

УДК 539.3

## ПОРУШЕННЯ КОНТАКТУ ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ ТА ЖОРСТКОЇ ОСНОВИ НА КРУГОВІЙ ДІЛЯНЦІ ПІД ДІЄЮ КОЛОВОГО СТОКУ ТЕПЛА

*Х. І. СЕРЕДНИЦЬКА, М. М. МИКИТИН, Р. М. МАРТИНЯК*

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів*

Вивчено локальне розшарування за круговою областю між пружним теплопровідним півпростором та жорсткою термоізолюваною основою під дією розподілених по колу стоків тепла. Відповідну осесиметричну контактну задачу термопружності зведено до інтегрального рівняння типу Абея та отримано замкнутий його розв'язок. Проаналізовано залежності форми зазору між тілами і нормальних контактних напружень ззовні зазору від інтенсивності стоків тепла та відстані від них до поверхні півпростору.

**Ключові слова:** *пружний півпростір, жорстка основа, коловий стік тепла, кругове розшарування.*

**Вступ.** Під час взаємодії тіл з узгодженими поверхнями між ними може відбуватися розшарування і виникнення зазорів під дією силових і термічних навантажень, зосереджених у приповерхневих областях. Зроблено огляд публікацій, у яких порушення контакту тіл досліджено за механічних навантажень [1]. Розв'язано плоску [2] і осесиметричну [1, 3] задачі про порушення контакту тіл, зумовлене зосередженими стоками тепла. Розшарування між пружними півплощинами, одна з яких має кругове включення, за нагрівання до сталої температури вивчено за умов гладкого їх контакту [4] та зі зчепленням і проковзуванням [5]. Досліджено [6–9] термомеханічне порушення контакту півпросторів внаслідок неідеального теплового контакту з термоопором на локальних ділянках. Розглянуто [10] контакт пружного півпростору з жорсткою термоізолюваною основою за дії стоку тепла, рівномірно розподіленого вздовж кола радіуса  $R$ , розташованого на відстані  $d$  від межі півпростору. Аналіз нормальних контактних напружень, які виникають при цьому, показав, що зі збільшенням інтенсивності стоку тепла, коли  $d$  менше за певну критичну відстань  $d_{cr}$  ( $d_{cr} \approx 1,1 R$ ), може відбуватися як кільцеве, так і кругове розшарування тіл; якщо ж  $d > d_{cr}$ , то відбуватиметься лише кругове. Кільцеве розшарування при  $d < d_{cr}$  вивчено раніше [11], тут дослідили кругове.

**Формулювання задачі.** Розглянемо односторонній контакт пружного теплопровідного півпростору та жорсткої термоізолюваної основи під дією прикладеного до півпростору на нескінченності тиску  $p$  і розподіленого по колу радіуса  $R$  стоку тепла сталої інтенсивності  $\omega$ . Вважаємо, що відстань  $d$  від стоку тепла до поверхні контакту більша за критичну відстань  $d_{cr} \approx 1,1 R$  [10] і між тілами внаслідок локального охолодження виникає кругове розшарування (рис. 1). Його радіус  $a$  заздалегідь невідомий і залежить від тиску  $p$  та інтенсивності стоку тепла  $\omega$ . Вважаємо, що поверхня утвореного зазору термоізолювана і вільна від навантаження.

Гранично-контактні умови сформульованої осесиметричної задачі матимуть вигляд:

– на нескінченності ( $z = \infty, r \in (0; \infty)$ ):

$$T = 0, \sigma_{rz} = 0; \sigma_{zz} = -p; \quad (1)$$

– на ділянці контакту ( $z = 0, a < r < \infty$ ):

$$q_z = 0; \sigma_{rz}(r, 0) = 0; u_z(r, 0) = 0; \quad (2)$$

– на ділянці зазору ( $z = 0, 0 < r < a$ ):

$$q_z = 0; \sigma_{rz}(r, 0) = 0; \sigma_{zz}(r, 0) = 0. \quad (3)$$

Тут  $T$  – температура,  $q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$  – компонента вектора теплового потоку;

$\sigma_{rz}$ ,  $\sigma_{zz}$  – компоненти тензора напружень;  $u_z$  – компонента вектора переміщень;  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності півпростору.

На контурі зазору повинна виконуватися умова неперервності нормальних контактних напружень

$$\sigma_{zz}(a, 0) = 0. \quad (4)$$

**Метод розв'язування задачі.** Розв'язок сформульованої контактної задачі термопружності подамо [1] у вигляді

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1, \quad u = u^0 + u^1, \quad i, j = r, z,$$

де індексом “0” позначено розв'язок задачі про взаємодію півпростору з основою за припущення про повний контакт між ними, індексом “1” – збурення, зумовлені круговим розшаруванням.

Термонапружений стан півпростору за повного контакту з жорсткою основою під дією заданого на нескінченності тиску  $p$  та розподіленого по колу радіуса  $R$  стоку тепла отримано у праці [10]. Зокрема, нормальні контактні напруження  $\sigma^0(r, 0)$  мають вигляд

$$\sigma_{zz}^0(r, 0) = -p + \omega \mu \frac{R \alpha_t (1 + \nu)}{\pi \lambda (1 - \nu)} F(r, 0), \quad (5)$$

де

$$F(r, 0) = \frac{2}{\sqrt{(r+R)^2 + d^2}} \left[ K \left( \frac{4rR}{(r+R)^2 + d^2} \right) + \frac{d^2}{((r-R)^2 + d^2)} E \left( \frac{4rR}{(r+R)^2 + d^2} \right) \right], \quad (6)$$

$\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $\mu$  – модуль зсуву;  $\alpha_t$  – коефіцієнт лінійного теплового розширення;

$K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - m(\cos x)^2}}$ ,  $E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m(\sin x)^2} dx$  – повні еліптичні інтеграли I і II роду відповідно.

Для визначення зумовлених розшаруванням локальних збурень полів вектора переміщень і тензора напружень використовуємо інтегральне подання цих полів у півпросторі, межа якого вільна від дотичних напружень [12]. Використовуючи методику розв'язування задачі про локальне розшарування пружного пів-

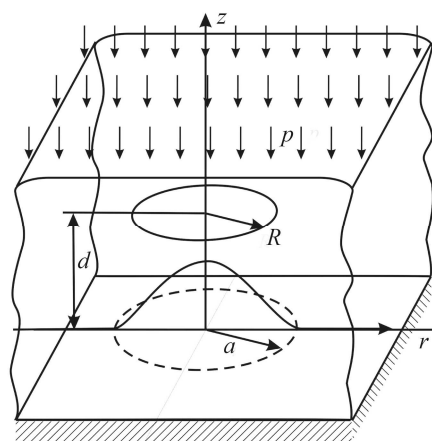


Рис. 1. Схема контакту пружного півпростору та жорсткої основи з круговим розшаруванням між ними.

Fig. 1. Contact of a half-space and rigid base with circular delamination between them (schematically).

простору і жорсткої основи під дією точкового стоку тепла [1], нормальну компоненту вектора переміщень  $u_z(r, 0)$  та нормальне контактне напруження  $\sigma_z(r, 0)$  ззовні зазору подаємо через деяку функцію  $\varphi(x)$ :

$$u_z(r) = \int_r^a \frac{\varphi(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}}, \quad 0 < r < a, \quad (7)$$

$$\sigma_z(r) = -p + \omega \mu \frac{R\alpha_t(1+\nu)}{\pi\lambda(1-\nu)} F(r, 0) - \frac{\mu}{1-\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \int_0^a \frac{t\varphi(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} \right), \quad r > a, \quad (8)$$

для визначення якої отримано інтегральне рівняння типу Абеля:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^r \frac{t\varphi(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} = -\frac{1-\nu}{\mu} p + \omega \frac{R\alpha_t(1+\nu)}{\pi\lambda} F(r, 0). \quad (9)$$

Використавши формулу обернення інтегрального рівняння Абеля [13], отримаємо:

$$\varphi(r) = -\frac{2}{\pi} \left( \frac{1-\nu}{\mu} pr - \omega \frac{R\alpha_t(1+\nu)}{\pi\lambda} \int_0^r \frac{tF(t, 0) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} \right). \quad (10)$$

Для визначення замкнутого наближеного розв'язку задачі парну функцію  $F(t, 0)$  апроксимуємо скінченням степеневим рядом

$$F(t, 0) \approx \sum_{m=0}^M X_m t^{2m}. \quad (11)$$

Коефіцієнти  $X_m$  ряду (11) визначаємо зі системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку отримаємо, прирівнявши у точках  $x_k = ka/M$ ,  $k = 0, \dots, M$ , відрізка  $(0, \bar{a})$  праву частину виразу (11) і функцію (6). Кількість  $M$  членів ряду (11) визначаємо під час числового експерименту з умови, що відносна похибка апроксимації (11) функції  $F(t, 0)$ , визначеної формулою (6), не перевищує  $10^{-5}$ .

Підставивши функцію (11) у формули (10), (7), (8), знайдемо:

$$\varphi(r) = 2 \left( -\frac{p(1-\nu)}{\mu R} r + \frac{\omega\alpha_t(1+\nu)}{\pi\lambda} \sum_{m=0}^M X_m \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} r^{2m+1} \right), \quad (12)$$

$$u_z(r, 0) = -\frac{2p(1-\nu)}{\pi\mu} \sqrt{a^2 - r^2} + \frac{2\omega\alpha_t(1+\nu)R}{\pi^2\lambda} \sum_{m=0}^M \frac{(2m)!! X_m}{(2m+1)!!} A_m(r) \sqrt{a^2 - r^2}, \quad (13)$$

$$\sigma_z(r, 0) = -p + \frac{\omega\mu R\alpha_t(1+\nu)}{\pi\lambda(1-\nu)} F(r, 0) + \left( \frac{2p}{\pi} - \frac{2\omega\mu R\alpha_t(1+\nu)}{\pi^2\lambda(1-\nu)} \sum_{m=0}^M X_m r^{2m} \right) \arcsin\left(\frac{a}{r}\right) - \frac{2}{\pi\sqrt{r^2 - a^2}} \left( pa - \frac{\omega\mu\alpha_t(1+\nu)R}{\pi\lambda(1-\nu)} \sum_{m=0}^M X_m D_m(r) \right), \quad (14)$$

$$\text{де } A_0(r) = 1, \quad A_m(r) = \frac{a^{2m}}{2m+1} \left( 1 + \sum_{n=1}^m \frac{\prod_{i=1}^n (2m-2i+2)}{\prod_{i=1}^n (2m-2i+1)} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} \right);$$

$$D_m(r) = \frac{ar^{2m}}{(2m+2)} + \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} \sum_{n=1}^m \frac{a^{2m+1}}{(2m+2)} \left( \frac{\prod_{i=1}^n (2m-2i+3)}{\prod_{i=1}^n (2m-2i+2)} \left( 2n \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + 1 \right) \left( \frac{r}{a} \right)^{2n} + 1 \right).$$

Задовольнивши за допомогою (14) умову (4), отримаємо співвідношення

$$\omega = \frac{p(1-\nu)\lambda\pi}{\mu\alpha_t(1+\nu)R \sum_{m=0}^M X_m \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} a^{2m}}, \quad (15)$$

що дає зв'язок радіуса зазору зі силовим і термічним навантаженням.

**Числові результати.** Обчислювали, використовуючи безрозмірні величини  $\bar{d} = d/R$ ;  $\bar{a} = a/R$ ;  $\bar{r} = r/R$ ;  $\bar{\omega} = \omega\alpha_t(1+\nu)R/\lambda$ ;  $\bar{p} = p(1-\nu)/\mu$ ;  $\bar{u}_z = u_z/R$ ;  $\bar{\sigma}_{zz} = \sigma_{zz}(1-\nu)/\mu\lambda$  за фіксованого заданого на нескінченності тиску  $\bar{p} = 0,001$ .

Зображено (рис. 2) залежність радіуса зазору  $\bar{a}$  від інтенсивності стоку тепла  $\bar{\omega}$  за фіксованої відстані від стоку тепла до поверхні півпростору  $\bar{d} = 2$ . Бачимо, що радіус зазору  $\bar{a}$  монотонно зростає зі збільшенням інтенсивності стоку тепла  $\bar{\omega}$ , причому залежність  $\bar{a}$  від  $\bar{\omega}$  є нелінійною. Точка перетину кривої з віссю  $\bar{\omega}$  визначає критичне значення інтенсивності стоку тепла  $\bar{\omega}_{cr} = 0,00123$ , за якого починається розшарування при  $\bar{d} = 2$ .

На рис. 3а проілюстровано зміну висоти зазору  $\bar{h}$  вздовж радіальної координати  $\bar{r}$  для різних інтенсивностей стоку тепла  $\bar{\omega}$ , розташованого на відстані  $\bar{d} = 2$  від поверхні. Бачимо, що зі збільшенням інтенсивності стоку  $\bar{\omega}$  висота зазору  $\bar{h}$  і його радіус  $\bar{a}$  синхронно зростають. Зображено (рис. 3b) зміну висоти зазору  $\bar{h}(\bar{r})$  за фіксованої інтенсивності стоку тепла  $\bar{\omega} = 0,00135$  для різних відстаней від нього до поверхні півпростору  $\bar{d}$ . За зміни  $\bar{d}$  максимальна висота зазору  $\bar{h}(0)$  змінюється значно більше, ніж його радіус. Так, якщо  $\bar{d}$  збільшується від 2 до 2,2, то  $\bar{a}$  зменшується приблизно у два рази, а  $\bar{h}(0)$  – приблизно в шість разів.

На рис. 4 зображено розподіл нормальних контактних напружень  $\bar{\sigma}_{zz}(\bar{r}, 0)$  для різних інтенсивностей стоку тепла  $\bar{\omega} = 0,00124$ ;  $\bar{\omega} = 0,00127$ ;  $\bar{\omega} = 0,00135$  за фіксованої відстані від стоку до поверхні півпростору  $\bar{d} = 2$ . Вертикальні штрихові лінії позначають радіуси зазорів  $\bar{a} = 0,2$ ;  $\bar{a} = 0,6$ ;  $\bar{a} = 1$ , які відповідають цим стокам.

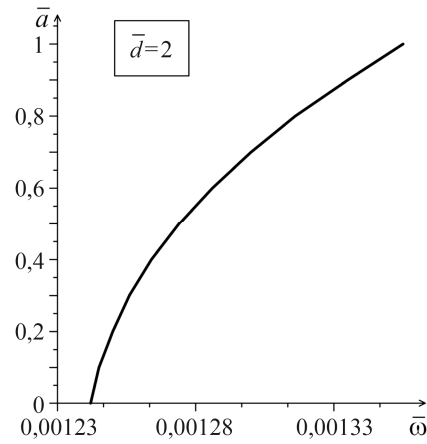


Рис. 2. Залежність радіуса зазору  $\bar{a}$  від інтенсивності стоку тепла  $\bar{\omega}$ .

Fig. 2. Dependence of the gap radius  $\bar{a}$  on the intensity of the heat sink  $\bar{\omega}$ .

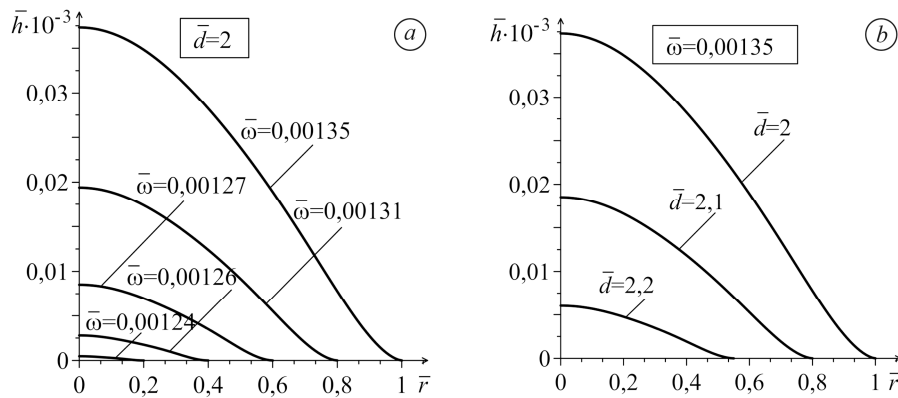


Рис. 3. Висота зазору  $\bar{h}(\bar{r})$  для різних інтенсивностей стоку тепла  $\bar{\omega}$  (a) та відстаней від стоку тепла до поверхні півпростору  $\bar{d}$  (b).

Fig. 3. Height of the gap  $\bar{h}(\bar{r})$  for various intensity of the heat sink  $\bar{\omega}$  (a) and the distance from the heat sink to the half-space  $\bar{d}$  (b).

На ділянці зазору нормальні контактні напруження дорівнюють нулю (горизонтальні лінії на ділянках  $0 < \bar{r} < \bar{a}$ ). Поза зазором за віддалення від нього напруження  $\bar{\sigma}_{zz}$  монотонно знижуються, асимптотично прямуючи до заданих на нескінченності стискальних напружень  $\bar{\sigma}_{zz} = -\bar{p} = -0,001$ . Збільшення інтенсивності стоку тепла  $\bar{\omega}$  призводить до стрімкішого зменшення нормальних напружень  $\bar{\sigma}_{zz}$ . Що більший зазор, то швидше контактні напруження наближаються до заданих на нескінченності.

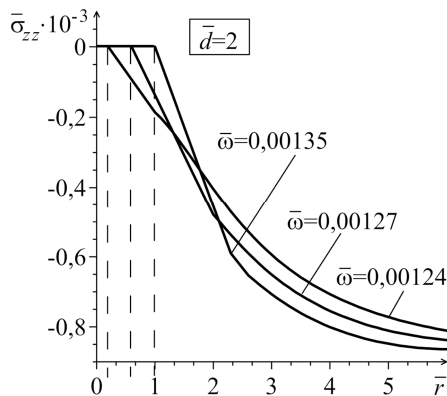


Рис. 4. Розподіл нормальних контактних напружень  $\bar{\sigma}_{zz}$  вздовж радіальної координати  $\bar{r}$  для різних інтенсивностей стоку тепла  $\bar{\omega}$ .

Fig. 4. Distribution of normal contact stresses  $\bar{\sigma}_{zz}$  along the radial coordinate  $\bar{r}$  for various intensity of the heat sink  $\bar{\omega}$ .

## ВИСНОВКИ

Розв'язано задачу термопружності про взаємодію пружного півпростору і жорсткої термоізолюваної основи з урахуванням кругового зазору внаслідок локального порушення контакту під дією стоку тепла, розподіленого по колу, яке розташоване на певній відстані від поверхні півпростору. Сформульовану задачу зведено до парних інтегральних рівнянь, які трансформовано в інтегральне рівняння типу Абеля, розв'язаного аналітично. З умови неперервності нормальних контактних напружень визначено радіус кругового зазору. Проаналізовано залежності форми зазору і нормальних контактних напружень від інтенсивності стоку тепла та відстані від нього до поверхні півпростору. Показано, що висота і радіус зазору зростають з підвищенням інтенсивності стоку тепла та зменшують-

ся зі збільшенням відстані від стоку до поверхні півпростору. Нормальні контактні напруження ззовні зазору за віддалення від нього монотонно знижуються до напружень, прикладених на нескінченності.

*РЕЗЮМЕ.* Изучено локальное расслоение по круговой области между упругим теплопроницаемым полупространством и жёстким теплоизолированным основанием при действии распределённых по окружности стоков тепла. Соответствующую осесимметричную контактную задачу термоупругости сведено к интегральному уравнению типа Абеля и получено замкнутое его решение. Проанализированы зависимости формы зазора между телами и нормальных контактных напряжений вне зазора от интенсивности стоков тепла и расстояния от них к поверхности сопряжения полупространства и основания.

*SUMMARY.* Delamination along a circular region between an elastic thermo-permeable half-space and a rigid thermo-insulated base under the action of heat sink distributed along a circle is studied. The corresponding axisymmetric contact problem of thermoelasticity is reduced to an integral equation of Abel type and its closed solution is obtained. Dependences of the gap shape between the bodies and normal contact stresses outside the gap on the intensity of the heat sink and the distance from them to the interface of the half-space and the base are analyzed.

1. *Monastyrskyy B. Ye. and Mykutyk M. M.* Axially symmetric problem of local separation of an elastic half-space from a rigid base due to a point source of cooling // *J. of Mathematical Sciences.* – 2011. – **178**, № 5. – P. 467–480.
2. *Мартиняк Р., Криштафович А., Мачушин І.* Односторонній контакт тіл з узгодженими поверхнями за дії джерел і стоків тепла // *Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат.* – 1999. – Вип. 55. – С. 169–173.
3. *Монастирський Б. Є., Мыкытын М. М.* Контакт упругого полупространства и жесткого основания под действием сосредоточенного источника охлаждения // *Теоретическая и прикладная механика.* – 2009. – Вип. 46. – С. 36–41.
4. *Мартиняк Р. М.* Порушення контакту півпросторів при термомеханічній дії підповерхневого включення // *Доп. НАН України.* – 1998. – № 12. – С. 71–77.
5. *Маланчук Н. І., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.* Фрикційне проковзування пружних тіл за наявності підповерхневого включення // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2016. – **52**, № 6. – С. 69–74.  
(*Malanchuk N. I., Slobodyan B. S., Martynyak R. M.* Friction sliding of elastic bodies in the presence of subsurface inclusion // *Materials Science.* – 2017. – **52**, № 6. – P. 819–826.)
6. *Comninou M. and Dundurs J.* On lack of uniqueness in heat conduction through a solid to solid contact // *Trans. ASME: J. Heat Transfer.* – 1980. – **102**, № 2. – P. 156–162.
7. *Krishtafovich A. A. and Martynyak R. M.* Thermoelastic contact of anisotropic half-spaces with thermal resistance // *Int. Appl. Mech.* – 1998. – **34**, № 7. – P. 629–634.
8. *Krishtafovich A. A. and Martynyak R. M.* Lamination of anisotropic half-spaces in the presence of contact thermal resistance // *Int. Appl. Mech.* – 1999. – **35**, № 2. – P. 159–164.
9. *Мартиняк Р. М., Чумак К. А.* Термопружне розшарування тіл за наявності теплопроникаючого заповнювача міжконтактного просвіту // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2009. – **45**, № 4. – С. 45–52.  
(*Martynyak R. M., Chumak K. A.* Thermoelastic delamination of bodies in the presence of a heat-conducting filler of the intercontact gap // *Materials Science.* – 2009. – **45**, № 4. – P. 513–522.)
10. *Микитин М.* Контакт пружного півпростору та жорсткої основи за дії розподілених по колу стоків тепла // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2015. – Вип. 22. – С. 103–110.
11. *Кільцеве розшарування між тілами за локального охолодження коловим стоком тепла / М. Микитин, Х. Середницька, Б. Монастирський, Р. Мартиняк* // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2017. – Вип. 26. – С. 55–62.
12. *Кім Г. С., Монастирський Б. Є.* Контактна задача для півпростору та жорсткої основи з осесиметричною виїмкою // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 1998. – **41**, № 4. – С. 7–11.
13. *Курант Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, 1970. – **2**. – 672 с.

Одержано 21.01.2019