

УДК 539.3

ПЛОСКА ПЕРІОДИЧНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ІЗОТРОПНОЇ ПЛОЩИНИ З КРИВОЛІНІЙНИМИ ОТВОРАМИ ТА КРАЙОВИМИ ТРІЩИНАМИ

В. С. КРАВЕЦЬ, М. П. САВРУК

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Методом сингулярних інтегральних рівнянь розв'язано плоску періодичну задачу теорії пружності для ізотропної площини з нескінченним рядом криволінійних отворів, з контурів яких виходять крайові криволінійні тріщини. Методом квадратур інтегральні рівняння зведено до комплексної системи лінійних алгебричних рівнянь. Обчислено коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) у вершинах крайових тріщин, коли площина рівномірно навантажена на нескінченності (розтяг або поперечний зсув). Досліджено вплив на КІН форм та відносних розмірів отворів і тріщин за різних зовнішніх навантажень.

Ключові слова: *плоска періодична задача, криволінійний отвір, крайова тріщина, сингулярні інтегральні рівняння, коефіцієнти інтенсивності напружень.*

Визначенню напружено-деформованого стану (НДС) площини з отвором та крайовими тріщинами присвячено багато досліджень [1–3], які в основному стосуються симетричних областей з отворами канонічної форми та прямолінійними тріщинами. Значно менше побудовано розв'язків задач для періодичних систем отворів з крайовими тріщинами [4–6], де більшість результатів отримано для кругових періодичних отворів та прямолінійних тріщин. Розв'язки відповідних плоских періодичних задач теорії пружності можна використати як для моделювання НДС перфорованих пластин та оболонок з крайовими тріщинами [5], так і для областей із двобічними напівнескінченими вирізами (за граничного переходу до близьких періодичних отворів [7, 8]), з вершин яких виходять тріщини.

Нижче на основі методу сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) та раніше розробленої методики розв'язування двовимірних задач теорії пружності для областей з отворами, що містять крайові тріщини [9, 10], розв'язано задачу теорії пружності для ізотропної площини з періодичною системою криволінійних отворів з крайовими тріщинами у загальній поставі щодо форм отворів та тріщин. Для різних геометричних параметрів отворів і тріщин та способів навантаження площини обчислені коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) у вершинах крайових тріщин, що виходять з періодичних отворів.

Формулювання задачі. Розглянемо ізотропну пружну площину S з нескінченною системою періодично розміщених уздовж осі Ox декартової системи координат xOy періодичних гладких отворів довільної форми з двома крайовими криволінійними тріщинами (узагальнення на довільну кількість тріщин очевидне). Контур отвору в основному періоді подамо як об'єднання розімкнених гладких контурів L_2, L_4 , з'єднаних у точках розгалуження E і C , з яких виходять тріщини L_1 і L_3 (рис. 1). Точки $x = 2kd$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $2d$ – ширина смуги періодів) осі Ox знаходяться всередині періодичних отворів.

Контактна особа: В. С. КРАВЕЦЬ, e-mail: vlad@ipm.lviv.ua

На нескінченності площина розтягується напруженнями p і q під кутом γ до осей Ox і Oy . У кожному періоді на контурах отвору $L_2 \cup L_4$ та тріщин L_1, L_3 діють самозрівноважені навантаження:

$$N_*^\pm(t) + iT_*^\pm(t) = p_*(t), t \in L_1, L_3; \quad N_*^+(t) + iT_*^+(t) = p_*(t), t \in L_2 \cup L_4, \quad (1)$$

де $N_*(t), T_*(t)$ – нормальна та дотична компоненти напружень на контурах $L_j (j = \overline{1,4})$, верхній знак індексу “+” (“-”) вказує на граничне значення відповідної величини за прямування до контуру L_j зліва (справа) відносно вибраного напрямку його обходу. За додатний вважаємо напрям обходу контуру отвору, за якого пружне тіло (область S) знаходиться зліва. НДС площини задовольняє умови періодичності (напруження – періодичні функції за координатою x з періодом $2d$).

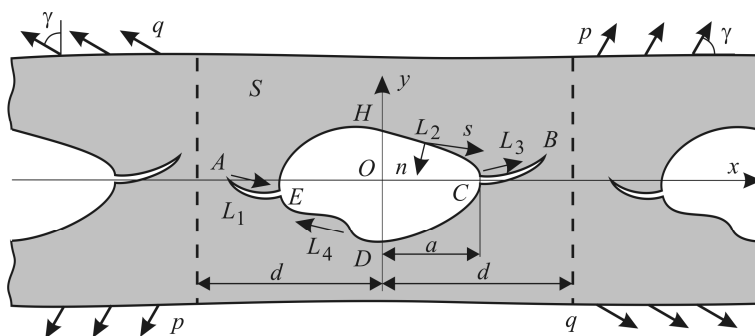


Рис. 1. Періодична система криволінійних отворів з крайовими тріщинами у пружній площині.

Fig. 1. A periodic system of curvilinear holes with edge cracks in an elastic plane.

СІР задачі. Сформульовану задачу розв’язуватимемо методом СІР. Комплексні потенціали напружень Колосова–Мусхелішвілі можна записати у вигляді суми

$$\Phi_*(z) = \Phi_0(z) + \Phi(z), \quad \Psi_*(z) = \Psi_0(z) + \Psi(z), \quad z = x + iy,$$

де відомі функції [11]

$$\Phi_0(z) = (p + q)/4, \quad \Psi_0(z) = -\exp(-2i\gamma)(p - q)/2 \quad (2)$$

описують однорідний напружений стан у суцільній площині без отворів і тріщин, а для потенціалів $\Phi(z), \Psi(z)$, що визначають збурений отворами і тріщинами напружений стан, маємо інтегральні зображення через невідому функцію $g'(t)$ на загальному контурі $L = \bigcup L_n (n = \overline{1,4})$ [8, 10]:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{4d} \int_L \cot\left(\frac{\pi}{2d}(t-z)\right) g'(t) dt, \\ \Psi(z) &= \frac{1}{4d} \int_L \left\{ \cot\left(\frac{\pi}{2d}(t-z)\right) \overline{g'(t)} dt - \right. \\ &\quad \left. - \left[\cot\left(\frac{\pi}{2d}(t-z)\right) + \frac{\pi}{2d}(\bar{t}-t+z) \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi}{2d}(t-z)\right) \right] g'(t) dt \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Тут $g'(t) = g_n'(t), t \in L_n, n = \overline{1,4}$, де $g_n'(t)$ – комплекснозначні шукані функції, які виражають через похідні стрибків переміщень на кожному контурі L_n [10].

На розімкнених контурах L_2, L_4 шукані функції $g_2'(t_2), t_2 \in L_2, g_4'(t_4), t_4 \in L_4$ неперервні, хоча на всьому контурі отвору функція $g'(t)$ розривна в точках E і C (рис. 1). Труднощі у розв’язуванні задач, які пов’язані з розривами у

точках розгалуження контурів отворів, можна подолати різними спробами [8, 9, 12]. Нижче розвинуто підхід, запропонований раніше [9].

Крайові умови (1) для збуреного напруженого стану мають вигляд [8, 10]

$$N(t) + iT(t) = p(t) = p_*(t) - \left\{ \Phi_0(t) + \overline{\Phi_0(t)} + \frac{dt}{dt} \left[t\overline{\Phi_0'(t)} + \overline{\Psi_0(t)} \right] \right\}, \quad t \in L, \quad (4)$$

причому на нескінченності напруження прямують до нуля. Тут $N(t)$ і $T(t)$ – нормальна і дотична компоненти збурених напружень на контурі L . За заданого навантаження площини на нескінченності для кожного контуру L_j отримаємо $p(t) = p_j(t)$, $t \in L_j$ ($j = \overline{1,4}$), де

$$p_j(t_j) = p_*(t_j) - \left\{ \frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2} \frac{dt_j}{dt_j} \exp(2i\gamma) \right\}, \quad t_j \in L_j.$$

Сформульовану задачу з крайовою умовою (4) за допомогою комплексних потенціалів (2), (3) зведемо до системи чотирьох СІР [13] на контурах L_j ($j = \overline{1,4}$) відносно шуканих функцій $g_n'(t_n)$, $t_n \in L_n$, $n = \overline{1,4}$:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^4 \int_{L_n} \left[K_{nj}(t_n, t_j') g_n'(t_n) dt_n + L_{nj}(t_n, t_j') \overline{g_n'(t_n)} dt_n \right] - \\ & - \frac{1}{2i} \frac{M_0}{(t_j')^2} \frac{dt_j'}{dt_j'} + \frac{a_0}{a} \frac{ds_j'}{dt_j'} = \pi p_j(t_j'), \quad t_j' \in L_j, \quad j = \overline{1,4}, \end{aligned} \quad (5)$$

де $p_j(t_j') = p(t_j')$, $t_j' \in L_j$, s_j' – дугова абсциса точки t_j' на контурі L_j ;

$$M_0 = \sum_{n=1}^4 M_n = i \sum_{n=1}^4 \int_{L_n} \left[\overline{t} g_n'(t) dt - t \overline{g_n'(t)} dt \right], \quad a_0 = \sum_{n=1}^4 a_n = \sum_{n=1}^4 \int_{L_n} g_n'(t) dt. \quad (6)$$

Тут враховано, що початок координат O ($z_O = x_O + iy_O = 0$) є всередині отвору; $a = |OC|$ – параметр розмірності довжини (рис. 1). Ядра СІР (5) визначаємо так [8, 10]:

$$\begin{aligned} K(t, t') &= \frac{\pi}{4d} \left[\cot \frac{\pi}{2d} (t - t') + \frac{dt'}{dt'} \cot \frac{\pi}{2d} (\bar{t} - \bar{t}') \right], \\ L(t, t') &= \frac{\pi}{4d} \left[\left(1 - \frac{dt'}{dt'} \right) \cot \frac{\pi}{2d} (\bar{t} - \bar{t}') - \frac{\pi}{2d} \frac{dt'}{dt'} (t - t' + \bar{t}' - \bar{t}) \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{2d} (\bar{t} - \bar{t}') \right]. \end{aligned}$$

Додаткові доданки у рівняннях (5) з функціоналами (6) забезпечують єдиний розв'язок системи СІР для довільної її правої частини [8–10]. Коли навантаження $p(t) = p_j(t)$, $t \in L_j$ на контурі $L = \bigcup L_j$, $j = \overline{1,4}$ задовольняє умови рівноваги, функціонали (6) рівні нулю.

Числові розв'язки СІР. Систему СІР (5) розв'яжемо методом квадратур [8, 9]. Запишемо рівняння контурів L_n у параметричному вигляді:

$$t_n = a\omega_n(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 1; \quad t_n' = a\omega_n(\eta), \quad -1 \leq \eta \leq 1, \quad n = \overline{1,4}, \quad (7)$$

де $\omega_n(\xi)$ – задані неперервні функції. Невідомі функції $g_n'(t_n)$ на розімкнених контурах L_n можна шукати у різних класах [9, 14, 15]. Тут вважатимемо, що вони мають кореневі особливості на кінцях контурів L_n :

$$\frac{g_n'(t_n)}{pa} \frac{dt_n}{d\xi} = \varphi_n(\xi) = w_n(\xi) / \sqrt{1-\xi^2}, \quad \xi \in [-1; +1], \quad n = \overline{1, 4}. \quad (8)$$

Після заміни змінних (7), (8) систему СІР (5) зведемо до безрозмірної канонічної форми

$$\sum_{n=1}^4 \int_{-1}^{+1} \left\{ K_{nj}^0(\xi, \eta) \varphi_n(\xi) + L_{nj}^0(\xi, \eta) \overline{\varphi_n(\xi)} \right\} d\xi = \pi p_j(\eta), \quad \eta \in [-1; +1], \quad j = \overline{1, 4}. \quad (9)$$

Тут

$$K_{nj}^0(\xi, \eta) = aK(a\omega_n(\xi), a\omega_j(\eta)) + \frac{|\omega_j'(\eta)|}{\omega_j'(\eta)} - \frac{\overline{\omega_n(\xi)}}{2(\omega_j(\eta))^2} \frac{\overline{\omega_j'(\eta)}}{\omega_j'(\eta)},$$

$$L_{nj}^0(\xi, \eta) = aL(a\omega_n(\xi), a\omega_j(\eta)) + \frac{\omega_n(\xi)}{2(\omega_j(\eta))^2} \frac{\overline{\omega_j'(\eta)}}{\omega_j'(\eta)}; \quad n, j = \overline{1, 4},$$

де $\omega_j'(\eta) = d\omega_j(\eta)/d\eta$, $p_j(\eta) = p_j(a\omega_j(\eta))/p$.

Систему СІР (9) розв'яжемо методом квадратур, використовуючи квадратурні формули для регулярних і сингулярних інтегралів [8–10]:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{w_n(\xi) d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \approx \frac{\pi}{N_n} \sum_{k=1}^{N_n} w_n(\xi_{nk}); \quad \xi_{nk} = \cos \frac{\pi(2k-1)}{2N_n}, \quad k = \overline{1, N_n}, \quad n = \overline{1, 4},$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{w_n(\xi) d\xi}{(\xi - \eta_{jm}) \sqrt{1-\xi^2}} \approx \frac{\pi}{N_n} \sum_{k=1}^{N_n} \frac{w_n(\xi_{nk})}{\xi_{nk} - \eta_{jm}}; \quad \eta_{jm} = \cos \frac{\pi m}{N_j}, \quad m = \overline{1, N_j - 1}, \quad j = \overline{1, 4}.$$

У результаті прийдемо до системи $N_S - 4$ ($N_S = N_1 + N_2 + N_3 + N_4$) комплексних лінійних алгебричних рівнянь – дискретного аналога інтегральних рівнянь (9)

$$\sum_{n=1}^4 \frac{1}{N_n} \sum_{k=1}^{N_n} \left\{ K_{nj}^0(\xi_{nk}, \eta_{jm}) w_n(\xi_{nk}) + L_{nj}^0(\xi_{nk}, \eta_{jm}) \overline{w_n(\xi_{nk})} \right\} = p_j(\eta_{jm}), \quad j = \overline{1, 4}; \quad m = \overline{1, N_j - 1}$$

відносно N_S невідомих комплексних значень функцій $w_n(\xi_{nk}), k = \overline{1, N_n}, n = \overline{1, 4}$ (8).

Для замкнутості системи $N_S - 4$ рівнянь необхідно додати чотири комплексні умови. Дві з них – це обмеженість функцій $g_1'(t_1), g_3'(t_3)$ у точках E, C виходу крайових тріщин L_1, L_3 на контур отвору. Дискретний аналог цих умов має вигляд [10]

$$w_1(+1) = 0 \Rightarrow \frac{1}{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} (-1)^k w_1(\xi_{1k}) \operatorname{ctg}((2k-1)\pi/(4N_1)) = 0,$$

$$w_3(-1) = 0 \Rightarrow \frac{1}{N_3} \sum_{k=1}^{N_3} (-1)^{k+N_3} w_3(\xi_{3k}) \operatorname{tg}((2k-1)\pi/(4N_3)) = 0.$$

Інші дві вибираємо з двох пар умов $w_2(+1) = 0; w_4(+1) = 0$ або $w_2(-1) = 0; w_4(-1) = 0$, рівнозначність яких підтверджена числовими розрахунками. Наведемо останні умови в дискретному вигляді

$$\frac{1}{N_2} \sum_{k=1}^{N_2} (-1)^{k+N_2} w_2(\xi_{2k}) \operatorname{tg} \left(\frac{2k-1}{4N_2} \pi \right) = 0, \quad \frac{1}{N_4} \sum_{k=1}^{N_4} (-1)^{k+N_4} w_4(\xi_{4k}) \operatorname{tg} \left(\frac{2k-1}{4N_4} \pi \right) = 0.$$

КІН для крайових тріщин. Згідно із введеними замінами (7), (8) КІН у вершинах A і B ($t_A = a\omega_1(-1)$, $t_B = a\omega_3(+1)$) тріщин L_1, L_3 (рис. 1) знаходимо за співвідношеннями [10]

$$K_I(A) - iK_{II}(A) = \lim_{t \rightarrow A} \left\{ g_1'(t) \sqrt{2\pi|t - t_A|} \right\} = w_1(-1) p \sqrt{\pi a |\omega_1'(-1)|} / \omega_1'(-1),$$

$$K_I(B) - iK_{II}(B) = \lim_{t \rightarrow B} \left\{ g_3'(t) \sqrt{2\pi|t - t_B|} \right\} = -w_3(+1) p \sqrt{\pi a |\omega_3'(+1)|} / \omega_3'(+1),$$

$$w_1(-1) = \frac{1}{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} (-1)^{k+N_1} w_1(\xi_{1k}) \operatorname{tg} \left(\frac{2k-1}{4N_1} \pi \right),$$

$$w_3(+1) = -\frac{1}{N_3} \sum_{k=1}^{N_3} (-1)^k w_3(\xi_{3k}) / \operatorname{tg} \left(\frac{2k-1}{4N_3} \pi \right).$$

Уведемо відповідні відносні КІН для тріщин L_1 і L_3 співвідношеннями

$$F_I(A) - iF_{II}(A) = \{K_I(A) - iK_{II}(A)\} / p \sqrt{\pi l_1} = w_1(-1) \sqrt{a |\omega_1'(-1)|} / l_1 / \omega_1'(-1), \quad (10)$$

$$F_I(B) - iF_{II}(B) = \{K_I(B) - iK_{II}(B)\} / p \sqrt{\pi l_3} = -w_3(+1) \sqrt{a |\omega_3'(+1)|} / l_3 / \omega_3'(+1), \quad (11)$$

де $l_1 = |AE|$, $l_3 = |CB|$, $a = |OC|$.

Числові розрахунки КІН (10), (11) виконали для різних форм криволінійних контурів $L_n, n = \overline{1,4}$ (рис. 2). Розглядали прямолінійну ($t_1 = a\omega_1(\xi) = -a + l_1(\xi - 1)/2$) та параболічну ($t_3 = a\omega_3(\xi) = a + l_3(\xi + 1 + i\varepsilon_3(\xi^2 - 1))/2$) тріщини L_1, L_3 , що виходять з криволінійного отвору, контур якого складається з двох різних півеліпсів L_2, L_4 , для яких (див. схему на рис. 2d) $t_2 = a\omega_2(\xi) = a(2\xi + i\varepsilon_2(1 - \xi^2))/(1 + \xi^2)$, $t_4 = a\omega_4(\xi) = a(-2\xi - i\varepsilon_4(1 - \xi^2))/(1 + \xi^2)$. Тут $t_n \in L_n, n = \overline{1,4}$, $\xi \in [-1; +1]$, $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = b_2/a$, $\varepsilon_3, \varepsilon_4 = b_4/a$ – відносні прогини контурів $L_1 - L_4$.

Для прямолінійної тріщини L_1 $\omega_1'(-1) = l_1/2a$ і з виразу (10) отримаємо:

$$F_I(A) - iF_{II}(A) = w_1(-1) a \sqrt{2} / l_1. \quad (12)$$

Розраховували відносні КІН (12) (рис. 2 a, b) та (11) (рис. 2 c, d) для параметрів $\varepsilon_2 = 0,5$, $\varepsilon_4 = 2$, $\varepsilon_3 = 0,5$, $l_1 = l_3 = l \in [0, 2a; 3,8a]$ і відносних півперіодів $d/a = 5$ (рис. 2 a, c) та $d/a = 100$ (рис. 2b, d). Розглядали чотири способи навантаження площини на нескінченності: лінії $l-3$ відповідають одновісним розтягам напруженнями p ($q = 0$) для кутів $\gamma = \pi/3; 2\pi/3; \pi/2$; 4 – всебічному розтягу напруженнями p ($q = p$).

Запропонована методика дає можливість розв'язувати відповідні задачі для довільних форм отворів і тріщин. Зокрема, розглядали періодичні півколові отвори з двома горизонтальними тріщинами однакової довжини ($l_1 = l_3 = l$) для низки навантажень площини на нескінченності (рис. 3 і 4). Визначали відносні КІН (12) у вершинах A і B тріщин L_1, L_3 за одновісного розтягу площини на нескінченності напруженнями p ($q = 0$) під кутом $\gamma = \pi/4$ до осі Ox для параметрів $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, $\varepsilon_4 = 1$, $l/a \in [0,05; 0,9]$ та різних відносних півперіодів $d/a \in \{2; 4; 16\}$ (рис. 3). Аналогічні розрахунки КІН у вершині A виконали за вертикального розтягу ($q = 0, \gamma = \pi/2$) (рис. 4a), де $F_I(B) = F_I(A)$, $F_{II}(B) = -F_{II}(A)$, та поперечного зсуву площини вздовж осі Ox ($q = -p, \gamma = \pi/4$) (рис. 4b), де $F_I(B) = -F_I(A)$, $F_{II}(B) = F_{II}(A)$.

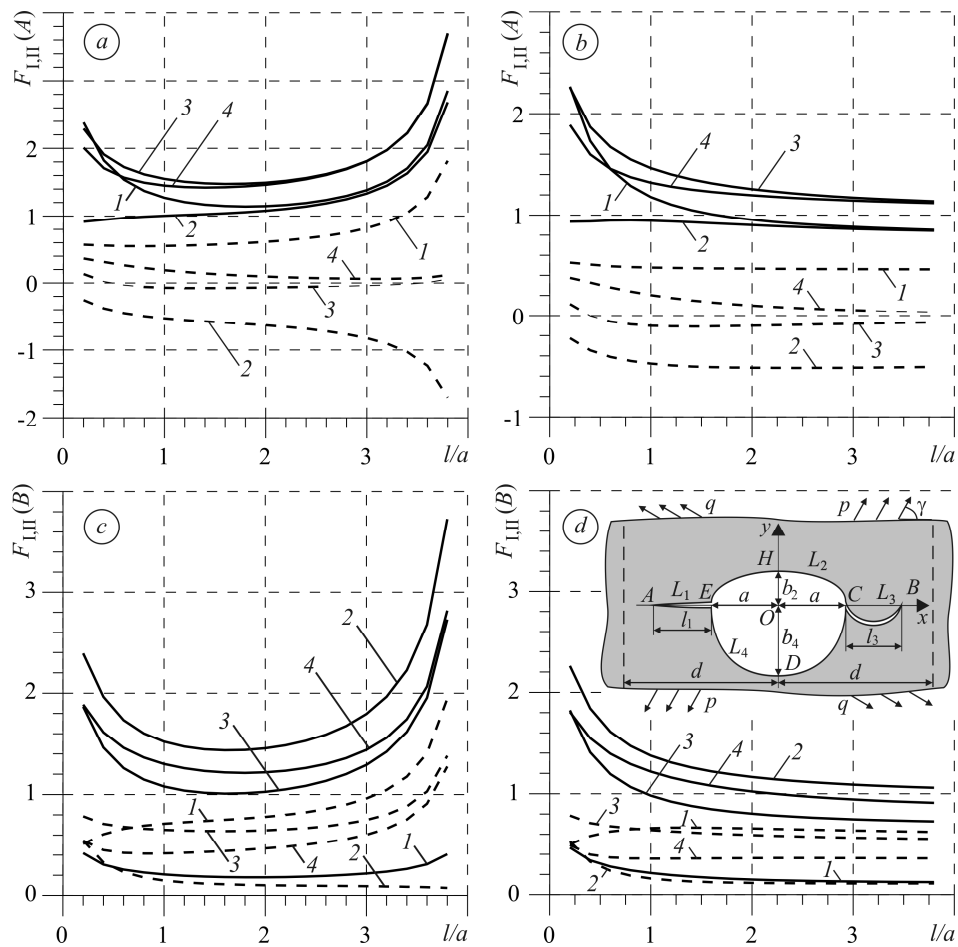


Рис. 2. Залежності КІН F_I (суцільні лінії) та F_{II} (штрихові) у вершинах $A(a, b)$ і $B(c, d)$ від відносної довжини крайових тріщин l/a для $d/a = 5$ (a, c) та 100 (b, d) за різних навантажень площини: 1 – $p, q = 0, \gamma = \pi/3$; 2 – $p, q = 0, \gamma = 2\pi/3$; 3 – $p, q = 0, \gamma = \pi/2$; 4 – $p, q = p$.

Fig. 2. Dependences of the SIF F_I (solid lines) and F_{II} (dashed) at the vertices $A(a, b)$ and $B(c, d)$ on the relative length of the edge cracks l/a for $d/a = 5$ (a, c) and 100 (b, d) for different plane loads: 1 – $p, q = 0, \gamma = \pi/3$; 2 – $p, q = 0, \gamma = 2\pi/3$; 3 – $p, q = 0, \gamma = \pi/2$; 4 – $p, q = p$.

Відносні КІН нескінченно зростають за наближення вершин тріщин у сусідніх періодах ($a + l \rightarrow d$) (рис. 3, криві $d/a = 2$). Отримані КІН для віддалених отворів ($d/a = 16$) близькі до КІН для відповідного одного отвору ($d/a \rightarrow \infty$) з двома крайовими тріщинами (максимальні відносні різниці між ними не перевищують 0,53% для усіх інших розглянутих параметрів задачі).

Для вертикального розтягу площини зі системою періодичних кругових отворів з двома однаковими горизонтальними прямолінійними тріщинами одержані значення відносних КІН збігаються з відомими [4]. Для великих періодів ($d > 100a$) вони також добре узгоджуються з літературними [2, 3, 9] для двох крайових тріщин ($l < 4a$), що виходять з одного отвору. Для малих періодів, тобто коли малою є відносна віддаль між концентраторами напружень, на основі отриманих розв'язків можна знайти КІН у вершинах крайових тріщин, що виходять на контур двобічного напівнескінченного криволінійного вирізу. Такі розв'язки можна використовувати як асимптотичні для відповідних обмежених областей з вирізами та малими тріщинами.

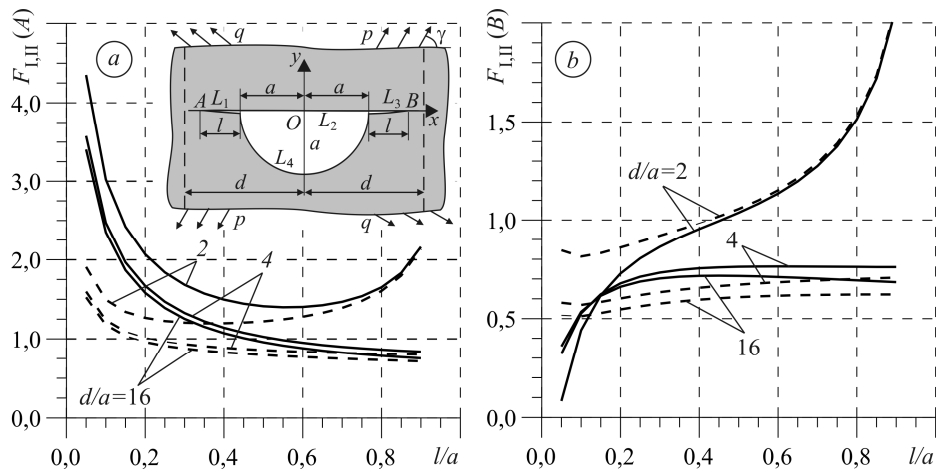


Рис. 3. Залежності КІН F_I (суцільні лінії) та F_{II} (штрихові) у вершинах A (а) і B (b) від відносної довжини крайових тріщин l/a для $d/a \in \{2; 4; 16\}$ за одновісного розтягу площини напруженнями p під кутом $\gamma = \pi/4$.

Fig. 3. Dependences of the SIF F_I (solid lines) and F_{II} (dashed) at the vertices A (a) and B (b) on the relative length of the edge cracks l/a for $d/a \in \{2; 4; 16\}$ under uniaxial tension of the plane with stress p at angle $\gamma = \pi/4$.

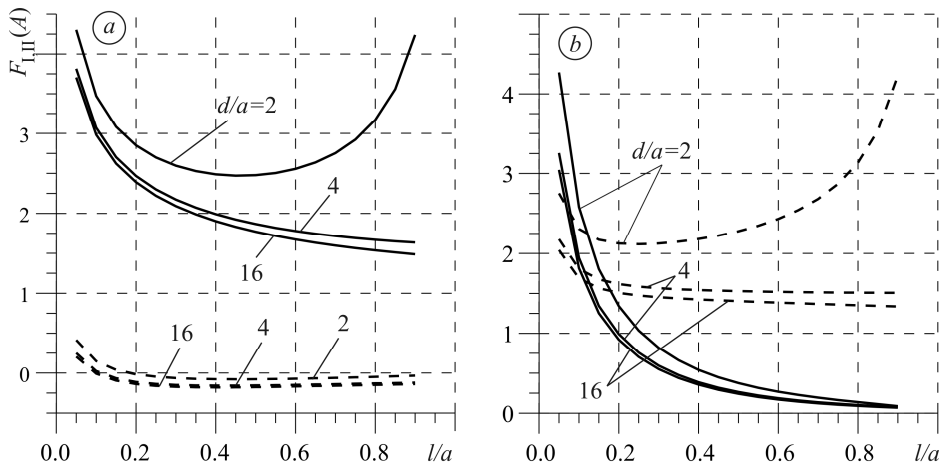


Рис. 4. Залежності КІН F_I (суцільні лінії) та F_{II} (штрихові) у вершині A від відносної довжини крайових тріщин l/a для $d/a \in \{2; 4; 16\}$ за вертикального розтягу (а) та поперечного зсуву (b) площини вздовж осі Ox ($q = -p$, $\gamma = \pi/4$).

Fig. 4. Dependences of the SIF F_I (solid lines) and F_{II} (dashed) at the vertex A on the relative length of the edge cracks l/a for $d/a \in \{2; 4; 16\}$ for the vertical tension (a) under the transverse shear (b) of the plane along the axis Ox ($q = -p$, $\gamma = \pi/4$).

ВИСНОВКИ

Розв'язано плоску задачу теорії пружності для ізотропної площини зі системою періодичних криволінійних отворів, з контурів яких виходять крайові криволінійні тріщини. Побудовано систему СІР у загальному формулюванні задачі відносно форм отворів і тріщин та зовнішнього навантаження площини. Розв'язки системи СІР отримано методом механічних квадратур. Обчислено КІН у вершинах крайових тріщин залежно від геометричних параметрів задачі (кривини та довжини тріщин, форми і розмірів отворів, ширини смуги періодів) за різних типів однорідного навантаження площини на нескінченності. В окремих випадках віддалених отворів та для кругових з крайовими прямолінійними тріщинами обчислені КІН узгоджуються з відомими.

РЕЗЮМЕ. Методом сингулярных интегральных уравнений (СИУ) решена плоская периодическая задача теории упругости для изотропной плоскости с бесконечным рядом криволинейных отверстий, из контуров которых выходят краевые криволинейные трещины. Полученная система СИУ методом квадратур сведена к комплексной системе линейных алгебраических уравнений. Вычислены коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) в вершинах двух краевых трещин, когда плоскость равномерно нагружена на бесконечности (растяжение или поперечный сдвиг). Исследовано влияние на КИН форм и относительных размеров отверстий и трещин при различных внешних нагрузках.

SUMMARY. The plane periodic problem of the theory of elasticity for an isotropic plane with an infinite number of curvilinear holes and cracks propagating from their boundaries is solved by means of the singular integral equation (SIE) method. The obtained SIE system by quadrature method is reduced to a complex system of linear algebraic equations. The stress intensity factors (SIF) at the vertices of two boundary cracks are calculated when the plane is evenly loaded at infinity (tension or transverse shear). The influence of shapes and relative sizes of holes and cracks on the SIF for various external loads is investigated.

1. Tada H., Paris O. C., and Irwin G. R. The Stress Analysis of Cracks Handbook. – New York: American Society of Mechanical Engineers, 2000. – 676 p.
2. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: в 2-х т. / Под ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – Т. 1. – 448 с.
3. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами // Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пос. / Под общ. ред. В. В. Панасюка. – К.: Наук. думка, 1988. – Т. 2. – 620 с.
4. Karlsson A. and Backlund J. Summary of SIF design graphs for cracks emanating from circular holes // Int. J. Fract. – 1978. – **14**, № 6. – P. 585–596.
5. Мирсалимов В. М. Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами. – Баку: Элм, 1984. – 124 с.
6. Мирсалимов В. М. Взаимодействие периодической системы упругих включений и прямолинейных трещин в изотропной среде // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1978. – № 1. – С. 164–174.
7. Savruk M. P. and Kazberuk A. Stress Concentration at Notches. – Cham: Springer, 2017. – 516 p.
8. Саврук М. П., Казберук А. Концентрація напружень у твердих тілах з вирізами // Механіка руйнування та міцність матеріалів: Довідн. пос. / За заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: Сполом, 2012. – Т. 14. – 384 с.
9. Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – К.: Наук. думка, 1989. – 248 с.
10. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
11. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
12. Божидарнік В. В., Максимович О. В. Визначення напруженого стану біля крайових тріщин у пластині з отвором складної форми // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – **46**, № 1. – С. 19–26.
(Bozhydarnik V. V. and Maksymovych O. V. Determination of the stressed state near edge cracks in a plate containing a hole of complex shape // Materials Science. – 2010. – **46**, № 1. – P. 16–26.)
13. Кравець В. С. Напружено-деформований стан площини з періодичною системою отворів з крайовими тріщинами або смугами пластичності // Сучасні проблеми механіки та математики: в 3-х т. / Під заг. ред. А. М. Самойленка, Р. М. Кушніра. – Львів: ІППММ НАН України, 2018. – Т. 2. – С. 44–46.
14. Кравець В. С. Напружено-деформований стан півплощини з внутрішніми приповерхневими тріщинами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2015. – **51**, № 6. – С. 40–49.
(Kravets' V. S. Stress-strain state of a half plane with internal subsurface cracks // Materials Science. – 2016. – **51**, № 6. – P. 792–804.)
15. Кравець В. С. Напружений стан плоского клиноподібного зразка з крайовою тріщиною за одноісного розтягу // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2017. – **53**, № 5. – С. 31–41.
(Kravets' V. S. Stressed state of a plane wedge-shaped specimen with edge crack under uniaxial tension // Materials Science. – 2018. – **53**, № 5. – P. 609–622.)

Одержано 07.08.2018