

УДК 539.4

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СТРІЛЬБИ ДЛЯ ШВИДКОГО ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПІДЗЕМНИХ ДІЛЯНОК ТРУБОПРОВІДІВ У ЗОНІ ШАХТНИХ ВИРОБІТОК

З. С. ЯСКОВЕЦЬ¹, І. В. ОРИНЯК²

¹ Інститут проблем міцності ім. Г. С. Писаренка НАН України, Київ;

² ТОВ "Солід Мастер", Київ

Стан трубопроводу, що знаходиться в зоні зсувів земної поверхні, спричинених шахтними виробітками, визначено методом стрільби (МС). Трубопровід розбито на елементарні ділянки, для яких на основі розв'язку диференційних рівнянь виведено аналітичні рівняння зв'язку між деформаціями і напруженнями на початку і в кінці ділянки. За значеннями переміщень і сил у першій точці знайти такі ж значення в кожній іншій. При цьому використано аналітичну умову зв'язку між ними в першій точці. Ітераційно уточнено початкові значення переміщення, допоки не задовольняться граничні умови на кінці трубопроводу. Алгоритм уточнення побудовано на методі ділення відрізка на два і виборі наступного відрізка залежно від знака функції на протилежному кінці. За декількома типовими переміщеннями землі (малі – пружна взаємодія ґрунту і труби, середні – змішана пружна і пластична взаємодія та великі – пластична взаємодія) оцінено швидкість і точність МС порівняно з іншими численними процедурами і комерційними програмами. Виявлено його ефективність для пружних задач.

Ключові слова: *метод стрільби, підземний трубопровід, шахтна виробітка, напружений стан, переміщення ґрунту, осьові напруження.*

Вступ. Напружено-деформований стан для лінійних просторових деформованих систем (конструкції), зокрема магістральних трубопроводів визначають, розв'язуючи крайові задачі, де на межах тіла задано відповідні граничні умови для деяких параметрів, що його характеризують. Для числового розв'язку задачі (здебільшого повний аналітичний розв'язок знайти неможливо) тіло розбивають на велику кількість елементарних ділянок, де вводять додаткові невідомі, що зв'язані певними залежностями. Разом з граничними умовами вони замикають систему лінійних рівнянь, розв'язати які нескладно з допомогою сучасних обчислювальних засобів.

Метод стрільби (МС) не розв'язує крайову задачу для розглядуваної конструкції, а зводить її до ітераційної процедури розв'язання простішої задачі, зокрема до задачі Коші (задачі з початковими умовами). Іншими словами, фіксують певні пробні значення невідомих на одному (першому) краї, послідовно визначаючи їх в усіх інших точках, в тому числі на іншому краї конструкції. Найчастіше вони не відповідають заданим граничним умовам на цьому краї, через що необхідні ітераційні процедури уточнення. Недолік МС у тому, що він передбачає застосування ітераційної процедури навіть для лінійної поведінки конструкції. Проте геометрично і фізично нелінійні конструкції завжди вимагають ітераційних процедур і тут МС може мати очевидні переваги, оскільки прогнозування переміщень і сил на наступній ділянці однозначно залежить від попередніх відомих значень за довільних нелінійних процесів.

Саме тому останнім часом відновлюється інтерес до МС. Приклади його застосування до двовимірних балок наведено в працях [1, 2], де в першій для прогнозування параметрів у кінці елементарної ділянки застосовано метод Рунге–Кутта четвертого порядку, а в другій – п'ятого. Узагальнено метод для просторових балок [3], де подано матриці зв'язку попередніх і наступних параметрів за довільного просторового згину і закруту балки. Проаналізовано [4] т.зв. елемент у формі метелика, що застосовують для гасіння зусиль під час землетрусу і який працює за комбінованого поперечного згину і закруту. Наведено аналітичні рівняння матриці переходу для відповідних зусиль. МС в поєднанні з методом Рунге–Кутта застосовують і для прогнозування динаміки руху довгого геометрично нелінійного бурильного вала, сили взаємодії якого з внутрішнім і зовнішнім середовищами залежать від наперед невідомих переміщень [5]. МС для локальних арок описано в праці [6], в якій подано формули зв'язку для плоскої задачі.

Зауважимо, що МС найефективніший за наявності матриці переходу (є формули зв'язку) від попередніх параметрів до наступних. До таких задач належить і розглядувана оцінка стану трубопроводів у зоні шахтних виробіток [7, 8]. Під час відпрацювання шахтної лави внаслідок впливу поперечних переміщень (як вертикальних у напрямку Z , так і горизонтальних у напрямку Y) у трубопроводі через великі радіуси кривини утворюються незначні напруження. Тому важливу роль для його цілісності відіграють поздовжні переміщення і поздовжні сили взаємодії труби з ґрунтом [9, 10]. Ці сили нелінійні і загалом мають досить складний характер. У літературі використовують різні підходи до їх нормалізації та аналітичного опису, зокрема, прийняті у ВНИИСТ [11], голландському NEN 3650 [12] та американському ASCE [10] стандартах.

Мета цього дослідження – вивчити можливості і переваги МС для цієї задачі і розширити можливості для складніших.

Основні залежності, математична модель та загальний розв'язок. У вказаних вище стандартах приймають ідеалізований пружно-пластичний характер функції q , що залежить від взаємного переміщення трубопроводу та ґрунту (рис. 1).

Граничний опір ґрунту зрушенню під час пружної взаємодії визначають за його фізико-механічними характеристиками та геометричними параметрами трубопроводу [11]:

$$\bar{q} = q_{\text{pipe}} \text{tg} \phi_g + 2\gamma_g c_h \pi D_n^2 \text{tg} \phi_g + 0,6\pi D_n c_g, \quad (1)$$

тут q_{pipe} – вага трубопроводу з продуктом; c_h – безрозмірний коефіцієнт; ϕ_g –

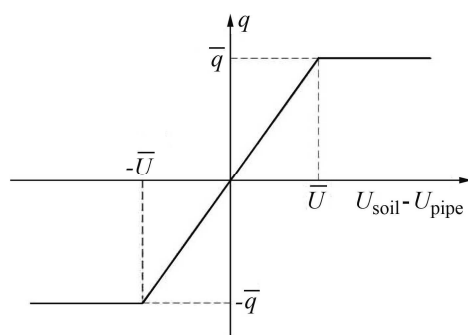


Рис. 1. Узагальнена діаграма взаємодії трубопроводу з ґрунтом.

Fig. 1. Generalized diagram of the interaction of the pipeline with the soil.

кут внутрішнього тертя ґрунту; γ_g – питома вага ґрунту; c_g – зчеплення ґрунту; D_n – зовнішній діаметр трубопроводу. Перший доданок у формулі враховує вагу трубопроводу з продуктом, другий – тиск ґрунту по периметру труби, а третій – незворотну частину зчеплення ґрунту по периметру труби. Коефіцієнт c_h , що характеризує утворення склепіння обвалення, залежить від відношення висоти засипання над трубою до її діаметра.

Взаємне переміщення між поверхнею трубопроводу та ґрунтом

$$\bar{U} = u_g - u, \quad (2)$$

де u та u_g – переміщення труби та ґрунту у поздовжньому напрямку.

Зв'язок граничного опору ґрунту зрушення \bar{q} та максимального взаємного переміщення \bar{U} визначають за формулою [11]

$$\bar{q} = \pi D_n C_x \bar{U}, \quad (3)$$

де C_x – узагальнений коефіцієнт дотичного опору ґрунту.

Оскільки стан трубопроводу, що знаходиться в зоні шахтних виробіток, визначають напруження від поздовжніх зсувів ґрунту, то систему вихідних рівнянь [13] можна суттєво спростити:

$$\begin{aligned} \frac{dN(x)}{dx} &= q_t(x), \\ \frac{du}{dx} &= -\frac{N(x)}{EF}. \end{aligned} \quad (4)$$

Сила взаємодії труби та ґрунту $q_t(x)$ залежить від їх взаємного зміщення:

$$q_t(x) = \beta^2 EF (u_g(x) - u(x)), \quad (5)$$

де $u_g(x)$ – переміщення ґрунту в осьовому напрямку в точці з координатою x , а

$$\beta = \sqrt{\frac{\pi DC_x}{EF}}, \quad (6)$$

де D – зовнішній діаметр трубопроводу; E – модуль Юнга; F – площа поперечного перерізу трубопроводу. Систему (4) доповнюємо граничними умовами на кінцях аналізованої розрахункової ділянки

$$N_b = u_b \beta EF; \quad N_e = -u_e \beta EF, \quad (7)$$

які отримали з умов пружної взаємодії трубопроводу та ґрунту.

Очевидно, що переміщення ґрунту $u_g(x)$ можна апроксимувати кусково-ламаними прямими лініями. Тоді на деякій ділянці апроксимації

$$u_g(x) = \mu_0 + \mu_1 x, \quad (8)$$

де μ_0, μ_1 – параметри прямої лінії. Ураховуючи вирази (7) та (8), систему рівнянь (4) для пружної взаємодії зведемо до лінійного неоднорідного рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \beta^2 u = -\beta^2 (\mu_0 + \mu_1 x). \quad (9)$$

Загальний розв'язок (8) буде:

$$\begin{aligned} u(x) &= A e^{-\beta x} + B e^{\beta x} + \mu_0 + \mu_1 x; \\ N(x) &= -EF \beta (-A e^{-\beta x} + B e^{\beta x} + \mu_1), \end{aligned} \quad (10)$$

де невідомі константи A та B визначаємо з таких граничних умов на початку ділянки апроксимації:

$$u(x)|_{x=0} = u_0; \quad N(x)|_{x=0} = N_0. \quad (11)$$

Тоді загальний розв'язок задачі для пружної взаємодії трубопроводу та ґрунту (10) набуде вигляду

$$u(x) = u_0 \operatorname{ch}(\beta x) - \frac{N_0}{\beta EF} \operatorname{sh}(\beta x) + \mu_0 (1 - \operatorname{ch}(\beta x)) + \mu_1 \left(x - \frac{1}{\beta} \operatorname{sh}(\beta x) \right), \quad (12)$$

$$N(x) = -u_0 EF \beta \operatorname{sh}(\beta x) + N_0 \operatorname{ch}(\beta x) + \mu_0 EF \beta \operatorname{sh}(\beta x) + \mu_1 EF (\operatorname{ch}(\beta x) - 1).$$

Під час пластичної взаємодії трубопроводу та ґрунту сила взаємодії $q_t(x) = \bar{q}$, де знак \bar{q} ви

$$\begin{aligned} \bar{q} &> 0, \quad \text{якщо } (u_g(x) - u(x)) > 0, \\ \bar{q} &< 0, \quad \text{якщо } (u_g(x) - u(x)) < 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Тепер загальний розв'язок системи (4) з урахуванням граничних умов (11) для пластичної взаємодії трубопроводу та ґрунту набуде вигляду

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0 - \frac{N_0}{EF} x - \frac{\bar{q} x^2}{2EF}, \\ N(x) &= N_0 + \bar{q} x. \end{aligned} \quad (14)$$

Змоделюємо напружений стан трубопроводу, що піддається впливу зсувів ґрунту, використовуючи розв'язки (12) та (14).

Алгоритм розв'язку та результати порівняльних розрахунків. Покроково підберемо значення переміщень та осьової сили в початковій розрахунковій точці і перевіримо їх коректність, будуючи розв'язок для всієї ділянки трубопроводу. Зупинимося детальніше на основних етапах. Для цього проаналізуємо ділянку трубопроводу, що знаходиться під впливом зсувів ґрунту і яку описують умови (рис. 2)

$$\begin{aligned} u_g(x) &= 0, \quad x \leq 0, \\ u_g(x) &\neq 0, \quad 0 < x < L, \\ u_g(x) &= 0, \quad x \geq L, \end{aligned} \quad (15)$$

де L – довжина ділянки трубопроводу, на якій відбулись зміщення ґрунту. Беручи до уваги, що розрахункова ділянка повинна розпочинатися з точки, де реалізується пружна взаємодія трубопроводу та ґрунту (див. граничні умови (7)), знайдемо співвідношення для визначення координати $(-\Delta x)$ її початку. Іншими словами, умову для пошуку початку розрахункової ділянки перепишемо у вигляді

$$N_0 = -\bar{U} \beta EF; \quad u_0 = \bar{U}; \quad u|_{x=0} = Y_{\max}^{\text{soil}}. \quad (16)$$

Тоді з формули (9) з урахуванням знаків сили реакції ґрунту, а також співвідношення $\bar{q} = \beta^2 EF \bar{U}$ знайдемо:

$$\Delta x_+ = \frac{1}{\beta} \left(\sqrt{2 \frac{Y_{\max}^{\text{soil}}}{\bar{U}} - 1} - 1 \right). \quad (17)$$

Якщо виконується умова $Y_{\max}^{\text{soil}} \leq \frac{\bar{U}}{2}$, то $\Delta x_+ = 0$, тобто розрахунок починається від початку дії зсувів ґрунту (точка 0 на рис. 2).

Аналогічно знаходимо значення Δx_- з умов

$$N_0 = -\bar{U} \beta EF; \quad u_0 = -\bar{U}; \quad u|_{x=0} = Y_{\min}^{\text{soil}}. \quad (18)$$

Тоді

$$\Delta x_- = \frac{1}{\beta} \left(\sqrt{2 \frac{|Y_{\min}^{\text{soil}}|}{\bar{U}} - 1} - 1 \right). \quad (19)$$

Якщо виконується умова $|Y_{\min}^{\text{soil}}| \leq \frac{\bar{U}}{2}$, то $\Delta x_- = 0$, тобто розрахунок починається від початку дії зсувів ґрунту. Остаточню Δx визначаємо як максимальне зі знайдених значень Δx_- та Δx_+ .

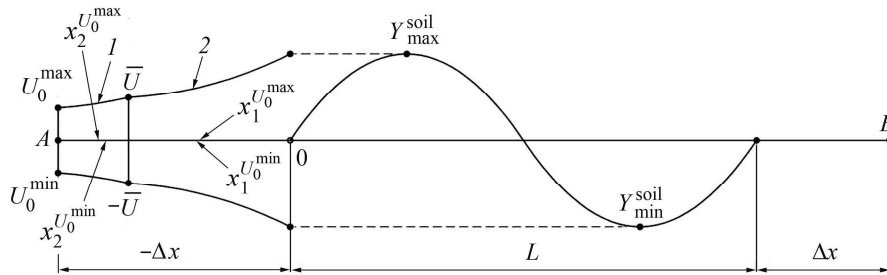


Рис. 2. Схема розрахунку напруженого стану трубопроводу в зонах шахтних виробіток: 1 – пружна взаємодія; 2 – пластична.

Fig. 2. Calculation scheme of the stress state of the pipeline in the areas of mine roadways: 1 – elastic solution; 2 – plastic solution.

Подальший алгоритм розв'язку охоплює такі кроки.

1. Розрахункову ділянку розбиваємо на N елементарних.
2. Задаємо інтервал можливих значень u , де $u_0^{\min} < u < u_0^{\max}$ і вибираємо початкове значення переміщень трубопроводу $u_c = (u_0^{\min} + u_0^{\max}) / 2$ у точці з осьовою координатою $x = -\Delta x$.

3. З урахуванням прийнятого значення u_c послідовно визначаємо напружений стан для всіх елементарних ділянок. При цьому для певної з них використовуємо рівняння для пластичної або пружної взаємодії залежно від співвідношення між переміщенням ґрунту та трубопроводу на початку елементарної ділянки.

4. Для кожної елементарної ділянки перевіряємо умови збіжності розв'язку: якщо $u(x) > Y_{\max}^{\text{soil}} + \bar{U}$ і $N(x) < 0$, то задаємо нове значення $u_0^{\max} = u_c$ і переходимо до кроку 2; якщо $u(x) < Y_{\min}^{\text{soil}} - \bar{U}$ і $N(x) > 0$, то задаємо нове значення $u_0^{\min} = u_c$ і переходимо до кроку 2; якщо $x > L$ і $N(x) > u(x)\beta EF$, то задаємо нове значення $u_0^{\min} = u_c$ і переходимо до кроку 2; якщо $x > L$ і $N(x) < u(x)\beta EF$, то задаємо нове значення $u_0^{\max} = u_c$ і переходимо до кроку 2.

5. Розрахунок продовжуємо, поки розв'язки на двох послідовних ітераціях не відрізняться один від одного з наперед заданою точністю.

Така аналітична процедура розрахунку придатна для визначення напруженого стану підземних газопроводів-відводів у зоні відпрацювання шахтної лави з типовим характером поздовжніх зміщень поверхні ґрунту (за наявності ділянок лінійно-пружної і пластичної взаємодії поверхні газопроводу та ґрунту). Однак, коли ділянка газопроводу-відводу зазнає впливу від шахтної виробітки з утворенням значних зон лінійно-пружної взаємодії поверхні газопроводу та ґрунту (розташування лінії газопроводу-відводу в зоні впливу без перетину шахтної виробітки), забезпечити умову збіжності розв'язку за цим алгоритмом фізично неможливо.

В основному розв'язки задач за моделлю з пружно-пластичними взаємодіями отримують, використовуючи елементні пакети типу "ANSYS" або "ABAQUS" і спеціальну програму для двовимірного моделювання труб, розроблену в лабораторії "ASME": "PIPLIN", або інші програмні пакети, що адекватно враховують наведені вище припущення.

Варто зауважити, що модель не оперує тільки аналітичними процедурами, оскільки пряме аналітичне оцінювання деформацій трубопроводу, без розв'язку задачі про деформацію ґрунту, досить некоректне, бо не враховує дійсну фізичну картину їх взаємодії, а отже, унеможливує використання реальних фізичних моделей деформування власне трубопроводу. Більше того, про адекватність напів-аналітичних моделей, зокрема моделі з пружно-пластичними пружинами, свідчить збіг результатів повномасштабного натурного експерименту з розрахунковими.

Перейдемо до опису моделі. Нехай розглянутий елемент трубопроводу перебуває в ґрунті (рис. 3а).

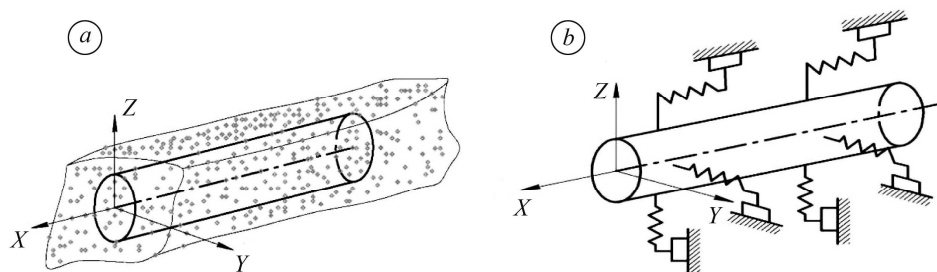


Рис. 3. Елемент трубопроводу в ґрунті.

Fig. 3. Element of the pipeline in the soil.

Спочатку проаналізуємо взаємовплив трубопроводу і ґрунту. Для цього визначимо основні пружно-пластичні властивості ґрунту, в якому знаходиться розглянутий елемент трубопроводу, і сили, які на нього діють. Вплив цих сил і змодельуємо пружно-пластичними пружинами (рис. 3б).

Подальший алгоритм охоплює такі кроки: лінію трубопроводу розбиваємо на N елементарних ділянок; взаємодію між поверхнею трубопроводу та ґрунтом задаємо відповідними пружинами, жорсткість яких свідчить про пружно-пластичну поведінку ґрунту; переміщення ґрунту через пружини прикладаємо до вузлів трубопроводу, після чого розраховуємо переміщення та осьову силу в трубопроводі.

Для верифікації запропонованого методу виконали порівняльний розрахунок, використовуючи метод скінченних елементів (МСЕ). Моделювали пружно-пластичну поздовжню пружину, використовуючи фізико-механічні властивості суглинку та геометричні параметри труби: питому вагу $\gamma_g = 17000 \text{ Н/м}^3$; зчеплення $c_g = 28 \text{ кПа}$; кут внутрішнього тертя $\phi_g = 22 \text{ град}$; зовнішній діаметр труби $D_n = 0,325 \text{ м}$; узагальнений коефіцієнт дотичного опору ґрунту $C_x = 3 \text{ МПа/м}$.

Під час моделювання трубопроводу МСЕ застосовували елементи балкового типу Beam 188. Товщина стінки трубопроводу $0,006 \text{ м}$. Взаємодію труби та ґрунту моделювали елементом Combin 39. Пружини відтворювали пружно-пластичну поведінку ґрунту і розташовані через кожних $0,5 \text{ м}$ по всій довжині трубопроводу. Модель складається з 1880 балкових елементів та з 1881 пружинного елемента.

Тестові розрахунки виконали для трьох випадків поздовжніх зміщень ґрунту. В першому випадку (див. рис. 4, крива 1) по всій довжині трубопроводу діють поздовжні переміщення з максимальною інтенсивністю $0,08 \text{ м}$. Тут на всій ділянці газопроводу відбувається пружна взаємодія поверхні труби та ґрунту. Макси-

мальна інтенсивність переміщень для другого випадку 0,24 м. Тут (рис. 4, крива 2) враховували переміщення ґрунту в результаті відпрацювання типової шахтної лави. Вздовж ділянки трубопроводу діють як пружні, так і пластичні сили взаємодії між поверхнею труби та ґрунтом. Для третього випадку (рис. 4, крива 3) взяли рівень поздовжніх переміщень, коли вздовж ділянки трубопроводу діятимуть переважно пластичні сили взаємодії між його поверхнею та ґрунтом. Максимальна інтенсивність переміщень 0,71 м.

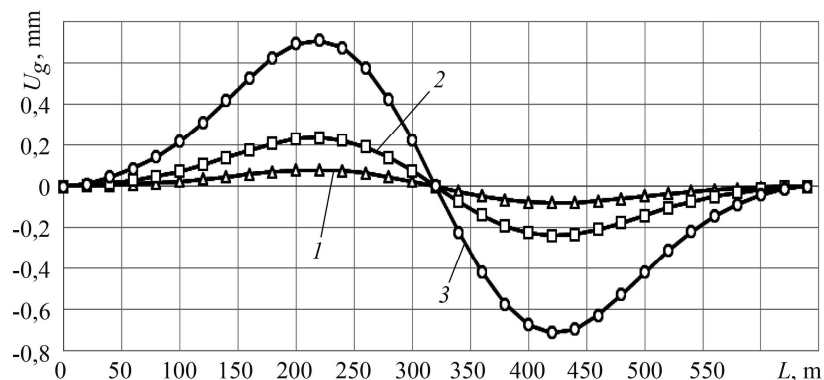


Рис. 4. Вхідні дані для тестових розрахунків.

Fig. 4. Input data for test calculations.

Порівняльний аналіз засвідчив збіжність результатів за типової взаємодії поверхні трубопроводу та ґрунту. Похибка між методами становить 7%. Основною їх відмінністю є кількість необхідних ітерацій та швидкість розрахунків, що відіграє важливу роль під час подальшої модернізації, щоб врахувати історію навантаження. Запропонований метод на декілька порядків ефективніший і в декілька разів швидший, ніж МСЕ.

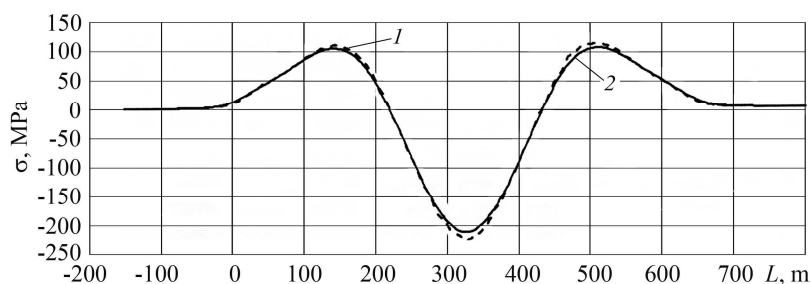


Рис. 5. Результати визначення напруженого стану трубопроводу: суцільна крива – МС; штрихова – МСЕ.

Fig. 5. Results of calculating the stress state of the pipeline: solid curve – method of shooting; dashed – finite element method.

Порівняли (рис. 5) результати розрахунків напружень у трубопроводі, одержані МС і МСЕ.

Рис. 6 ілюструє складнішу ситуацію, коли є дві суміжні виробітки і зона впливу значно довша. Тут наведені результати розрахунку на $i-1$ та i -их ітераціях, коли через незначне уточнення граничних умов на початку, вони не узгоджуються на кінці ділянки. Це не є недоліком методу, а особливістю поведінки розв'язку для задач з експоненціально затухаючими крайовими умовами, коли на нескінченності граничні умови не дорівнюють нулю, а прямують до нього.

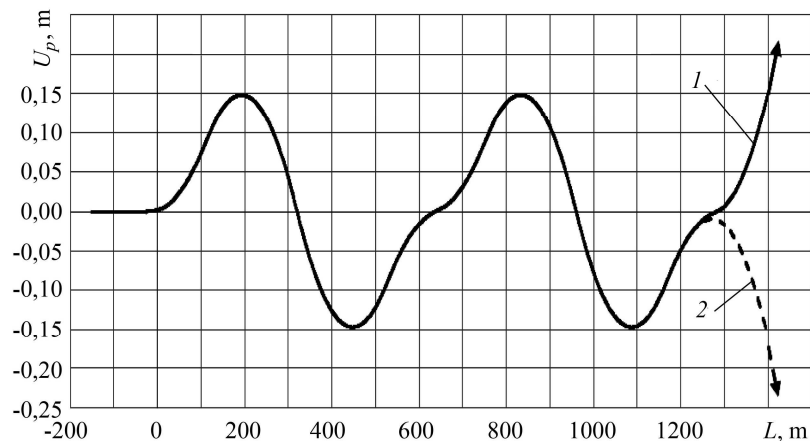


Рис. 6. Результати розрахунку осьових переміщень трубопроводу для двох суміжних шахтних виробіток: 1 – $i-1$ -ша – ітерація; 2 – i -та ітерація.

Fig. 6. Results of calculation of the pipeline axial displacements for two adjacent main roadways: 1 – the $i-1$ iteration; 2 – the i iteration.

ВИСНОВКИ

Вивчено можливості застосування МС для фізично нелінійної задачі взаємодії довгого трубопроводу з ґрунтом, поздовжні переміщення якого обумовлені просіданням землі від заповнення пустот під час видобутку вугілля. Виявлено, що він надзвичайно ефективний для задач, де відомий аналітичний вираз матриці переходу від попередньої ділянки до наступної. Це свідчить про його придатність для складніших задач, де можуть виникнути інші види нелінійності – пластичне деформування труби, геометрична нелінійність тощо. Певні складнощі обґрунтувати збіжність задачі можуть виникати, коли граничні умови не фіксовані в деяких точках, а експоненціально зникають на нескінченності.

РЕЗЮМЕ. Состояние трубопровода, находящегося в зоне движений земной поверхности, вызванных шахтными выработками, определено методом стрельбы (МС). Трубопровод разбит на элементарные участки, для которых на основе решения дифференциальных уравнений приведены аналитические уравнения связи между параметрами в начале и в конце участка. Это позволяет по значениям перемещений и сил в первой точке определить значения в каждой другой. При этом использовано аналитическое условие связи между ними в первой точке. Итерационно уточнены первые значения перемещения, пока не будут удовлетворены граничные условия на конце трубопровода. Алгоритм уточнения построен на методе деления отрезка на два и выборе следующего отрезка в зависимости от знака функции на противоположном конце. На примере нескольких типичных перемещений земли (малые – упругое взаимодействие грунта и трубы, средние – смешанное упругое и пластическое, и большие – пластическое) оценена скорость и точность МС по сравнению с другими процедурами и коммерческими программами. Отмечено, что метод эффективный для упругих задач, а физическая нелинейность не влияет на скорость и точность расчета МС по сравнению с линейной задачей.

SUMMARY. The method of shooting (MS) is used for determining the state of a pipeline located in the area of the earth surface shifts caused by mine roadways. The pipeline is divided into elementary areas for which the analytical equations of relationships between the parameters at the beginning of the area and at the end of it are given on the basis of the differential equations solution. This allows, by using the values of displacements and forces at the first point, to determine such values at each second point. In this case the analytical condition of the relation between them at the first point is used. These first values of the movement are iteratively refined until the boundary conditions at the end of the pipeline are satisfied. The algorithm for such a refinement is based on the division of the segment into two and the choice of the next segment,

depending on the sign of the function on the opposite end. On the example of several typical earth displacements (small – elastic interaction of soil and pipes, medium – mixed elastic and plastic interaction, and large – plastic nature of interaction), the speed and accuracy of MS are considered in comparison with other numerical procedures and commercial programs. It is noted that the method is effective for elastic problems, and the presence of physical nonlinearity does not affect the speed and accuracy of the MS calculation compared to the linear problem.

1. *Holden J. T.* On the finite deflections of thin beams // *Int. J. Solids Struct.* – 1972. – **8**. – P. 1051–1055.
2. *Wang C. Y.* Postbuckling of an externally pressurized ring with a hinge // *Int. J. Solids Struct.* – 1991. – **27**. – P. 1287–1293.
3. *Pai P. F. and Palazotto A. N.* Large-deformation analysis of flexible beams // *Int. J. Solids Struct.* – 1996. – **33**, № 9. – P. 1335–1353
4. *Plaut R. H. and Eatherton M. R.* Lateral-torsional buckling of butterfly-shaped beams with rectangular cross section // *Eng. Struct.* – 2017. – **136**. – P. 210–218.
5. *Kong Lingfei, Li Yan, and Zhao Zhiyuan* Numerical investigating nonlinear dynamic responses to rotating deep-hole drilling shaft with multi-span intermediate supports // *Int. J. of Non-Linear Mech.* – 2013. – **55**. – P. 170–179.
6. *Zhang H. and Pan J.* Mechanical characteristics of circular arch span pipeline in movement of fixed end Proceedings // *Int. Conf. on Electrical and Control Engineering (ICECE-2010, June 25–27, 2010)*. – USA, Washington, 2010. – P. 1260–1263.
7. *Орыняк І. В., Ясковець З. С.* Розрахунок напруженого стану підземних газопроводів в зонах шахтних виробіток з використанням методу функції внутрішнього відклику // *Проблеми прочності*. – 2018. (подана до друку 12.02.2018)
8. *Орыняк І., Ясковець З., and Mazuryk R.* Basis and correction solutions in numerical procedure for axial stress development in pipelines subjected to mine subsidence // *J. of Pipeline Systems – Eng. and Practice* (submitted for publication 02.07.2018)
9. *Камерштейн А. Г., Рождественский В. В., Ручимский М. Н.* Расчет трубопроводов на прочность; Справ. книга. – М.: Гос. науч.-техн. изд-во нефтяной и горно-топливной литературы, 1963. – 424 с.
10. *Guidelines for the Design of Buried Steel Pipe* // *American Lifelines Alliance*. – July 2001. – 76 p.
11. *Айнбиндер А. Б.* Расчет магистральных и промысловых трубопроводов на прочность и устойчивость; справ. пос. – М.: Недра, 1991. – 288с.
12. *NEN 3650, Requirements for Steel Pipeline Transportation Systems. 1st Ed.* // *Dutch Standard*. – Netherlands: Normalisatie-Instituut, 1998.
13. *Орыняк І. В., Богдан А. В.* Проблема больших перемещений подземных трубопроводов. Сообщение 1. Разработка численной процедуры // *Проблеми прочності*. – 2007. – № 3. – С. 51–74.

Одержано 24.05.2018