

УДК 539.3

РОЗПОДІЛ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ КУТОВИХ ВИРІЗІВ В ОРТОТРОПНІЙ ПРУЖНІЙ ПЛОЩИНІ ЗА АНТИПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

М. П. САВРУК, Л. Й. ОНИШКО, О. І. КВАСНЮК

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

На основі розв'язку антипоскої задачі теорії пружності на власні значення для пружного ортотропного клина отримано розподіл сингулярних напружень і переміщень в околі вершини відповідного кутового вирізу за антипоскої деформації. Методом сингулярних інтегральних рівнянь розв'язано відповідну задачу для ортотропної площини з напівнескінченим кутовим закругленим вирізом та знайдено залежність між коефіцієнтами інтенсивності та концентрації напружень у гострій та закругленій вершинах кутового вирізу.

Ключові слова: механіка руйнування, анізотропія, коефіцієнт інтенсивності напружень, кутовий виріз, антипоска деформація, метод сингулярних інтегральних рівнянь.

Вступ. У машино- та суднобудуванні, авіаційній техніці широко застосовують композитні матеріали, які володіють поліпшеними міцнісними властивостями і які моделюють однорідними ортотропними тілами. Останнім часом актуальні розв'язки задач механіки руйнування для ортотропних тіл з гострими та закругленими кутовими вирізами. Розроблений єдиний підхід до визначення напружень біля гострих та закруглених кутових вирізів в ізотропних тілах [1–4] поширили на відповідні плоскі задачі для ортотропних матеріалів [4–7]. Він дає можливість знаходити коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) у вершині гострого вирізу через напруження у вершинах відповідних закруглених кутових вирізів, які можна отримати за відомими методами, зокрема методом сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) [8]. Нижче встановлено зв'язок між коефіцієнтами інтенсивності та концентрації напружень для гострих та закруглених кутових вирізів для ортотропних тіл за поздовжнього зсуву (ІІІ тип деформування).

Основні співвідношення антипоскої задачі теорії пружності для ортотропного середовища. Розглянемо антипоску деформацію (поздовжній зсув) ортотропного тіла в декартовій системі координат (x, y, z) . Якщо вісь деформації спрямована вздовж осі z , то компоненти вектора пружних переміщень можна подати у вигляді

$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = w = w(x, y). \quad (1)$$

На основі узагальненого закону Гука взаємозв'язок між ненульовими компонентами деформацій $\varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}$ та напруженнями τ_{yz}, τ_{xz} має вигляд [9, 10]

$$2\varepsilon_{yz} = \partial w / \partial y = a_{44} \tau_{yz}, \quad 2\varepsilon_{xz} = \partial w / \partial x = a_{55} \tau_{xz}, \quad (2)$$

$$\tau_{yz} = 2A_{44} \varepsilon_{yz}, \quad \tau_{xz} = 2A_{55} \varepsilon_{xz}, \quad (3)$$

де пружні характеристики ортотропного матеріалу пов'язані між собою співвідношеннями [4, 10]

$$\{A_{44}, A_{55}\} = \{a_{55}, a_{44}\} / a_0^2, \quad a_0 = \sqrt{a_{44}a_{55}} > 0. \quad (4)$$

За відсутності масових сил виконуються рівняння рівноваги

$$\partial \tau_{xz} / \partial x + \partial \tau_{yz} / \partial y = 0,$$

які у переміщеннях мають вигляд

$$a_{44} \partial^2 w / \partial x^2 + a_{55} \partial^2 w / \partial y^2 = 0. \quad (5)$$

Диференційному рівнянню (5) відповідає характеристичне

$$a_{55} \mu^2 + a_{44} = 0, \quad (6)$$

яке має два уявні спряжені корені

$$\mu_3 = i\gamma_3, \quad \bar{\mu}_3 = -i\gamma_3, \quad \gamma_3 = a_0 / a_{55}. \quad (7)$$

Для ортотропного тіла, в якому в кожній точці є три взаємно перпендикулярні площини пружної симетрії і осі x, y – головні осі ортотропії, пружні сталі матеріалу можна виразити через технічні характеристики (модулі зсуву) G_{13}, G_{23} [9]:

$$a_{44} = 1/G_{23}, \quad a_{55} = 1/G_{13}; \quad \gamma_3 = \sqrt{G_{13}/G_{23}}. \quad (8)$$

Загальний розв'язок рівняння (5) подамо через аналітичну функцію $\Phi_3(z_3)$ комплексного аргументу $z_3 = x + i\gamma_3 y$:

$$w(x, y) = a_0 \operatorname{Im} \Phi_3(z_3). \quad (9)$$

За відомими залежностями [3, 11] та співвідношеннями (3) запишемо формули для напружень через комплексний потенціал $\Phi_3(z_3) = \Phi_3'(z_3)$ у декартових

$$\tau_{yz}(x, y) = \operatorname{Re}[\Phi_3(z_3)], \quad \tau_{xz}(x, y) = -\operatorname{Re}[\mu_3 \Phi_3(z_3)] \quad (10)$$

та полярних ($z = x + iy = r \exp(i\theta)$)

$$\tau_{rz} = \operatorname{Re}[\Phi_3(z_3)(\sin \theta - i\gamma_3 \cos \theta)], \quad \tau_{\theta z} = \operatorname{Re}[\Phi_3(z_3)(\cos \theta + i\gamma_3 \sin \theta)] \quad (11)$$

координатах.

За допомогою співвідношень (10) побудуємо формули для знаходження напружень τ_{nz} на межі тіла L зі зовнішньою нормаллю n та дотичних напружень τ_{sz} на криволінійному контурі L на площинах, ортогональних до нього [4]:

$$\begin{aligned} \tau_{sz} &= \operatorname{Re}\{\Phi_3'(t_3)[(1 + \gamma_3)dt/ds - (1 - \gamma_3)d\bar{t}/ds]/2i\}, \\ \tau_{nz} &= -\operatorname{Re}[\Phi_3'(t_3)dt_3/ds], \quad t \in L, t_3 \in L_3. \end{aligned} \quad (12)$$

Контур L_3 у площині z_3 відповідає контуру L у площині z ; s – дугова абсциса точки $t = x + iy \in L$.

Розв'язок антиплоскої задачі теорії пружності на власні значення для анізотропного клина. Розглянемо антиплоску задачу на власні значення для ортотропного пружного клина, що займає область $S = \{(r, \theta); r \geq 0, -\alpha \leq \theta \leq \alpha\}$, де r, θ – полярні координати з полюсом у вершині клина і полярною віссю вздовж його діагоналі ($\beta = \pi - \alpha$) (рис. 1). На гранях клина відсутні дотичні напруження:

$$\tau_{\theta z} = 0, \quad \theta = \pm\alpha. \quad (13)$$

Потенціал напружень шукатимемо у вигляді

$$\Phi_3^0(z_3) = A_3 z_3^{-\lambda}, \quad (14)$$

де $A_3 = A_1 + iA_2$ – комплексна стала, а λ – дійсний параметр.

Запишемо комплексну змінну z_3 у полярній системі координат:

$$z_3 = \sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2} e^{i\beta_3(\theta)}, \quad (15)$$

де

$$\alpha_0 = r \cos \theta, \quad \beta_0 = r \gamma_3 \sin \theta, \quad (16)$$

а кут $\beta_3(\theta)$ (аргумент числа $z_3 = \alpha_0 + i\beta_0$) визначаємо з рівняння

$$\operatorname{tg} \beta_3(\theta) = \gamma_3 \operatorname{tg} \theta. \quad (17)$$

За допомогою виразів (15), (16) функцію напружень (14) подамо як

$$\Phi_3^0(z_3) = A_3 r^{-\lambda} \Delta_1^{-\lambda/2} [\cos(\lambda\beta_3(\theta)) - i \sin(\lambda\beta_3(\theta))], \quad (18)$$

а для напружень (11) отримаємо формули

$$\tau_{\theta z} = r^{-\lambda} \Delta_1^{-\lambda/2} [A_1 \Gamma_1(\theta) + A_2 \Gamma_2(\theta)], \quad \tau_{rz} = r^{-\lambda} \Delta_1^{-\lambda/2} [A_1 \Gamma_3(\theta) + A_2 \Gamma_4(\theta)], \quad (19)$$

де

$$\begin{aligned} \Gamma_1(\theta) &= \cos \theta \cos \chi + \gamma_3 \sin \theta \sin \chi, & \Gamma_2(\theta) &= \cos \theta \sin \chi - \gamma_3 \sin \theta \cos \chi, \\ \Gamma_3(\theta) &= \sin \theta \cos \chi - \gamma_3 \cos \theta \sin \chi, & \Gamma_4(\theta) &= \sin \theta \sin \chi + \gamma_3 \cos \theta \cos \chi, \\ \chi &= \lambda \beta_3(\theta), & \Delta_1 &= \cos^2 \theta + \gamma_3^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (20)$$

Задовольнимо крайові умови (13) з урахуванням формул (19). Одержимо однорідну систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} A_1 \Gamma_1(\alpha) + A_2 \Gamma_2(\alpha) = 0, \\ A_1 \Gamma_1(-\alpha) + A_2 \Gamma_2(-\alpha) = 0, \end{cases} \quad (21)$$

нетривіальний розв'язок якої існує, коли її визначник рівний нулю. З цієї умови, використовуючи тригонометричні перетворення, дістанемо характеристичне рівняння для визначення власних значень для ортотропного клина:

$$\sin(\delta - \lambda\psi) = 0, \quad (22)$$

де

$$\begin{aligned} \delta &= \arccos(a/\sqrt{a^2 + b^2}), \quad a = \cos^2 \alpha - \gamma_3^2 \sin^2 \alpha, \quad b = \gamma_3 \sin 2\alpha, \\ \psi &= \beta_3(\alpha) - \beta_3(-\alpha) = \operatorname{arctg} \frac{2\gamma_3 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \gamma_3^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}. \end{aligned} \quad (23)$$

Характеристичне рівняння (22) узгоджується з таким для складеного клина [12–14] і має один дійсний корінь λ_{III} у діапазоні $\pi/2 < \alpha < \pi$

$$\lambda_{III} = (\delta - \pi) / \psi, \quad (24)$$

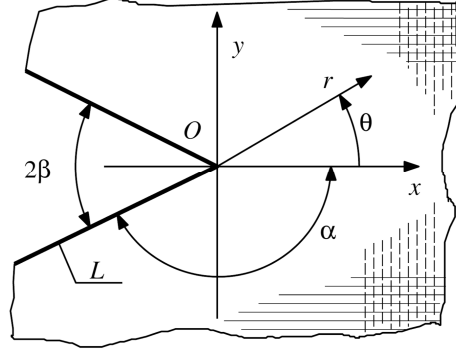


Рис. 1. Пружний анізотропний клин з кутом розхилу 2α .

Fig. 1. An elastic orthotropic wedge with an opening angle 2α .

який визначає порядок особливості поля напружень поздовжнього зсуву у вершині ортотропного клина. Зі співвідношень (22), (23) ($\gamma_3 = 1$) отримаємо відоме характеристичне рівняння для ізотропного клина [3].

Розподіл напружень та переміщень біля кутового вирізу за поздовжнього зсуву. Зі співвідношення (19) знайдемо напруження $\tau_{\theta z}$ на бісектрисі ортотропного клина ($\theta = 0$):

$$\tau_{\theta z}(r, 0) = A_1 r^{-\lambda_{III}}. \quad (25)$$

Скориставшись означенням КІН у вершині клина за антиплоскої деформації [3]

$$\tilde{K}_{III}^V = \lim_{r \rightarrow 0} \left[(2\pi r)^{\lambda_{III}} \tau_{\theta z}(r, 0) \right], \quad (26)$$

одержимо:

$$A_1 = \tilde{K}_{III}^V (2\pi)^{\lambda_{III}}. \quad (27)$$

Тепер з першого (або другого) рівняння системи (21) знайдемо:

$$A_2 = -k(\alpha) \tilde{K}_{III}^V / (2\pi)^{\lambda_{III}}, \quad k(\alpha) = \Gamma_1(\alpha) / \Gamma_2(\alpha). \quad (28)$$

За формулами (27) і (28) отримаємо комплексний потенціал

$$\Phi_3^0(z_3) = \tilde{K}_{III}^V (1 - ik(\alpha)) / (2\pi z_3)^{\lambda_{III}} \quad (29)$$

та сингулярні напруження і переміщення в ортотропному клині за антиплоскої деформації:

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z} &= \tilde{K}_{III}^V [\Gamma_1(\theta) - k(\alpha)\Gamma_2(\theta)] / (2\pi r \Delta_1^{1/2})^{\lambda_{III}}, \\ \tau_{rz} &= \tilde{K}_{III}^V [\Gamma_3(\theta) - k(\alpha)\Gamma_4(\theta)] / (2\pi r \Delta_1^{1/2})^{\lambda_{III}}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$w(x, y) = \frac{a_0 \tilde{K}_{III}^V \Delta_1^{(1-\lambda_{III})/2}}{(1-\lambda_{III})(2\pi r)^{(\lambda_{III}-1)}} (\sin((1-\lambda_{III})\beta_3) - k(\alpha) \cos((1-\lambda_{III})\beta_3)). \quad (31)$$

Напівнескінченний закруглений кутовий виріз у пружній ортотропній площині. Розглянемо такий виріз з кутом розхилу 2β ($0 \leq \beta < \pi/2$). Вважатимемо, що на нескінченності заданий асимптотичний розподіл напружень, який описує комплексний потенціал $\Phi_3^0(z_3)$ для клина (30), і на контурі вирізу відсутнє навантаження.

Поставлену крайову задачу розв'яжемо методом суперпозиції:

$$\tilde{\Phi}_3(z_3) = \Phi_3^0(z_3) + \Phi_3(z_3), \quad (32)$$

де потенціал $\Phi_3^0(z_3)$ описує напружений стан в ортотропному клині, а $\Phi_3(z_3)$ – збурений, викликаний закругленням кутового вирізу.

Для знаходження комплексного потенціалу $\Phi_3(z_3)$ необхідно розв'язати крайову задачу для ортотропної площини із закругленим кутовим вирізом, на контурі якого виконується умова

$$\tau_{nz} = -\operatorname{Re}[\Phi_3(z_3) dt_3 / ds] = \operatorname{Re}[\Phi_3^0(t_3) dt_3 / ds] = \tau(t), \quad t_3 \in L_3. \quad (33)$$

Скориставшись співвідношенням

$$t_3 = [(1 + \gamma_3)t + (1 - \gamma_3)\bar{t}] / 2, \quad (34)$$

запишемо праву частину крайової умови (33) у вигляді

$$\tau(t) = \operatorname{Re} \left\{ \tilde{K}_{III}^V (2\pi t_3)^{-\lambda_{III}} (1 - ik(\alpha)) [(1 + \gamma_3)dt / ds + (1 - \gamma_3)d\bar{t} / ds] \right\} / 2. \quad (35)$$

Збурений напружений стан можна визначити дещо іншим шляхом, вважаючи, що в ортотропній площині є розріз-тріщина вздовж контуру L , береги якого завантажені самозрівноваженими зусиллями:

$$\tau_{nz}^+ = \tau_{nz}^- = \tau(t), \quad t \in L, \quad (36)$$

де верхні індекси позначають граничні значення на гладкому контурі відповідних напружень за підходу до нього зліва (+) або справа (-).

Задачу про розподіл напружень у пружній ортотропній площині з криволінійною тріщиною розв'язуватимемо методом СІР [3, 4, 8].

Шукатимемо комплексний потенціал в інтегральній формі:

$$\Phi_3(z_3) = \frac{1}{\pi} \int_{L_3} \frac{\phi'_3(t_3) dt_3}{t_3 - z_3}, \quad (37)$$

де густину $\phi'_3(t_3)$ виразимо через стрибок переміщень за переходу через контур L . Тепер з крайової умови (36) отримуємо СІР

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_3} K(t_3, t'_3) \phi'_3(t_3) dt_3 = -\tau(t'_3), \quad t'_3 \in L_3, \quad (38)$$

де

$$K(t_3, t'_3) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{t_3 - t'_3} \frac{dt'_3}{ds'} \right], \quad \tau(t'_3) = -\operatorname{Re} \left[\frac{\tilde{K}_{\text{III}}^{\text{V}}(1 - ik(\alpha))}{(2\pi t'_3)^{\lambda_{\text{III}}}} \frac{dt'_3}{ds'} \right]. \quad (39)$$

Рівняння (38) має єдиний розв'язок за виконання додаткової умови

$$\int_{L_3} \phi'_3(t_3) dt_3 = 0. \quad (40)$$

Запишемо параметричне рівняння контуру розрізу L :

$$t = \rho\omega(\xi) = \rho e^{i\xi\alpha} \begin{cases} -1/\sin(\xi\alpha - \beta), & -1 \leq \xi < -\xi_B, \\ 1, & -\xi_B \leq \xi \leq \xi_B, \\ -1/\sin(\xi\alpha + \beta), & \xi_B < \xi \leq 1, \end{cases} \quad t \in L, \quad -1 \leq \xi \leq 1, \quad (41)$$

де ρ – радіус кривини у вершині вирізу; $\xi_B = (\pi - 2\beta)/[2(\pi - \beta)]$ – кутова координата θ точки закругленого контуру, в якій дуга кола переходить у прямолінійну ділянку [3].

У допоміжній комплексній площині z_3 параметричне рівняння розрізу L_3 має вигляд

$$t_3 = \rho\omega_3(\xi), \quad t_3 \in L_3. \quad (42)$$

Тут t_3 та t пов'язані співвідношеннями (34). Тоді інтегральне рівняння (38) та додаткову умову (40) запишемо у безрозмірному вигляді:

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 M(\xi, \eta) \phi'_3(\xi) d\xi = \tau(\eta), & -1 \leq \eta \leq 1, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \phi'_3(\xi) d\xi = 0, \end{cases} \quad (43)$$

$$M(\xi, \eta) = \rho \tilde{K}(\rho\omega_3(\xi), \rho\omega_3(\eta)), \quad t'_3 = \rho\omega_3(\eta),$$

$$\phi'_3(\xi) = \frac{(2\pi\rho)^{\lambda_{III}}}{\tilde{K}_{III}^V} \phi'_3(\rho\omega_3(\xi))\omega'_3(\xi), \quad \tau(\eta) = \frac{(2\pi\rho)^{\lambda_{III}}}{\tilde{K}_{III}^V} \tau(\rho\omega_3(\eta)).$$

Невідому дійсну функцію $\phi'_3(\xi)$ шукаємо в класі функцій, що мають інтегровну особливість на кінцях інтервалу інтегрування:

$$\phi'_3(\xi) = u_3(\xi) / \sqrt{1-\xi^2}. \quad (44)$$

Застосувавши до сингулярних інтегралів (43) квадратурні формули [3], прийдемо до системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_3(\xi_k) \operatorname{Re} \left\{ \omega'_3(\xi_k) / [\omega_3(\xi_k) - \omega_3(\eta_m)] \right\} = -\operatorname{Re}[\omega'_3(\eta_m)], \\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_3(\xi_k) = 0. \end{cases} \quad (45)$$

Тут

$$\xi_k = \cos(\pi(2k-1)/4n), \quad k=1, \dots, 2n; \quad \eta_m = \cos(\pi m/2n), \quad m=1, \dots, (2n-1). \quad (46)$$

Дотичні напруження на закругленому контурі на площинах, ортогональних до контуру, визначимо за формулою (12) [4]

$$\tau_{sz}^* = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\tilde{\Phi}_3^-(t_3)}{2i} \left[(1+\gamma_3) \frac{dt}{ds} - (1-\gamma_3) \frac{d\bar{t}}{ds} \right] \right\}, \quad t \in L, \quad t_3 \in L_3, \quad (47)$$

де $dt/ds = \omega'(t)/|\omega'(t)|$.

За формулами Сохоцького–Племеля [8] обчислимо граничне значення потенціалу $\tilde{\Phi}_3^-(t_3)$ та отримаємо напруження (47) у вигляді

$$\tau_{sz}^* = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{K_{III}^V}{(2\pi\rho)^{\lambda_{III}}} \left[\frac{i(1-ik(\alpha))}{(\omega_3(\xi))^{\lambda_{III}}} + \frac{u_3(\eta)/\sqrt{1-\eta^2}}{\omega'_3(\eta)} - \frac{1}{\pi i} \int_{L_3} \frac{u_3(\xi)/\sqrt{1-\xi^2} d\xi}{\omega_3(\xi) - \omega_3(\eta)} \right] \Gamma(\eta_m) \right\},$$

де $\Gamma(\eta_m) = [(1+\gamma_3)\omega'(\eta_m) - (1-\gamma_3)\omega'(\eta_m)]/|\omega'(\eta_m)|$.

Застосувавши до сингулярного інтеграла квадратурні формули, одержимо:

$$\tau_{sz}^*(\eta_m) = K_{III}^V R_{III}(\eta_m) (2\pi\rho)^{-\lambda_{III}}, \quad (48)$$

де

$$R_{III}(\eta_m) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \left[-\frac{i(1-ik(\alpha))}{(\omega_3(\eta_m))^{\lambda_{III}}} - \frac{u_3(\eta_m)}{\sqrt{1-\eta_m^2} \omega'_3(\eta_m)} + \frac{1}{ni} \sum_{k=1}^n \frac{u_3(\xi_k)}{\omega_3(\xi_k) - \omega_3(\eta_m)} \right] \Gamma(\eta_m) \right\} \quad (49)$$

– відносні напруження на контурі вирізу.

У таблиці наведено значення коефіцієнтів впливу закруглення кутового вирізу на максимальні напруження на його контурі $R_{III} = R_{III}(0)$ для різних кутів розхилу вирізу 2β та параметрів ортотропії матеріалу γ_3 .

Щоб оцінити вплив форми вирізу на коефіцієнт впливу R_{III} , розглянемо також гіперболічний виріз в ортотропній площині [6] з кутом розхилу 2β та з таким самим радіусом закруглення у вершині, як для кутового закругленого.

Коефіцієнт R_{III} для закругленого кутового вирізу

γ_3	2β					
	2°	30°	60°	90°	120°	150°
1/4	6,202	6,144	6,05	5,881	5,505	4,403
1/3	4,779	4,725	4,634	4,473	4,131	3,243
1/2	3,35	3,301	3,219	3,079	2,806	2,227
1	1,899	1,867	1,819	1,746	1,629	1,43
2	1,141	1,151	1,169	1,182	1,18	1,144
3	0,871	0,9249	0,9916	1,041	1,069	1,071
4	0,7279	0,8244	0,922	0,9867	1,026	1,041

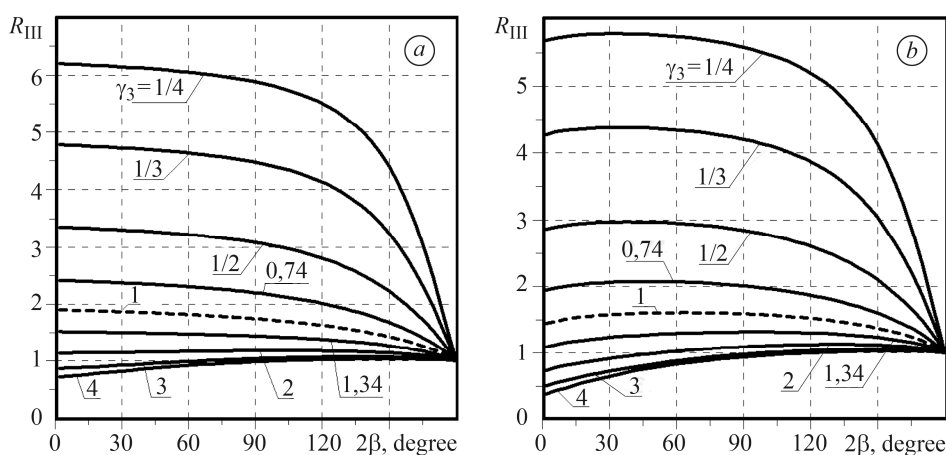


Рис. 2. Залежність коефіцієнта R_{III} від кута розхилу вирізу 2β для кутового закругленого (а) та гіперболічного (б) вирізів за різних параметрів ортотропії γ_3 .

Fig. 2. Dependence of factor R_{III} on the notch vertex angle 2β for rounded V-notch (a) and hyperbolic notch (b) with respect to various parameter of the orthotropy γ_3 .

Якщо кут $2\beta = \pi$, отримаємо півпростір (відсутня концентрація напружень, $\lambda_{III} = 0$), тобто параметр $R_{III} = 1$ незалежно від ортотропії матеріалу (рис. 2). На коефіцієнт R_{III} дещо впливає форма околів вершин вирізів, зокрема, їхні максимальні значення, якщо $\gamma_3 < 1$, досягаються для U-подібних вирізів ($2\beta = 0$) (рис. 2a), а для гіперболічних – в діапазоні $2\beta \in (\pi/6, \pi/3)$ (рис. 2b). На рис. 2 подані також дані для склопластика 27-63С ($G_{13} = 6500$ МПа, $G_{23} = 3100$ МПа; $\gamma_3 = 1,34, 0,74$) [15].

Значення відносних напружень $R_{III}(\theta)$ наведено уздовж контуру кутового закругленого вирізу з радіусом кривини r у його вершині ($\xi = 0$) (рис. 3).

Виявили, що для ортотропного матеріалу максимуми напружень можуть знаходитись і не у вершині вирізу. Якщо параметр ортотропії $\gamma_3 > 1$ ($G_{13} > G_{23}$), вони зсуваються від вершини напівнескінченного вирізу. Коли ж $\gamma_3 < 1$, максимуми спостерігаються лише у вершині вирізу.

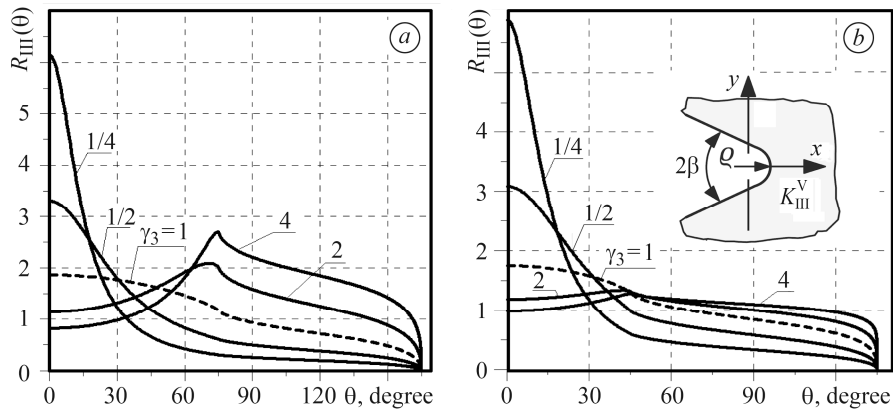


Рис. 3. Розподіл відносного напруження $R_{III}(\theta)$ уздовж контурів кутового закругленого вирізу для кутів розхилу $2\beta = 30^\circ$ (a) та 90° (b) за різних параметрів ортотропії γ_3 .

Fig. 3. Dimensionless stress distribution $R_{III}(\theta)$ along the contours of rounded V-notch for notch vertex angle $2\beta = 30^\circ$ (a) and 90° (b) for various parameters of the orthotropy γ_3 .

ВИСНОВКИ

Раніше розроблений єдиний підхід до розв'язування антиплоских задач теорії пружності для ізотропних тіл з гострими та закругленими кутовими вирізами поширено на ортотропні тіла. Розглянуто антиплоску задачу на власні значення для ортотропного клина. Методом сингулярних інтегральних рівнянь побудовано розв'язок антиплоскої задачі теорії пружності для ортотропної площини з напів-нескінченим кутовим закругленим вирізом. На його основі знайдено залежності між коефіцієнтами інтенсивності та концентрації напружень у гострій та закругленій вершинах кутового вирізу, які придатні для визначення КІН у вершинах гострих вирізів з розв'язків для відповідних закруглених концентраторів напружень. Досліджено вплив ортотропії матеріалу, радіуса закруглення вершини вирізу та його форми (кутовий закруглений та гіперболічний) на розподіл відносних напружень біля вершин вирізів, орієнтованих уздовж головних напрямків ортотропії. Виявлено, що не тільки радіус закруглення вершини вирізу та форма її околу суттєво впливають на розподіл напружень на межовому контурі, але й орієнтація вирізів відносно осей симетрії ортотропії матеріалу.

Результати досліджень можна використати для оптимального вибору форми та розташування вирізів (уздовж або поперек осі симетрії ортотропії) в елементах конструкцій, які виготовлені з армованих композитів.

РЕЗЮМЕ. На основі рішення антиплоскої задачі теорії еластичності на собствених значеннях для еластичного ортотропного клина отримано розподілення сингулярних напружень і переміщень в околі вершини відповідного кутового вирізу при антиплоскій деформації. Методом сингулярних інтегральних рівнянь розв'язана відповідна задача для ортотропної площини з напівбескінчним кутовим закругленим вирізом і знайдено залежності між коефіцієнтами інтенсивності та концентрації напружень в гострій та закругленій вершинах кутового вирізу.

SUMMARY. Using the solution of antiplane elastic eigenvalue problem for elastic orthotropic wedge the distribution of singular stresses and displacements in the neighbourhood of the vertex of the corresponding angular notch in the conditions of antiplane deformation is obtained. Using the singular integral equations method the corresponding problem for an orthotropic plane with a semi-infinite angular rounded notch is solved and the dependence between the stress intensity factor and stress concentration at the sharp and rounded vertex of the angular notch is found.

1. *Саврук М. П., Казберук А.* Единый подход к решению задач о концентрации напряжений около острых и закругленных угловых вырезов // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 2. – С. 70–87.
(*Savruk M. P. and Kazberuk A.* A unified approach to problems of stress concentration near v-shaped notches with sharp and rounded tip // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, № 2. – P. 182–197.)
2. *Саврук М. П., Казберук А., Тарасюк Г.* Розподіл напружень на контурі кутового закругленого вирізу за антиплоскої деформації // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – **47**, № 6. – С. 7–14.
(*Savruk M. P., Kazberuk A., and Tarasiuk G.* Distribution of stresses over the contour of a rounded V-shaped notch under antiplane deformation // Materials Science. – 2012. – **47**, № 6. – P. 7–14.)
3. *Саврук М. П., Казберук А.* Концентрація напружень у твердих тілах з вирізами // Механіка руйнування та міцність матеріалів: Довідн. посіб. / За заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: СПОЛОМ, 2012. – Т. 14. – 384 с.
4. *Savruk M. P. and Kazberuk A.* Stress Concentration at Notches. – Cham: Springer, 2017. – 516 p.
5. *Саврук М. П., Казберук А.* Плоскі задачі теорії пружності на власні значення для ортотропного та квазіортотропного клинів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2014. – **50**, № 6. – С. 7–14.
(*Savruk M. P. and Kazberuk A.* Plane eigenvalue problems of the theory of elasticity for orthotropic and quasiorthotropic wedges // Materials Science. – 2015. – **50**, № 6. – P. 771–781.)
6. *Казберук А., Саврук М. П.* Розподіл напружень біля кутових вирізів в ортотропній площині за симетричного навантаження // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2016. – **52**, № 1. – С. 61–68.
(*Kazberuk A. and Savruk M. P.* Distribution of stresses near v-notches in an orthotropic plane under symmetric loads // Materials Science. – 2016. – **52**, № 1. – P. 62–71.)
7. *Саврук М. П., Казберук А., Онишко Л. Й.* Вплив анізотропії матеріалу на розподіл напружень біля параболічного вирізу // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2015. – **51**, № 6. – С. 24–33.
(*Savruk M. P., Kazberuk A., and Onyshko L. Yo.* The influence of material anisotropy on the stress distribution near the parabolic notch // Materials Science. – 2015. – **51**, № 6. – P. 773–784.)
8. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
9. *Лехницький С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
10. *Ting T. C. T.* Anisotropic Elasticity. Theory and Applications. – Oxford: Oxford University Press, 1996. – 588 p.
11. *Си Г., Либовиц Г.* Математическая теория хрупкого разрушения // Разрушение: в 7-ми т. / Под ред. Г. Либовица. – М.: Мир, 1975. – Т. 2. – 768 p.
12. *Chien-Ching Ma and Bao-Luh Hour.* Analysis of dissimilar anisotropic wedges subjected to antiplane shear deformation // Int. J. Solids Struct. – 1989. – **25**, № 11. – P. 1295–1309.
13. *Chuan-I Lie and Ching-Hwei Chue.* Disappearance conditions of stress singularities for anisotropic bimaterial half-plane wedges under antiplane shear // J. Appl. Mech. – 2007. – **74**. – P. 1–7.
14. *Chuan-I Liu and Ching-Hwei Chue.* On the stress singularity of dissimilar anisotropic wedges and junctions in antiplane shear // Compos. Struct. – 2006. – **73**. – P. 432–442.
15. *Серенсен С. В., Зайцев Г. П.* Несущая способность тонкостенных конструкций из армированных пластиков с дефектами. – К.: Наук. думка, 1982. – 296 с.

Одержано 05.11.2018