, \\ \kappa_{11} &= \gamma_{1,1}, & \kappa_{22} &= (\gamma_3 + \gamma_{2,2})/R, \\ \kappa_{13} &= \gamma_{3,1}, & \kappa_{12} &= \gamma_{2,1} + \gamma_{1,2}/R + u_{2,1}/R, & \kappa_{23} &= \gamma_{3,2}/R. \end{aligned} \quad (2)$$

Фізичні рівняння для напружень і деформацій такі:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( (1-\nu)e_{11} + \nu(e_{22} + e_{33}) \right) - \frac{E(z)\alpha^t(z)}{1-2\nu} t, \\ \sigma_{22} &= \frac{E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( (1-\nu)e_{22} + \nu(e_{11} + e_{33}) \right) - \frac{E(z)\alpha^t(z)}{1-2\nu} t, \\ \sigma_{33} &= \frac{E(z)}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left( (1-\nu)e_{33} + \nu(e_{11} + e_{22}) \right) - \frac{E(z)\alpha^t(z)}{1-2\nu} t, \\ \sigma_{12} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} e_{12}, & \sigma_{13} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} e_{13}, & \sigma_{23} &= \frac{E(z)}{2(1+\nu)} e_{23}, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона, який вважаємо сталим;  $E(z)$  і  $\alpha^t(z)$  – модуль пружності і коефіцієнт теплового лінійного розширення, які залежать від координати  $z$ ;  $t(x, \theta, z, \tau)$  – температурне поле.

Фізичні рівняння для внутрішніх зусиль і моментів  $N_{ij}, M_{ij}$  одержимо зі співвідношень (3) шляхом інтегрування за товщиною [1, 15].

Рівняння рівноваги такі:

$$\begin{aligned} N_{11,1} + N_{21,2}/R &= -q_1, & N_{12,1} + N_{22,2}/R + N_{23}/R &= -q_2, \\ N_{13,1} + N_{23,2}/R - N_{22}/R &= -q_3, & M_{11,1} + M_{21,2}/R - N_{13} &= -m_1, \\ M_{12,1} + M_{22,2}/R - N_{23} &= -m_2, & M_{13,1} + M_{23,2}/R - M_{22}/R - N_{33} &= -m_3, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $q_i, m_i$  – компоненти поверхневого навантаження [15].

Використовуючи наведені співвідношення, систему рівняння рівноваги (4) запишемо в узагальнених переміщеннях

$$\sum_k^6 L_{rk} y_k = b_r \quad (r, k = 1, 2, \dots, 6), \quad (5)$$

де  $y_i = u_i; y_{3+i} = \gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Диференціальні оператори  $L_{rk}$  ( $L_{rk} = L_{kr}$ ) і вільні члени  $b_r$  мають вигляд

$$\begin{aligned} L_{11} &= A_{11} \partial_{11}^2 + A_{66}/R^2 \partial_{22}^2, & L_{12} &= (A_{12} + A_{66})/R \partial_{12}^2, & L_{13} &= A_{12}/R \partial_1, \\ L_{14} &= B_{11} \partial_{11}^2 + B_{66}/R^2 \partial_{22}^2, & L_{15} &= (B_{12} + B_{66})/R \partial_{12}^2, \\ L_{16} &= (A_{13} + B_{12}/R) \partial_1, & L_{22} &= A_{66} \partial_{11}^2 + A_{22}/R^2 \partial_{22}^2 - k' A_{55}/R^2, \\ L_{23} &= (A_{22} + k' A_{55})/R^2 \partial_2, & L_{24} &= (B_{12} + B_{66})/R \partial_{12}^2, \\ L_{25} &= B_{66} \partial_{11}^2 + B_{22}/R^2 \partial_{22}^2 + k' A_{55}/R, & L_{26} &= (A_{23}/R + (B_{22} + k' B_{55})/R^2) \partial_2, \\ L_{33} &= -k' A_{44} \partial_{11}^2 - k' A_{55}/R^2 \partial_{22}^2 + A_{22}/R^2, & L_{34} &= (B_{12}/R - k' A_{44}) \partial_1, \\ L_{35} &= (B_{22}/R - k' A_{55})/R \partial_2, & L_{36} &= -k' B_{44} \partial_{11}^2 + (B_{22} - k' B_{55} \partial_{22}^2)/R^2 + A_{23}/R, \\ L_{44} &= D_{11} \partial_{11}^2 + D_{66}/R^2 \partial_{22}^2 - k' A_{44}, & L_{45} &= (D_{12} + D_{66})/R \partial_{12}^2, \\ L_{46} &= (D_{12}/R + B_{13} - k' B_{44}) \partial_1, & L_{55} &= D_{66} \partial_{11}^2 + D_{22}/R^2 \partial_{22}^2 - k' A_{55}, \\ L_{56} &= ((B_{23} - k' B_{55})/R + D_{22}/R^2) \partial_2, \\ L_{66} &= A_{33} + 2B_{23}/R + D_{22}/R^2 - k' D_{44} \partial_{11}^2 - k' D_{55}/R^2 \partial_{22}^2, \\ b_1 &= A_{11}^t \partial_1 T_1 + B_{11}^t/h \partial_1 T_2 - q_1, & b_2 &= A_{22}^t/R \partial_2 T_1 + B_{22}^t/(Rh) \partial_2 T_2 - q_2, \\ b_3 &= A_{22}^t/R T_1 + B_{22}^t/(Rh) T_2 + q_3, & b_4 &= B_{11}^t \partial_1 T_1 + D_{11}^t/h \partial_1 T_2 - m_1, \\ b_5 &= B_{22}/R \partial_2 T_1 + D_{22}^t/(Rh) \partial_2 T_2 - m_2, \\ b_6 &= (A_{33}^t + B_{22}^t/R) T_1 + (D_{22}^t/R + B_{33}^t)/h T_2 + m_3, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \{A_{ii}, B_{ii}, D_{ii}\} &= \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_{-h}^h E(z) \{1, z, z^2\} dz \quad (i=1, 2, 3), \\ \{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\} &= \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \int_{-h}^h E(z) \{1, z, z^2\} dz \quad (i, j=1, 2, 3), \quad (i \neq j), \end{aligned}$$

$$\{A_{ii}^t, B_{ii}^t, D_{ii}^t\} = \frac{1}{1-2\nu} \int_{-h}^h E(z) \alpha^t(z) \{1, z, z^2\} dz \quad (i=1,2,3),$$

$$\{A_{ii}, B_{ii}, D_{ii}\} = \frac{1}{2(1+\nu)} \int_{-h}^h E(z) \{1, z, z^2\} dz \quad (i=4,5,6),$$

$$T_i = \frac{2i-1}{2h^i} \int_{-h}^h t z^{i-1} dz, \quad (i=1,2), \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad k' - \text{коєфіцієнт зсуву [16].}$$

Для однозначності розв'язку системи (5) потрібно задати відповідні крайові умови. На кінцях  $x=0$  і  $x=l$  необхідно задати по одній величині з кожної пари  $\{N_{11}, u_1\}$ ,  $\{N_{12}, u_2\}$ ,  $\{N_{13}, u_3\}$ ,  $\{M_{11}, \gamma_1\}$ ,  $\{M_{12}, \gamma_2\}$ ,  $\{M_{13}, \gamma_3\}$ .

Система рівнянь (5) разом з крайовими умовами складає крайову задачу теорії температурних напружень для неоднорідних ізотропних циліндричних оболонок у переміщеннях. За відомими переміщеннями визначаємо деформації середньої поверхні зі співвідношень (2), а температурні напруження і деформації в довільній точці оболонки знаходимо за формулами (1), (3).

*Система рівнянь теплопровідності.* Інтегральні характеристики температури  $T_1$  і  $T_2$ , які входять у вільні члени системи (5), потрібно визначити з відповідних рівнянь теплопровідності за крайових умов, заданих на поверхнях  $z = \pm h$  та на кінцях оболонки. Для конвективного теплообміну на поверхнях  $z = \pm h$  систему рівнянь теплопровідності за лінійної залежності температури від поперечної координати запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \Delta_{(1)} T_1 - \varepsilon_1^t T_1 + \Delta_{(2)} T_2 + \left( \frac{\lambda^{(1)}}{hR} - \varepsilon_2^t \right) T_2 - C^{(1)} \partial_\tau T_1 - C^{(2)} \partial_\tau T_2 = -f_1, \\ \Delta_{(2)} T_1 - \varepsilon_2^t T_1 + \Delta_{(3)} T_2 + \left( \frac{\lambda^{(2)}}{hR} - \frac{\lambda^{(1)}}{h^2} - \varepsilon_1^t \right) T_2 - C^{(2)} \partial_\tau T_1 - C^{(3)} \partial_\tau T_2 = -f_2, \end{aligned} \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta_{(i)} = \lambda^{(i)} \left( \partial_{11}^2 + \frac{1}{R^2} \partial_{22}^2 \right); \\ \partial_\tau = \frac{\partial}{\partial \tau}; \quad \left\{ \lambda^{(i)}, C^{(i)} \right\} = \int_{-h}^h \left\{ \lambda(z), c_\varepsilon(z) \right\} \left( \frac{z}{h} \right)^{i-1} dz \quad (i=1,2,3), \end{aligned}$$

$$f_j = t_1^z \varepsilon_j^t + t_2^z \varepsilon_{3-j}^t, \quad \varepsilon_j^t = \left( \alpha^+ - (-1)^j \alpha^- \right), \quad t_j^z = \frac{1}{2} \left( t_z^+ - (-1)^j t_z^- \right) \quad (j=1,2),$$

$\lambda(z)$  – коєфіцієнт теплопровідності;  $t_z^+$ ,  $t_z^-$  – температури середовищ на поверхнях  $z=h$  і  $z=-h$ , відповідно;  $\alpha^+$ ,  $\alpha^-$  – коєфіцієнти тепловіддачі з цих поверхонь;  $c_\varepsilon$  – питома теплоємність;  $\tau$  – змінна часу.

Для однозначності розв'язку системи (6) на краях  $x=0$  і  $x=l$  потрібно задати комбінацію величин  $a_0 T_1 + a_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}$ ,  $a_2 T_2 + a_3 \frac{\partial T_2}{\partial x}$ , де  $a_i = \text{const}$ , а в початковий момент – значення температурних характеристик  $T_1$  і  $T_2$ .

**Метод розв'язування.** Нехай замкнена циліндрична оболонка виготовлена з функціонально-градієнтного композита метал–кераміка так, що об'ємна частка кераміки на поверхні  $z = -h$  дорівнює нулю. Тоді для модуля пружності  $E(z)$ , коефіцієнта лінійного теплового розширення  $\alpha^t(z)$  та коефіцієнта теплопровідності  $\lambda(z)$  можна задати такий степеневий закон залежності від координати  $z$  [11]:

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left( \frac{z}{2h} + \frac{1}{2} \right)^k, \quad \alpha^t(z) = \alpha_m^t + (\alpha_c^t - \alpha_m^t) \left( \frac{z}{2h} + \frac{1}{2} \right)^k,$$

$$\lambda(z) = \lambda_m + (\lambda_c - \lambda_m) \left( \frac{z}{2h} + \frac{1}{2} \right)^k,$$

де  $k$  – параметр неоднорідності, який характеризує зміну властивостей вздовж товщини оболонки; індекси  $c$  і  $m$  вказують на належність величин до кераміки чи металу відповідно.

Нехай краї  $x = 0$  і  $x = l$  оболонки шарнірно оперті і на них задана нульова температура. Тоді маємо такі крайові умови:

$$u_3 = u_2 = \gamma_3 = \gamma_2 = 0, \quad N_{11} = M_{11} = 0, \quad (7)$$

$$T_1 = T_2 = 0. \quad (8)$$

Початкові умови для температурних характеристик задамо однорідними:

$$T_1(x, \theta, 0) = 0, \quad T_2(x, \theta, 0) = 0. \quad (9)$$

Нехай оболонка нагрівається шляхом конвективного теплообміну через поверхні  $z = \pm h$ . Тоді функції температурних навантажень, які входять у рівняння теплопровідності (6), запишемо у вигляді

$$f_1(x, \theta, \tau) = \text{Bi}_1 t_1^z + \text{Bi}_2 t_2^z = f_1^z(x, \theta) f_1^t(\tau),$$

$$f_2(x, \theta, \tau) = 3(\text{Bi}_2 t_1^z + \text{Bi}_1 t_2^z) = f_2^z(x, \theta) f_2^t(\tau).$$

*Знаходження температурного поля.* Розв'язок системи рівнянь теплопровідності (6) відповідно до крайових (8) і початкових (9) умов знайдемо методом скінченного подвійного перетворення Фур'є за координатами  $x$ ,  $\theta$  і інтегрального перетворення Лапласа за часом  $\tau$ . Тоді, вважаючи питому теплоємність сталою, для коефіцієнтів Фур'є одержимо вирази

$$T_{1mn} = \sum_{i \neq j}^2 \frac{(p_i - g_4) Q_{1mn} Z_{1i}(\tau') + g_2 Q_{2mn} Z_{2i}(\tau')}{p_i - p_j},$$

$$T_{2mn} = \sum_{i \neq j}^2 \frac{(p_i - g_1) Q_{2mn} Z_{2i}(\tau') + g_3 Q_{1mn} Z_{1i}(\tau')}{p_i - p_j}, \quad (10)$$

де

$$p_i = \frac{g_1 + g_4}{2} + (-1)^i \sqrt{\frac{(g_1 - g_4)^2}{4} + g_2 g_3}, \quad g_1 = \beta_1 (\mu_n^2 + m^2) + \text{Bi}_1 / \delta^2,$$

$$g_2 = \beta_2 (\mu_n^2 + m^2) + \text{Bi}_2 / \delta^2 - \beta_1 / \delta, \quad g_3 = 3 \left( \beta_2 (\mu_n^2 + m^2) + \text{Bi}_2 / \delta^2 \right),$$

$$g_4 = 3 \left( \beta_3 (\mu_n^2 + m^2) + (\beta_1 + \text{Bi}_1) / \delta^2 - \beta_2 / \delta \right),$$

$$\mu_n = \frac{\pi n R}{l}, \quad \text{Bi}_i = \frac{\varepsilon_i^t h}{2\lambda_m}, \quad \tau' = \frac{\lambda_m \tau}{c_\varepsilon R^2}, \quad \delta = \frac{h}{R}, \quad \beta_i = \frac{\lambda^{(i)}}{2h\lambda_m},$$

$$Q_{jmn} = \frac{k_0}{\pi l} \int_0^l \int_{-\pi}^{\pi} f_j^z(x, \theta) \sin \frac{\pi n}{l} x \cos m\theta dx d\theta, \quad k_0 = \begin{cases} 1, & m=0 \\ 2, & m \neq 0 \end{cases},$$

$$Z_{ji}(\tau') = \int_0^{\tau'} f_j^t(v) e^{-\beta_i(\tau'-v)} dv \quad (j, i=1, 2).$$

Температурні характеристики через коефіцієнти Фур'є виражаємо формулами

$$\{T_1, T_2\} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \{T_{1mn}, T_{2mn}\} \sin \frac{\pi n}{l} x \cos m\theta. \quad (11)$$

*Знаходження узагальнених переміщень.* Розв'язок системи рівнянь рівноваги (5), який задовольняє крайові умови (7), за відомого температурного поля (11) знаходимо методом скінченних подвійних перетворень Фур'є за координатами  $x, \theta$ . В результаті одержимо систему алгебричних рівнянь для визначення коефіцієнтів Фур'є шуканих функцій  $y_{imn}$ . Запишемо цю систему у матричному вигляді

$$\mathbf{A}\mathbf{Y} = \mathbf{S}\mathbf{T}_{1mn} + \mathbf{G}\mathbf{T}_{2mn}, \quad (12)$$

де  $\mathbf{A} = (a_{ij})_{6 \times 6}$ ,  $\mathbf{Y} = (y_{imn})_{6 \times 1}$ ,  $\mathbf{S} = (s_i)_{6 \times 1}$ ,  $\mathbf{G} = (g_i)_{6 \times 1}$ , причому  $y_{rnn} = U_{rnn}$  – коефіцієнти Фур'є для переміщень  $u_r$ , а  $y_{3+r, mn} = \Gamma_{rnn}$  – коефіцієнти Фур'є для  $\gamma_r$  ( $r=1, 2, 3$ ). Коефіцієнти матриць  $a_{ij}$ ,  $s_i$  і  $g_i$  обчислюємо з диференціальних операторів системи (5).

Із системи (12) одержимо розв'язок:

$$y_{jmn} = \frac{1}{|A|} \sum_{i=1}^6 (s_i T_{1mn} + g_i T_{2mn}) B_{ij} \quad (j=1, 2, \dots, 6),$$

де  $|A|$  – визначник матриці  $\mathbf{A}$ , а  $B_{ij}$  – алгебричне доповнення до елемента  $a_{ij}$  цієї матриці.

Узагальнені переміщення через коефіцієнти Фур'є виражаємо формулами

$$\begin{aligned} \{u_1, \gamma_1\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \{U_{1mn}, \Gamma_{1mn}\} \cos \frac{\pi n}{l} x \cos m\theta, \\ \{u_2, \gamma_2\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{U_{2mn}, \Gamma_{2mn}\} \sin \frac{\pi n}{l} x \sin m\theta, \\ \{u_3, \gamma_3\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \{U_{3mn}, \Gamma_{3mn}\} \sin \frac{\pi n}{l} x \cos m\theta. \end{aligned} \quad (13)$$

За відомими узагальненими переміщеннями (13) і температурним полем (11) всі інші характеристики напружено-деформованого стану оболонки визначаємо за формулами (1)–(3).

**Аналіз числових результатів.** Числові дослідження виконували для циліндричної оболонки, де зовнішня поверхня  $z = h$  нагрівається на прямокутній ділянці середовищем, температура якого задана функцією

$$t_z^+(x, \theta, \tau) = t^* [S_-(x - x_0 + d) - S_+(x - x_0 - d)] \times \\ \times [S_-(\theta - \theta_0 + \eta) - S_+(\theta - \theta_0 - \eta)] S_+(\tau),$$

де  $t^* = \text{const}$ ;  $x_0$  і  $\theta_0$  – відповідно осьова і колова координати середини ділянки нагріву;  $2d$  – її ширина;  $2\eta$  – кут області нагріву;

$$S_+(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}; \quad S_-(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

На внутрішній поверхні  $z = -h$  оболонки температура середовища дорівнює нулю  $t_z^- = 0$ . Вважаємо, що коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь оболонки рівні між собою  $\alpha^+ = \alpha^- = \alpha_z$ . Поверхневі сили і джерела тепла відсутні.

Оболонка виготовлена із композита метал (Ti-6Al-4V) і кераміка (ZrO<sub>2</sub>) з такими фізико-механічними властивостями [11]:

**метал:**  $\nu = 0,3$ ;  $E_m = 66,2$  GPa;  $\alpha_m^t = 10,3 \cdot 10^{-6}$  1/K;  $\lambda_m = 18,1$  W/mK;

**кераміка:**  $\nu = 0,3$ ;  $E_c = 117$  GPa;  $\alpha_c^t = 7,11 \cdot 10^{-6}$  1/K;  $\lambda_c = 2,036$  W/mK.

Значення інших параметрів такі:  $h/R = 0,05$ ,  $l/R = 3$ ,  $d/l = 0,25$ ,  $\eta = \pi/2$ ,  $x_0 = l/2$ ,  $\theta_0 = 0$ ,  $k' = 5/6$ ,  $\tau' = 10$ ,  $Bi = \alpha_z h / \lambda_m = 1$ .

Обчислено безрозмірні температуру  $t' = \frac{t}{t^*}$  і напруження  $\sigma'_i = \frac{\sigma_{ii}}{E_m \alpha_m^t t^*}$  для

таких значень параметра неоднорідності:  $k = 0$ ; 0,5; 1; 5 і  $k = \infty$ . Очевидно, зі зменшенням параметра  $k$  частка кераміки в напрямку товщини збільшується і оболонка стає жорсткішою, оскільки модуль пружності кераміки більший, ніж металу. Зі збільшенням параметра  $k$  зростає частка металу. Значення  $k = 0$  відповідає однорідній оболонці, виготовленій з кераміки, а  $k = \infty$  – однорідній оболонці з металу.

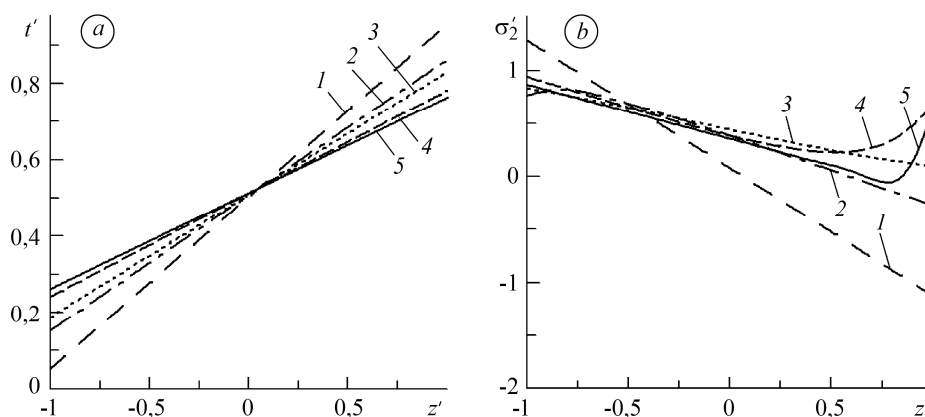


Рис. 1. Залежність безрозмірних температури  $t'$  (a) та колового напруження  $\sigma'_2$  (b) від радіальної координати  $z'$ : 1 –  $k = 0$ ; 2 – 0,5; 3 – 1; 4 – 5; 5 –  $k = \infty$ .

Fig. 1. Dependence of dimensionless temperature  $t'$  (a) and of dimensionless hoop stress  $\sigma'_2$  (b) on the radial coordinate  $z'$ : 1 –  $k = 0$ ; 2 – 0,5; 3 – 1; 4 – 5; 5 –  $k = \infty$ .

Зміну температури  $t'$  і колового напруження  $\sigma'_2$ , обчислених в центрі області нагріву  $(l/2, 0)$  вздовж поперечної координати  $z' = z/h$ , показано на рис. 1,

а залежність  $\sigma'_2$  від безрозмірного коефіцієнта тепловіддачі (критерія  $Bi$ ) на поверхні  $z'=1$  – на рис. 2. Із рисунків видно, що зі збільшенням частки кераміки стискувальні напруження і температура на поверхні нагріву зростають, оскільки для кераміки модуль пружності більший, а коефіцієнт теплопровідності менший, ніж для металу.

Рис. 2. Залежність безрозмірного колового напруження  $\sigma'_2$  від безрозмірного коефіцієнта тепловіддачі  $Bi$ : 1 –  $k=0$ ; 2 – 0,5; 3 – 1; 4 – 5; 5 –  $k=\infty$ .

Fig. 2. Dependence of dimensionless hoop stress  $\sigma'_2$  on the dimensionless coefficient of heat transfer  $Bi$ : 1 –  $k=0$ ; 2 – 0,5; 3 – 1; 4 – 5; 5 –  $k=\infty$ .

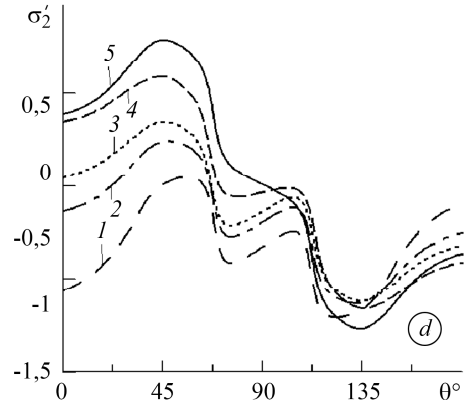
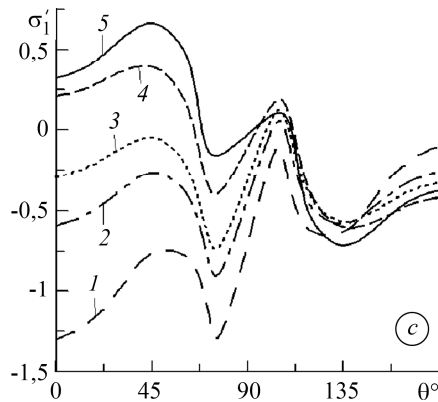
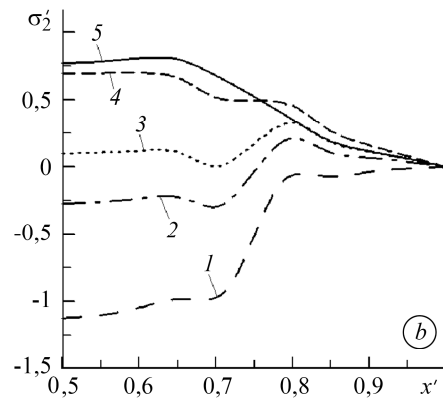
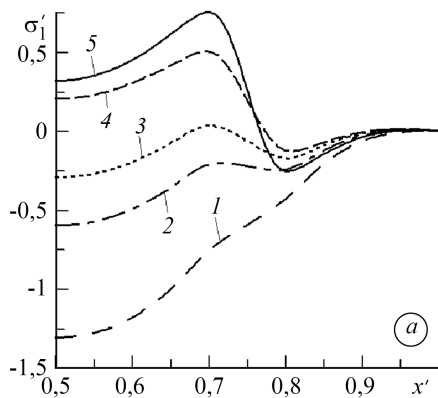
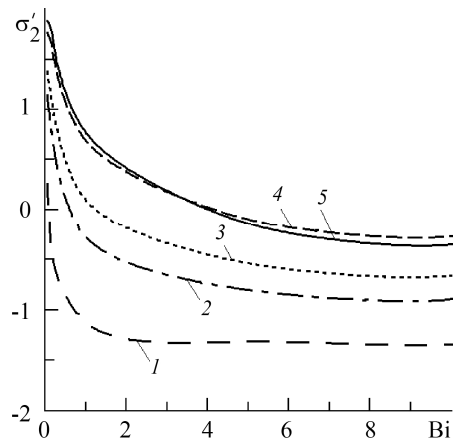


Рис. 3. Залежність безрозмірних осьового  $\sigma'_1$  та колового  $\sigma'_2$  напружень від осьової  $x'$  (a, b) та колової  $\theta^\circ$  (c, d) координат: 1 –  $k=0$ ; 2 – 0,5; 3 – 1; 4 – 5; 5 –  $k=\infty$ .

Fig. 3. Dependence of dimensionless axial stress  $\sigma'_1$  and hoop stress  $\sigma'_2$  on the axial coordinate  $x'$  (a, b) and on the circular coordinate  $\theta^\circ$  (c, d): 1 –  $k=0$ ; 2 – 0,5; 3 – 1; 4 – 5; 5 –  $k=\infty$ .



Зміну осьового  $\sigma'_1$  і колового  $\sigma'_2$  напружень, обчислених на поверхні  $z' = 1$  вздовж твірної  $\theta = 0$  від середини до кінця оболонки ( $0,5 \leq x' = x/l \leq 1$ ), показано на рис. 3а і б, а зміну цих же величин вздовж напрямної  $x' = 0,5$  від середини нагрітої області до середини ненагрітої ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) – на рис. 3с і д. Як бачимо, для оболонок, в яких переважає частка кераміки, максимальні напруження вздовж твірної стискувальні, а для оболонок, де переважає частка металу – розтягувальні. Ці напруження досягаються в межах нагрітої області. Вздовж напрямної нормальні і колові напруження мають коливний характер і максимальні від'ємні значення досягаються в ненагрітій області.

### ВИСНОВКИ

На основі уточненої теорії термопружності неоднорідних оболонок з шістьма степенями свободи досліджували напружено-деформований стан кругової ізотропної циліндричної оболонки за локального нагріву шляхом конвективного теплообміну. Фізико-механічні властивості матеріалу є довільними функціями поперечної координати. Методами перетворень Фур'є і Лапласа побудовано замкнений аналітичний розв'язок квазістатичної задачі температурних напружень для скінченної шарнірно опертої на кінцях оболонки. Числовий аналіз виконано для композита метал–кераміка, властивості якого змінюються в радіальному напрямку за степеневим законом від чистої кераміки на зовнішній поверхні оболонки до чистого металу на внутрішній поверхні. Числові розв'язки подано у вигляді графіків. Досліджено вплив параметра неоднорідності та коефіцієнта тепловіддачі на напружено-деформований стан оболонки.

*РЕЗЮМЕ.* Для функционально-градиентных изотропных круговых цилиндрических оболочек записаны нестационарные уравнения теплопроводности и уравнения термоупругости с соответствующими краевыми условиями. Уравнения термоупругости учитывают деформацию поперечного сдвига и поперечную нормальную деформацию. Распределение температуры по толщине принято линейным. Материал оболочки представляет собой композит металл–керамика. Объемная доля этих материалов изменяется в направлении толщины по степенному закону. Решение квазистатической задачи для конечной шарнирно опертой оболочки при локальном нагреве найдено методами преобразований Фурье и Лапласа.

*SUMMARY.* For a functionally graded isotropic circular cylindrical shells the nonstationary equations heat conduction and equations thermoelasticity with appropriate boundary conditions are written down. The thermoelasticity equations includes both transverse shear deformation and transverse normal strain for shell thickness. Temperature distribution across the shell thickness assumed is linear. The shell is graded through the thickness assuming a volume fraction of metal and ceramic, using a power law distribution. By the Fourier and Laplace transform methods the solution to quasistatic thermoelastic problem for finite simply supported shell under local heating is obtained.

1. Жидик У. В. Дослідження температурних напружень в ортогонально армованих шаруватих анізотропних циліндричних оболонках // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2006. – Вип. 4. – С. 139–145.
2. Ootao Y., Tanigawa Y., and Miyatake K. Transient thermal stresses of cross-ply laminated cylindrical shell using a higher-order shear deformation theory // J. Thermal Stresses. – 2010. – 33, №1. – P. 55–74.
3. Noda N. Thermal stresses in functionally graded materials // J. Thermal Stresses. – 1999. – 22, № 4–5. – P. 477–512.
4. Кушнір Р. М., Николишин Т. М., Ростун М. Й. Гранична рівновага неоднорідної за товщиною сферичної оболонки з поверхневою тріщиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – 43, № 3. – С. 5–11.

- (Kushnir R. M., Nykolyshyn T. M., and Rostun M. I. Limiting equilibrium of a spherical shell nonuniform across the thickness and containing a surface crack // *Materials Science*. – 2007. – **43**, № 3. – P. 291–299).
5. Ayoubi P. and Alibeigloo A. Three-dimensional transient analysis of FGM cylindrical shell subjected to thermal and mechanical loading // *J. Thermal Stresses*. – 2017. – **40**, № 9. – P. 1166–1183.
  6. *Transient* response of rotating laminated functionally graded cylindrical shells in thermal environment / P. Malekzadeh, Y. Heydarpour, M. R. Golbahar Haghighi, M. Vaghefi // *Int. J. Pressure Vessels Piping*. – 2012. – **98**. – P. 43–56.
  7. Pelletier J. L. and Vel S. S. An exact solution for the steady-state thermoelastic response of functionally graded orthotropic cylindrical shells // *Int. J. Solid Struct.* – 2006. – **43**, № 5. – P. 1131–1158.
  8. *DQM-based* thermal stresses analysis of a functionally graded cylindrical shell under thermal shock / J. H. Zhang, G. Z. Li, S. R. Li, Y. B. Ma // *J. Thermal Stresses*. – 2015. – **38**, № 9. – P. 959–982.
  9. *Thermo-mechanical* analysis of functionally graded shells / M. Cinefra, E. Carrera, S. Brischetto, S. Belouettar // *J. Thermal Stresses*. – 2010. – **33**, № 10. – P. 942–963.
  10. Punera D., Kant T., Desai Y. M. Thermoelastic analysis of laminated and functionally graded sandwich cylindrical shells with two refined higher order models // *J. Thermal Stresses*. – 2018. – **41**, № 1. – P. 54–79.
  11. Bahtui A. and Eslami M. R. Coupled Thermoelasticity of functionally graded cylindrical shells // *J. of Mechanics Research Communications*. – 2007. – **34**, № 1. – P. 1–18.
  12. Pandey S. and Pradyumna S. Transient stress analysis of sandwich plate and shell panels with functionally graded material core under thermal shock // *J. Thermal Stresses*. – 2018. – **41**, № 5. – P. 543–567.
  13. Mirzavand B. and Eslami M. R. Thermal buckling of supported piezoelectric FGM cylindrical shells // *J. Thermal Stresses*. – 2007. – **30**, № 11. – P. 1117–1135.
  14. Thai H. T. and Kim S. E. A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells // *Compos. Struct.* – 2015. – **128**. – P. 70–86.
  15. *Моделювання* термопружних процесів в неоднорідних анізотропних оболонках з початковими деформаціями / Р. М. Кушнір, М. М. Николишин, У. В. Жидик, В. М. Флячок // *Мат. методи і фіз.-мех. поля*. – 2010. – **53**, № 2. – С. 122–136.
  16. Mirsky I. Vibrations of orthotropic thick cylindrical shells // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1964. – **36**, № 1. – P. 41–51.

Одержано 05.06.2018