

УДК 539.4

ЗАСТОСУВАННЯ НАБЛИЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК ДЛЯ ЗАДАЧІ ПРО ДІЮ ЗОСЕРЕДЖЕНОЇ СИЛИ НА ПОРОЖНИСТИЙ ЦИЛІНДР

Я. Р. ДУБИК¹, І. П. СЕЛІВЕРСТОВА²

¹ ТОВ "ІПП-Центр", Київ;

² Інститут проблем міцності ім. Г. С. Писаренка НАН України, Київ

Розроблено наближені розв'язки теорії оболонок та поєднано їх через крайові умови. Застосовано припущення щодо характеру похідних основних функцій (змінних), що дало змогу спростити вихідне диференціальне рівняння теорії оболонок восьмого ступеня до системи з двох рівнянь четвертого ступеня, розв'язки яких отримано для головних змінних. Точність розв'язку продемонстровано на класичній задачі дії зосереджених сил на оболонку.

Ключові слова: *циліндрична оболонка, теорія Власова, зосереджена сила.*

Напівбезмоментна теорія оболонок В. З. Власова [1] є дуже зручною для інженерної практики. Її перевага в тому, що на відміну від "повних" теорій, вона зводиться до добре вивченого диференціального рівняння 4-го порядку. Її застосування дало змогу отримати багато корисних практичних розв'язків: для трубопроводів з дефектами [2], для композитних оболонок [3], коливань [4], для динамічних задач [5]. Проте її точність обмежена, особливо для задач з великим градієнтом навантажень, як, наприклад, за дії зосереджених зусиль [6]. Для таких складних задач використовують повне формулювання теорії оболонок [7, 8]. Наприклад, раніше [7] наведено асимптотичну формулу для прогинів циліндричної оболонки під дією двох сил:

$$w(0,0) = 0,747 \cdot \sqrt{R/hPR} / (Eh^2). \quad (1)$$

Проте останнім часом аналітичне дослідження цих класичних задач теорії оболонок є недоцільним з огляду на можливості сучасних скінченно-елементних пакетів. Вважають, що прості аналітичні розв'язки були б корисні не тільки з освітньої точки зору, але і для глибшого розуміння дії локальних зусиль, а також для можливості включення таких розв'язків у стандарти, наприклад, нафтогазової галузі, де дія локальних зусиль, наприклад, точкових опор для повітряних переходів, є достатньо суттєвою.

Мета роботи – отримати готові до використання вирази для головних змінних наближених теорій оболонок, а також поєднати їх в аналізі класичної задачі дії зосереджених зусиль на оболонку.

Ця робота є продовженням досліджень з теорії оболонок, що поєднують простоту напівбезмоментної теорії Власова з точністю через використання понять "короткого" (швидко загасає по осі оболонки) та "довгого" (повільно) розв'язків [2, 5, 9]. Тут використовуємо повний зв'язок між коротким та довгим розв'язками, а також вперше в явному вигляді отримуємо залежності для основних змінних цих розв'язків, що значно спростить використання цих рівнянь для інших застосувань.

Контактна особа: Я. Р. ДУБИК, e-mail: dubykir@gmail.com

Математичне формулювання. Рівняння рівноваги циліндричної оболонки є загальновідомі [1, 9]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial L}{R\partial\varphi} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial N_\varphi}{R\partial\varphi} + \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{Q_\varphi}{R} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_\varphi}{R\partial\varphi} - \frac{N_\varphi}{R} = 0, \quad (4)$$

де N_x, N_φ – осьова та колова сили; L – дотична сила; Q_x, Q_φ – поперечні сили.

Також потрібні вирази для поперечних сил подані через переміщення:

$$Q_x = D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{R^2 \partial x \partial \varphi^2} - \frac{(1+\mu)}{2R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial x} \right], \quad (5)$$

$$Q_\varphi = D \left[\frac{\partial^3 w}{R^3 \partial \varphi^3} - \frac{\partial^2 v}{R^3 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^3 w}{R \partial x^2 \partial \varphi} - \frac{(1-\mu) \partial^2 v}{2R \partial x^2} \right]. \quad (6)$$

Зазвичай для розв'язку задач теорії оболонок використовують розклад у ряд Фур'є. Нижче розглянемо поняття “короткого” та “довгого” розв'язків теорії оболонок, використовуючи припущення, що амплітуда радіальних переміщень $w > (v, u)$ завжди більша, ніж інші компоненти переміщень.

“Короткий” розв'язок. Припустимо, що $d^2\Phi/dx^2 \gg d^2\Phi/(Rd\varphi)^2$, тоді, враховуючи (5), (6), $Q_\varphi \ll Q_x$, можемо Q_φ у системі (3) знехтувати. Вилучаючи L в рівнянні (2), отримаємо, що $\partial^2 N_\varphi / \partial \varphi^2 \approx \partial^2 N_x / \partial x^2$. Згідно з цим припущенням можемо записати $N_\varphi \gg N_x$. Таким чином, можна стверджувати, що

$$\varepsilon_x = \partial u / \partial x \approx -\mu \varepsilon_\varphi, \quad N_\varphi = -H(1-\mu^2)\varepsilon_\varphi = -Eh\varepsilon_\varphi. \quad (7)$$

Підставляючи вираз (7) в (3), отримаємо:

$$\begin{aligned} E \frac{\partial \varepsilon_\varphi}{R \partial \varphi} + G \frac{\partial^2 u}{R \partial x \partial \varphi} + G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial \varepsilon_\varphi}{R \partial \varphi} (E - \mu G) + G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \\ &= \frac{\partial w}{R^2 \partial \varphi} + \left(\frac{G}{E - \mu G} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{R^2 \partial \varphi^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Враховуючи характер функції, з рівняння (8) можемо зробити висновок, що $\partial v / \partial \varphi \ll w$ та $\varepsilon_\varphi \approx w / R$. Тому

$$N_\varphi = -Ehw / R. \quad (9)$$

Підставивши рівняння (9) у (4) з врахуванням (5), (6), і, нехтуючи коловими переміщеннями, отримаємо диференціальне рівняння 4-го порядку стосовно $w(x, \varphi) = \Phi_n(x) \cdot \cos(n\varphi)$:

$$\frac{d^4 \Phi_n(x)}{dx^4} - 2A \frac{d^2 \Phi_n(x)}{dx^2} + B \Phi_n = 0, \quad (10)$$

де $A = \mu \frac{n^2}{R^2}$, $B = \left(\frac{n}{R}\right)^4 + 12 \frac{(1-\mu^2)}{R^2 h^2}$, і, нехтуючи зростаючими членами, отримаємо розв'язок (10):

$$\Phi_n(x) = C_1 e^{-c_n x} \cos(d_n x) + C_2 e^{-c_n x} \sin(d_n x), \quad (11)$$

де $\rho \cos \psi = c_n$, $\rho \sin \psi = d_n$, $\rho^2 = \sqrt{A^2 + D^2}$, $2\psi = \arctg(D/A)$. Короткий розв'язок характеризується чотирма головними параметрами: радіальне переміщення w , кут повороту γ_x , осьовий момент M_x та поперечна сила Q_x . В кінцевому вигляді його подамо так:

$$w = (C_1 F_1(x) + C_2 F_2(x)) \cos(n\varphi), \quad (12)$$

$$\gamma_x = -\left(C_1 (-aF_1(x) - bF_2(x)) + C_2 (-aF_2(x) + bF_1(x))\right) \cos(n\varphi), \quad (13)$$

$$M_x = H\delta \left[\begin{array}{l} C_1 (F_1(x)((a)^2 - (b)^2) + 2abF_2(x)) + \\ + C_2 (F_2(x)((a)^2 - (b)^2) - 2baF_1(x)) \end{array} \right] - \mu \frac{n^2}{R^2} (C_1 F_1(x) + C_2 F_2(x)) \cos(n\varphi), \quad (14)$$

$$Q_x = D \left[\begin{array}{l} C_1 \left(\left(-(a)^3 + 3a(b)^2 \right) F_1(x) + \left((b)^3 - 3b(a)^2 \right) F_2(x) \right) + \\ + C_2 \left(-(a)^3 + 3a(b)^2 \right) F_2(x) + \left(-(b)^3 + 3b(a)^2 \right) F_1(x) - \\ - \frac{n^2}{R^2} \left(C_1 (-aF_1(x) - bF_2(x)) + C_2 (-aF_2(x) + bF_1(x)) \right) \end{array} \right] \cos(n\varphi), \quad (15)$$

$$v(x, \varphi) = \left[\begin{array}{l} \left(\frac{n(2C_2 ab(\mu + 2) + C_1(\mu + 2)(a^2 - b^2))}{R^2(a^2 + b^2)^2} \right) F_1(x) + \\ + \left(-\frac{n(2C_1 ab(\mu + 2) + C_2(\mu + 2)(b^2 - a^2))}{R^2(a^2 + b^2)^2} \right) F_2(x) \end{array} \right] \sin(n\varphi), \quad (16)$$

$$u(x, \varphi) = (A_1 F_1(x) + A_2 F_2(x)) \cos(n\varphi) =$$

$$= \left(\frac{\mu(C_1 a + C_2 b)}{R(a^2 + b^2)} F_1(x) - \frac{\mu(C_1 b + C_2 a)}{R(a^2 + b^2)} F_2(x) \right) \cos(n\varphi), \quad (17)$$

$$L(x, \varphi) = \left[(E_1 C_1 + E_2 C_2) F_1(x) - (E_2 C_1 - E_1 C_2) F_2(x) \right] \sin(n\varphi), \quad (18)$$

$$E_1 = - \left(\frac{R^4(a^4 - 2a^2 b^2 - 3b^4) - 2R^2 \mu n^2(a^2 + b^2) + 2R^2 \mu(a^2 + b^2) - R^2(a^2 + b^2) + n^4 - n^2}{(a^2 + b^2)R^4} \right) a D n,$$

$$E_2 = \left(\frac{R^4(3a^4 + 2a^2 b^2 - b^4) - 2R^2 \mu n^2(a^2 + b^2) + 2R^2 \mu(a^2 + b^2) - R^2(a^2 + b^2) - n^4 + n^2}{(a^2 + b^2)R^4} \right) b D n,$$

$$N_x(x, \varphi) = \left[\begin{aligned} & \left(\frac{C_1(E_1a - E_2b)n}{(a^2 + b^2)R} + \frac{C_2(E_1b + E_2a)n}{(a^2 + b^2)R} \right) F_1(x) + \\ & + \left(-\frac{C_1(E_1b + E_2a)n}{(a^2 + b^2)R} + \frac{C_2(E_1a - E_2b)n}{(a^2 + b^2)R} \right) F_2(x) \end{aligned} \right] \cos(n\varphi). \quad (19)$$

Тут введено функції $F_1(x) = e^{-c_n x} \cos(d_n x)$, $F_2(x) = e^{-c_n x} \cos(d_n x)$. Окрім чотирьох основних параметрів, короткий розв'язок (12)–(15) буде довгий (16)–(19): колове переміщення v , осьове переміщення u , бічна L та осьова сили N_x , для яких вирази отримано в явному вигляді. Зауважимо, що при $n = 0$ короткий розв'язок – добре відомий осесиметричний крайовий ефект у циліндричних оболонках, при цьому $L = N_x \equiv 0$.

“Довгий” розв'язок. Припустимо, що $d^2\Phi/dx^2 \ll d^2\Phi/(Rd\varphi)^2$, тоді з виразів (4)–(6) слідує, що $\partial Q_\varphi / \partial \varphi \approx N_\varphi$. Потім вилучаємо дотичну силу з рівнянь (2) та (3), відповідно отримуємо, що $\partial^2 N_\varphi / \partial \varphi^2 \approx \partial^2 N_x / \partial x^2$. Згідно з припущенням $N_\varphi \ll N_x$. Тепер можна стверджувати, що $\varepsilon_\varphi \approx -\mu\varepsilon_x$, та

$$N_x = -H(1 - \mu^2) = -Eh(\partial u / \partial x). \quad (20)$$

Продиференціюємо рівняння (4) відносно кутової координати φ один раз та віднімемо від рівняння (3). Диференціюючи одержане рівняння один раз відносно координати φ і замінивши його на співвідношення (2), яке диференційовано щодо осьової координати x , отримаємо таке рівняння:

$$\frac{\partial^2 N_x}{\partial x^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^3 Q_x}{\partial \varphi^2 \partial x} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 Q_\varphi}{\partial \varphi} = 0. \quad (21)$$

Підставляючи значення поперечних сил (5) та (6) і виражаючи N_x зі співвідношення (20), рівняння (21) запишемо через функції $u(x, \varphi)$, $v(x, \varphi)$, $w(x, \varphi)$. Тут, згідно з припущеннями $\partial v / \partial \varphi \approx -w$ та $\partial u / \partial \varphi = -R \cdot \partial v / \partial x$, задачу формулюємо лише через тангенціальні переміщення $v(x, \varphi, t)$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^4} + \frac{R^2 12(1 - \mu^2)}{h^2} v \right) + \frac{1}{2R^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\left(2 \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^2 v - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right] + \\ & + \frac{1}{R^4} \left[\left(\frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)^2 v \right] = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Подамо переміщення $v(x, \varphi)$ як $v(x, \varphi) = \Phi(x) \cdot \sin(n\varphi)$, тоді рівняння (22) перепишемо так:

$$\frac{d^4 \Phi(x)}{dx^4} - 2A \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} + B \Phi(x) = 0, \quad (23)$$

$$\text{де } A = \frac{1}{R^2} \frac{n^6 - n^4 + \frac{n^2(1-\mu)}{4}}{n^4 + \frac{R^2 12(1-\mu^2)}{h^2}}, \quad B = \frac{1}{R^4} \frac{n^4(n^2-1)^2}{n^4 + \frac{R^2 12(1-\mu^2)}{h^2}}.$$

I, знову нехтуючи зростаючими членами, отримаємо розв'язок:

$$\Phi(x) = C_1 e^{-a_n x} \cos(b_n x) + C_2 e^{-a_n x} \sin(b_n x), \quad (24)$$

де $\rho \cos \psi = a_n$, $\rho \sin \psi = b_n$, $\rho^2 = \sqrt{A^2 + D^2}$, $2\psi = \arctg(D/A)$, $B - A^2 = D^2$. Зауважимо, що a_n та b_n тотожно дорівнюють нулю при $n = 0, 1$, тому довгий розв'язок існує лише при $n \geq 2$. Він характеризується чотирма основними змінними: v , u , N_x та L , які, використовуючи розв'язок (24), подамо так:

$$v = (C_3 F_3(x) + C_4 F_4(x)) \sin(n\varphi), \quad (25)$$

$$u(x, \varphi) = -\frac{R}{n} ((C_3 a + C_4 b) F_3(x) - (C_3 b + C_4 a) F_4(x)) \cos(n\varphi), \quad (26)$$

$$N_x = \frac{HR}{n} \left[\begin{array}{l} (C_3 \mu^2 (a^2 - b^2) - 2C_4 ab (\mu^2 - 1) - C_3 (a^2 - b^2)) F_3(x) + \\ + (2C_3 ab (\mu^2 - 1) + C_4 \mu^2 (a^2 - b^2) - 2C_4 (a^2 - b^2)) F_4(x) \end{array} \right] \cos(n\varphi), \quad (27)$$

$$L_{x\varphi} = \frac{HR^2}{n^2} \left[\begin{array}{l} (C_3 \mu^2 (a^3 - 3ab^2) + C_4 \mu^2 (b^3 - 3a^2b) + \\ + C_3 (3ab^2 - a^3) + C_4 (3a^2b - b^3)) F_3(x) + \\ + (C_3 \mu^2 (3ab^2 - b^3) + C_4 \mu^2 (a^3 - 3ab^2) + \\ + C_3 (b^3 - 3a^2b) + C_4 (3ab^2 - a^3)) F_4(x) \end{array} \right] \sin(n\varphi), \quad (28)$$

$$w = -(C_3 F_3(x) + C_4 F_4(x)) \cos(n\varphi) n, \quad (29)$$

$$\gamma_x = (F_3(x) (C_4 b - C_3 a) - F_4(x) (C_3 b + C_4 a)) \cos(n\varphi) n, \quad (30)$$

$$Q_x = \left[\begin{array}{l} F_3(x) C_3 a (2R^2 a^2 - 6R^2 b^2 - 2n^2 + \mu + 1) + \\ + F_3(x) C_4 b (2R^2 b^2 - 6R^2 a^2 + 2n^2 - \mu - 1) + \\ + F_4(x) C_3 b (6R^2 a^2 - 2R^2 b^2 - 2n^2 + \mu + 1) + \\ + F_4(x) C_4 a (2R^2 a^2 - 6R^2 b^2 - 2n^2 + \mu + 1) \end{array} \right] \cos(n\varphi), \quad (31)$$

$$M_x = \left[-\frac{H \delta n}{R^2} \left(\begin{array}{l} F_3(x) (C_3 R^2 a^2 - C_3 R^2 b^2 - C_3 \mu n^2 + C_3 \mu - 2C_4 R^2 ab) + \\ + F_4(x) (2C_3 R^2 ab + C_4 R^2 a^2 - C_4 R^2 b^2 - C_4 \mu n^2 + C_4 \mu) \end{array} \right) \right] \cos(n\varphi). \quad (32)$$

Тут введено функції $F_n^3(x) = e^{-a_n x} \cos(b_n x)$; $F_n^4(x) = e^{-a_n x} \sin(b_n x)$. Окрім чотирьох основних параметрів, довгий розв'язок (25)–(28) утворює короткий (29)–(32): радіальне переміщення w , кут нахилу γ_x , поперечна сила Q_x та момент M_x , для яких вирази отримано у явному вигляді.

Аналіз дії зосереджених сил на оболонку. Розглянемо дві задачі: простішу – дві радіальні протилежно прикладені сили у точках $\varphi = 0$ і $\varphi = \pi$ у серединному перерізі $x = 0$ та складнішу – дія однієї зосередженої сили при $x = 0$, $\varphi = 0$.

Задача симетрична, тому достатньо розглянути лише половину циліндра. Зовнішня зосереджена сила врівноважується поперечною Q_x^{short} , що є властивістю короткого розв'язку (12)–(15), який описуємо двома незалежними константами C_1 , C_2 , які визначаємо з двох крайових умов у перерізі $x = 0$: поперечна сила дорівнює зовнішній прикладеній, інша впливає з умов симетрії – кут повороту $\gamma_x^{\text{short}} + \gamma_x^{\text{long}} = 0$. Проте короткий розв'язок формує відносно велику дотичну силу і для того, щоб її врівноважити, оскільки за умови симетрії в центральному сеченні вона має дорівнювати нулю, використаємо довгий розв'язок, тобто $L^{\text{short}}(0) + L^{\text{long}}(0) = 0$. Другою крайовою умовою є рівність нулю осьових переміщень: $u^{\text{short}} + u^{\text{long}} = 0$.

Нижче розглянемо три циліндричні оболонки з товщиною стінки 1 mm та радіусами 100, 50 і 10 mm. Для порівняння з аналітичними розрахунками створено скінченно-елементну оболонкову модель у програмному забезпеченні ANSYS (тип елемента SHELL181), де завдяки симетрії достатньо розглянути тільки четверту частину моделі. Для визначення достатньої довжини числової моделі необхідно оцінити довжину загасання хвилі деформації $l_0 = 4 \cdot R \sqrt{R/t}$, щоб мінімальна довжина моделі її перевищувала ($l_{\text{min}} > l_0$).

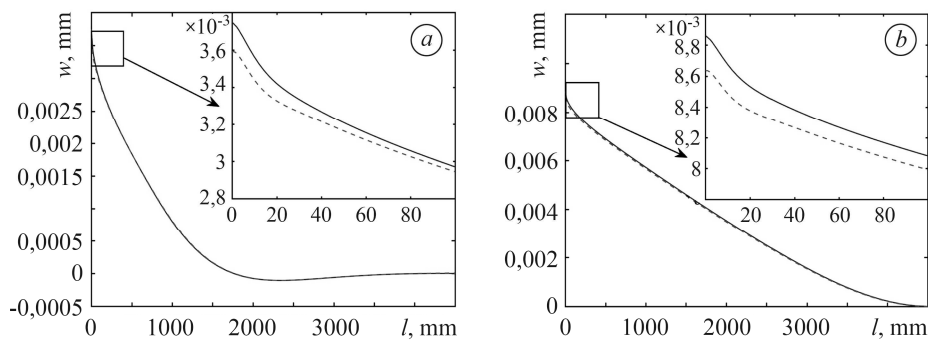
Дві протилежно направлені сили. Позначимо зовнішню зосереджену силу як P (прикладена у точці $\varphi = 0$ та $\varphi = \pi$) та розкладемо у ряд Фур'є дві протилежні сили:

$$P = \sum_{n=0} Q_x^{\text{external}}(\varphi) = \frac{P}{2\pi R} + \frac{P/2}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} (1 + (-1)^n) \cos(n\varphi), \quad (33)$$

де $Q_{2,0}^n(\varphi)$ – розклад за дії двох радіальних сил. Враховуючи зазначені вище умови у сеченні $x = 0$, будуємо систему рівнянь для кожного n . Розв'язок цієї системи шукаємо стосовно C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , щоб легко отримати значення всіх змінних. Кінцевий результат для всіх змінних є сумою короткого та довгого розв'язків, наприклад, $w(x, \varphi) = w^{\text{short}} + w^{\text{long}}$. Результати числових методів скінченних елементів (МСЕ) та аналітичних розрахунків показані на рисунку. Як бачимо, різниця між цими кривими у зоні прикладання зусилля невелика. Аналітичний розв'язок достатньо точно описує як характер, так і числові значення прогинів оболонки. Наведено порівняння з асимптотичною формулою (1) (див. таблицю). Можемо стверджувати, що формула (1) є хорошим наближенням і дає розбіжність з МСЕ для $R = 100$ та $R = 50$ у 0,3...0,5%, а для $R = 10$ – у 7%. Для всіх типорозмірів труб – дуже тонких ($R = 100$), помірно тонких ($R = 50$) і відносно товстих ($R = 10$) є така ж тенденція: аналітичний розв'язок дає результати, які трохи нижчі числових.

Радіальне переміщення у точці прикладення сили

R/h	Дві сили			Одна сила		
	100	50	10	100	50	10
Формула (1)	0,003735	0,001321	0,000118	–	–	–
МСЕ	0,003748	0,001328	0,000128	0,008861	0,002813	0,000659
Аналітичний розв'язок	0,003589	0,001244	0,000101	0,008634	0,002682	0,000600



Радіальні переміщення вздовж осьової координати $\varphi = 0$ для $R = 100$:
 а – дві зосереджені сили; б – одна зосереджена сила;
 суцільна крива – числовий розрахунок; пунктирна – аналітичний розв’язок.

Radial displacements for $R = 100$ along axial coordinate $\varphi = 0$:
 а – two opposite radial forces; б – one radial force;
 solid line – FEM calculation; dashed – analytical calculation.

Одна зосереджена сила. Складнішою задачею є дія однієї зосередженої сили, де для половини труби вона дорівнює $P/2$. Розкладемо її в ряд Фур’є за кутовою координатою:

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{1,o}^n(\varphi) = \frac{P/2}{2\pi R} + \frac{P/2}{\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\varphi). \quad (34)$$

Загальний алгоритм аналітичного розв’язку залишається незмінним – для кожного n розв’язуємо систему стосовно коефіцієнтів C_1, C_2, C_3, C_4 . Єдина відмінність полягає в тому, що до всіх оболонкових переміщень необхідно додати прогин балки. Числові результати одразу дають повний розв’язок “оболонка + балка”, а в аналітичній схемі потрібно отримати і додати його окремо. Результати аналітичного розв’язку показують добру збіжність з числовими (див. рисунок, таблицю). Зауважимо, що дія однієї зосередженої сили є показовою при застосуванні короткого та довгого розв’язків та доводить їх точність і ефективність.

ВИСНОВКИ

Введено поняття “короткого” (який швидко загасає) та “довгого” (повільно загасає) розв’язків та поєднано їх через крайові умови. Для зручного використання цих розв’язків отримано в явному вигляді записи для всіх основних змінних. Одержані залежності використано для аналізу класичної задачі дії зосередженої сили на циліндричну оболонку. Розглянуто як простішу задачу – дію двох протилежно напрямлених сил, так і складнішу – дію однієї зосередженої сили. Отримані результати порівняно з числовим розв’язком, а для двох протилежно напрямлених сил – також з апроксимаційною формулою. Показано високу збіжність аналітичних розв’язків як за характером розподілу прогинів, так і за їх значенням.

РЕЗЮМЕ. Разработаны приближенные решения теории оболочек и объединены за счет граничных условий. Применение гипотез о характере производных основных функций (переменных) дает возможность упростить исходное дифференциальное уравнение восьмого порядка к системе из двух уравнений четвертого порядка, решения которых получены для главных переменных. Точность решения продемонстрирована для классической задачи действия сосредоточенных сил на оболочку.

SUMMARY. The approximate solutions of the shell theory and their combined use due to the boundary conditions are developed. The application of hypotheses about the nature of the

derivatives of the main functions (variables) makes it possible to simplify the initial eighth-order differential equation to a system of two fourth-order equations whose solutions are obtained in terms of principal variables, which simplifies their further application. The accuracy of the solution is demonstrated for the classical problem of the action of concentrated forces on the shell.

1. *Власов В. З.* Общая теория оболочек и ее приложения в технике. – М.: ГИТТЛ, 1949. – 784 с.
2. *Orynyak I., Bogdan A., and Selivestrova I.* The Application of Long and Short Cylindrical Shell Solutions for Stress and Flexibility Determination in a Single Mitred Bend // Proc. of the ASME 2016 Pressure Vessels and Piping Conf. PVP2016-63598 (July 17–21, 2016). – Vancouver, 2016. – P. 10.
3. *Birman V. V.* Extension of Vlasov's semi-membrane theory to reinforced composite shells // ASME. J. Appl. Mech. – 1992. – **59**, № 2. – P. 462–464.
4. *Кан С. Н.* Строительная механика оболочек. – М.: Машиностроение, 1966. – 508 с.
5. *Dubyk I. R. and Orynyak I. V.* Analysis of water hammer due to sudden rupture of reactor coolant system // Proc. of the ASME 2016 Pressure Vessels and Piping Conf. PVP2016-63589 (July 17–21, 2016). – Vancouver, 2016. – P. 9.
6. *Orynyak I. and Oryniak A.* Efficient Solution for Cylindrical Shell Based on Short and Long (Enhanced Vlasov's) Solutions on Example of Concentrated Radial Force // Proc. of the ASME 2018 Pressure Vessels and Piping Conf. PVP2018-85032 (Czech Republic, July 15–20, 2018). – Prague, 2018. – P. 12.
7. *Лукашевич С.* Локальные нагрузки в пластинах и оболочках. – М.: Мир, 1982. – 542 с.
8. *Dafan Ren and Kuan-Chen Fu.* Solutions of complete circular cylindrical shell under concentrated loads // J. of Engng Mech. – 2001. – **127**, № 3. – P. 248–253.
9. *Orynyak I. and Dubyk Y.* Approximate Formulas for Cylindrical Shell Free Vibration Based on Vlasov's and Enhanced Vlasov's Semi-Momentless Theory // Proc. of the ASME 2018 Pressure Vessels and Piping Conf. PVP2018-84932 (Czech Republic, July 15–20, 2018). – Prague, 2018. – P. 10.

Одержано 21.12.2018