УДК 539.3

ЗГИН ОСЕСИМЕТРИЧНО НАВАНТАЖЕНИХ ТОВСТИХ ПЛАСТИН

В. П. РЕВЕНКО

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Запропоновано нову теорію згину осесиметрично навантажених пластин у вигляді товстого кільця або диска, коли їх прогини не є великими і напружений стан не описують гіпотези Кірхгофа–Лява або Тимошенка. Для такого згину використано дві гармонічні функції, які описують осесиметричний напружений стан. Після інтегрування за товщиною пластини виражено моменти і поперечні зусилля через дві функції. Точно задоволено співвідношення теорії пружності і побудовано замкнуту систему рівнянь на введені функції без використання гіпотез про геометричний характер деформування пластини. Розроблено метод їх розв'язання. Наведено розв'язок ряду задач згину пластин з отворами.

Ключові слова: *модель згину товстих пластин, згинні моменти, поперечні зусилля.*

Вступ. Товсті пластини у вигляді дисків або кілець широко використовують в об'єктах транспортного, енергетичного машинобудування та будівельній індустрії. Розвиток науки та техніки висуває нові підвищені вимоги до точності досліджень їх міцності і утримувальної здатності. Тому виникає необхідність у повнішому врахуванні рівнянь і співвідношень теорії пружності за одночасного спрощення вихідних розрахункових моделей. Відомі теорії згину пластин [1–7] постулюють деформацію нормалі до серединної поверхні пластини за деяким законом. Відзначено [1–4], що задачу згину товстих пластин потрібно розглядати як тривимірну задачу теорії пружності. У праці [8] подали нову теорію завантажених товстих пластин на базі гіпотез Кірхгофа–Лява з подальшим урахуванням градієнта згинального моменту, вважаючи, що прогини серединної поверхні є значними. Виявлено [9], що за згинання товстої пластини поперечною силою (у межах тривимірної теорії пружності) нормалі до недеформованої серединної поверхні суттєво відхиляються від нормалі до деформованої і викривляються. Враховано [10] дію крутного моменту і зведено теорію згину пластин до інтегрування тривимірного гармонічного рівняння з невідомою правою частиною.

Нижче побудовано одновимірну розрахункову модель згину товстих пластин і наведено аналітичні розв'язки для деяких осесиметричних навантажень.

Формулювання задачі і побудова вихідної системи рівнянь. Розглянемо напружений стан кільця з радіусами R_j, $j=\overline{1,2}$, сталої товщини $2h$, серединна поверхня якого збігається з площиною $Or\varphi$ циліндричної системи координат. До обох торцевих поверхонь кільця прикладені нормальні навантаження

$$\sigma_z(r,h)=g^+(r)\,,\quad \sigma_z(r,-h)=-g^+(r)\,, \tag{1}$$

де знаки "+", "–" описують відповідно функції на верхньому $z = h$ і нижньому $z = -h$ торці, а дотичні – відсутні. За виконання умов осесиметричного згину (1) на бічних поверхнях кільця природньо задати такі крайові умови:

$$\sigma_r(R_j,z)=\sigma_1^j(z)\,,\quad \tau_{rz}(R_j,z)=\sigma_2^j(z)\,, \tag{2}$$

Контактна особа: В. П. РЕВЕНКО, e-mail: victorrev@ukr.net

де σ_m^j, $j, m = \overline{1, 2}$ – відомі навантаження, $\sigma_1^j(-z) = -\sigma_1^j(z)$, $\sigma_2(-z) = \sigma_2(z)$.

Для побудови теорії згину пластин та інтегрального задоволення умов (2), використаємо модифіковане подання Лява у видозміненій формі

$$u_r = \frac{\partial P}{\partial r}, \quad u_\varphi = 0, \quad u_z = \frac{\partial P}{\partial z} - 4(1-\nu)\Phi, \tag{3}$$

де $P = z\Phi + \Psi$; Φ, Ψ – введені [11] гармонічні функції переміщень; ν – коефіцієнт Пуассона. Подамо нормальні та дотичні напруження

$$\sigma_r = 2G\left[\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - 2\nu\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right], \quad \sigma_\varphi = 2G\left[\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r} - 2\nu\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right], \tag{4}$$

$$\sigma_z = 2G\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - 2(2-\nu)\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right], \quad \tau_{rz} = 2G\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial P}{\partial z} - 2(1-\nu)\Phi\right], \tag{5}$$

$$\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_z = -2E\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \tag{6}$$

де бігармонічна функція P задовольняє рівняння

$$(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2})P = 2\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}. \tag{7}$$

Зі співвідношень (3)–(5) і заданих навантажень (1), (2) випливає, що функції P, Ψ непарні стосовно змінної z, а функція Φ – парна.

Підставимо у вирази моментів M_r, M_φ і поперечного зусилля N_{rz} напруження (4), (5) і після інтегрування одержимо:

$$M_r(r) = \int_{-h}^{h} z\sigma_r dz = 2G\left[\frac{d^2 P_1}{dr^2} - 2\nu\psi\right], \quad M_\varphi(r) = 2G\left[\frac{1}{r}\frac{dP_1}{dr} - 2\nu\psi\right],$$

$$H = 0, \quad N_{rz}(r) = \int_{-h}^{h} \tau_{rz} dz = 4G\frac{d}{dr}[P^+ - (1-\nu)\tilde{\Phi}], \tag{8}$$

де $P_1 = \int_{-h}^{h} zP dz$, $\tilde{\Phi} = \int_{-h}^{h} \Phi dz$, та позначимо

$$\psi = \int_{-h}^{h} z\frac{\partial}{\partial z}\Phi dz = 2h\Phi^+ - \tilde{\Phi}. \tag{9}$$

Замінимо дію навантажень (2) згинними моментами і поперечними зусиллями (8) і одержимо такі крайові умови для їх визначення:

$$M_r(R_j) = M^j, \quad N_{rz}(R_j) = N^j, \quad j = \overline{1, 2}, \tag{10}$$

де $M^j = \int_{-h}^{h} z\sigma_{1n}^j dz$, $N^j = \int_{-h}^{h} \sigma_{2n}^j dz$.

Використаємо напруження (4), (5) і спростимо крайові умови (1) та умови відсутності дотичних навантажень на бічних поверхнях пластини до такого вигляду:

$$\frac{\partial^2 P^+}{\partial z^2} - 2(2-\nu)\frac{\partial \Phi^+}{\partial z} = \frac{1}{2G}g^+(r), \quad \frac{\partial P^+}{\partial z} - 2(1-\nu)\Phi^+ = C_1, \tag{11}$$

де тут і надалі постійні C_j позначатимуть невідомі сталі.

Із умови гармонічності функцій переміщень і співвідношень (7), (11) слідують рівняння, які пов'язують між собою введені одновимірні функції (8), (9)

$$\Delta P_1 = 2P^+ + 2\psi - 4h(1-\nu)\Phi^+ - hC_1, \quad \Delta\tilde{\Phi} = -2\frac{\partial}{\partial z}\Phi^+ . \tag{12}$$

Наведемо локальні диференціальні рівняння рівноваги кільця, які задовольняють введені моменти і поперечне зусилля (8):

$$\frac{drM_r}{dr} - M_\varphi - rN_{rz} = 0 , \quad \frac{d(rN_{rz})}{dr} + 2rg^+ = 0 . \tag{13}$$

З останнього рівняння (8), врахувавши співвідношення (9), (13), одержимо:

$$P^+ = (1-\nu)(2h\Phi^+ - \psi) + \frac{1}{4G}\int N_{rz}(r)dr + C_2 , \tag{14}$$

де $N_{rz}(r) = \frac{R_1}{r}N^1 - \frac{2}{r}\int\limits_{R_1}^{r} rg^+ dr$. Врахувавши рівняння рівноваги (13) і співвідношення (8), після перетворень запишемо рівняння на визначальні функції

$$\Delta\Delta P_1 = 2\nu\Delta\psi - g^+ / G . \tag{15}$$

Використаємо залежності (12), (14) і одержимо спрощення рівняння (15)

$$\Delta P_1 = 2\nu\psi + \frac{1}{2G}\int N_{rz}(r)dr + C_3 , \tag{16}$$

де $C_3 = 2C_2 - hC_1$. Врахуємо, що осьові напруження є незначними, тому ними нехтують у класичних теоріях згину. Виразимо їх наближеною формулою

$$\sigma_z = g^+(r)[\frac{3}{2}\frac{z}{h} - \frac{1}{2}\frac{z^3}{h^3}] , \tag{17}$$

яка є точною [1, 2, 4], коли $g^+(r) = \text{const}$. Підставивши у співвідношення (6) напруження (4), (17), помноживши їх на z і інтегрувавши за товщиною, одержимо:

$$\Delta P_1 = -2(1-\nu)\psi - \frac{2h^2}{5G}g^+ . \tag{18}$$

Порівнюючи рівняння (16), (18), визначимо шукані функції

$$2\psi = -\frac{2h^2}{5G}g^+ - \frac{1}{2G}\int N_{rz}(r)dr - C_3 ,$$

$$\Delta P_1 = \frac{1-\nu}{2G}\int N_{rz}(r)dr - \frac{2\nu h^2}{5G}g^+ + (1-\nu)C_3 . \tag{19}$$

Розв’язок рівняння (19) має різний вигляд, коли $g^+(r) = 0$

$$P_1 = D(r) + c_1 \ln r + c_2 , \tag{20}$$

і коли $g^+(r) \neq 0$

$$P_1 = \int(\frac{1}{r}\int r f_1 dr)dr + \frac{(1-\nu)}{4}C_3 r^2 + c_1 \ln r + c_2 , \tag{21}$$

де $D(r) = \frac{(1-\nu)}{4}[A_1(r^2 \ln r - r^2) + C_3 r^2]$, $A_1 = \frac{1}{2G}(R_1 N^1 - 2\int\limits_{R_1}^{r}\eta g^+(\eta)d\eta)$, c_j, $j = \overline{1,2}$ – невідомі сталі, $f_1(r) = \frac{1-\nu}{2G}\int N_{rz}(r)dr - \frac{2\nu h^2}{5G}g^+$.

Після деяких перетворень одержимо вираз переміщень

$$u_z^+ = -\frac{2}{h}P^+ - (1-\nu)\frac{2}{h}\psi - \frac{1}{2Gh}\int N_{rz}(r)dr - \frac{1}{h}C_3, \quad P^+ = \frac{6}{h^2}P_1 + a_1 r^2 + a_2 ,$$

де a_j, $j = \overline{1,2}$ – невідомі сталі, які визначають із крайових умов.

Порівняння з відомим розв'язком. Розглянемо згин товстої круглої пластини рівномірним навантаженням $g^{+}(r) = -q$. Знайдені для цього навантаження моменти

$$M_r(r) = -\frac{q}{8}(3+\nu)(r^2 - R_2^2)\,,\quad M_\varphi(r) = -\frac{q}{8}\{(1+3\nu)r^2 - (3+\nu)R_2^2\}$$

точно збігаються з моментами відомого розв'язку [1, 2, 4] теорії пружності цієї задачі, коли $p = 2q$. Розглянемо деякі практичні задачі.

Згин кільця моментами і поперечними зусиллями. На бічних поверхнях кільця задано моменти M^j і зусилля N^j, $j = \overline{1,2}$, $g^{+} = 0$. Використавши подання (20) і задовольнивши умови (10), визначимо розподіл моментів

$$M_r = 2G\{(1+\nu)\frac{1}{2}[A_1 \ln r + C_3] + \frac{1-\nu}{4}A_1 - c_1 r^{-2}\}\,,$$

$$M_\varphi = 2G\{(1+\nu)\frac{1}{2}[A_1 \ln r + C_3] - \frac{1-\nu}{4}A_1 + c_1 r^{-2}\}\,, \tag{22}$$

де $$c_1 = \frac{T^2 - T^1}{R_2^2 - R_1^2}R_1^2 R_2^2\,,\quad C_3 = \frac{2}{1+\nu}\frac{R_2^2 T^2 - R_1^2 T^1}{R_2^2 - R_1^2}\,,\quad T^j = M^j/2G - f_2(R_j)\,, \tag{23}$$

$$A_1 = \frac{R_1 N^1}{2G}\,,\quad j = \overline{1,2}\,,\quad f_2(r) = A_1[\frac{1+\nu}{2}\ln r + \frac{1-\nu}{4}]\,.$$

Згин кільця навантаженнями, які розподілені на частині його поверхні

$$g^{+}(r) = -q(R_1 + r_2 - r),\quad r \in [R_1, R_1 + r_2],\quad g^{+}(r) = 0,\quad r \in [R_1 + r_2, R_2]\,,$$

$$M^j = 0\,,\quad j = \overline{1,2}\,,\quad N^1 = 0\,,\quad N^2 = \frac{q}{3R_2}(r_2^3 + 3r_2^2 R_1)\,.$$

Використаємо подання (21) і запишемо згинні моменти, коли $r \in [R_1, R_1 + r_2]$

$$M_r(r) = \frac{q}{3}\{-\frac{2}{15}[\nu + 4]r^3 + \frac{3}{8}(3+\nu)(R_1 + r_2)r^2 - (R_1^3 + 3r_2 R_1^2)[(1+\nu)\frac{1}{2}\ln r +$$

$$+\frac{1-\nu}{4}]\} + \frac{4\nu h^2}{5}q[-\frac{1}{2}(R_1 + r_2) + \frac{1}{3}r] + 2G[\frac{(1+\nu)}{2}C_3 - c_1 r^{-2}],$$

$$M_\varphi(r) = \frac{q}{3}\{-\frac{2}{15}(1+4\nu)r^3 + \frac{3}{8}(1+3\nu)(R_1 + r_2)r^2 - (R_1^3 + 3r_2 R_1^2)\times$$

$$\times[(1+\nu)\frac{1}{2}\ln r - \frac{1-\nu}{4}]\} + \frac{4\nu h^2}{5}q[\frac{2}{3}r - \frac{1}{2}(R_1 + r_2)] + 2G[\frac{1+\nu}{2}C_3 + c_1 r^{-2}].$$

Якщо $r \in [R_1 + r_2, R_2]$, то визначальні функції і моменти задають формулами (22), (23), де $A_1 = \dfrac{q}{6G}(r_2^3 + 3r_2^2 R_1)$,

$$T^1 = +\frac{q}{6G}R_1^2\{\frac{2}{15}(\nu + 4)R_1 - \frac{3}{8}(3+\nu)(R_1 + r_2) + [(1+\nu)\frac{1}{2}\ln R_1 +$$

$$+\frac{1-\nu}{4}](R_1 + 3r_2)\} + \frac{2\nu h^2}{30G}q[R_1 + 3r_2]\,,\quad T^2 = -A_1[\frac{1+\nu}{2}\ln R_2 - \frac{1-\nu}{4}]\,.$$

Одержані аналітичні формули спрощують аналіз напруженого стану кілець.

ВИСНОВКИ

Встановлено, що на основі осесиметричної теорії пружності можна побудувати, не використовуючи класичних гіпотез, теорію симетричного згину товстої пластини. Моменти виражено через дві функції, які точно задовольняють рівняння рівноваги, а поперечні зусилля однозначно визначені через навантаження.

Витримана математична і фізична строгість під час побудови моделі згину. Узгодження із відомими результатами забезпечують достовірність запропонованої теорії. Розроблено просту методику розрахунку товстих кілець і дисків під дією довільних навантажень, прикладених на частині їх поверхні. Наведені аналітичні вирази моментів і зусиль для розрахунку напруженого стану кілець під дією деяких навантажень.

РЕЗЮМЕ. Предложена модель осесимметричного изгиба нагруженных пластин в виде толстого кольца или диска, когда их прогибы не является большими и напряженное состояние не описывают гипотезы Кирхгофа–Лява или Тимошенко. Для симметрического изгиба использованы две функции теории упругости, через которые выражено осесимметричное напряженное состояние. После интегрирования напряжений по толщине пластины выражены моменты и поперечные усилия через две функции. Точно удовлетворены соотношение теории упругости и построено замкнутую систему уравнений на введенные функции без использования гипотез о геометрическом характере деформирования пластины. Разработан метод их решения и приведены примеры.

Ключевые слова: *модель изгиба толстых пластин, изгибные моменты, поперечные усилия.*

SUMMARY. A theory of bending of axisymmetrically loaded plates in the form of a thick ring or a disk is proposed, when their deflections are not large and the stressed state does not describe the hypotheses of Kirchhoff–Love or Tymoshenko. Two functions describing the axisymmetric stress state are used to describe the symmetric bending. After plate thickness integration moments and transverse forces are expressed through two functions. The relation of the theory of elasticity is exactly satisfied and a closed system of equations for the introduced functions is constructed without using the hypotheses about the geometric nature of plate deformation. A method for their solution has been developed. Bending problems for plates with holes are solved.

Keywords: *a model of thick plates bending, bending moments, transverse forces.*

1. *Love A. E. H.* A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 2th ed. – Cambridge: University Press, 1906. – 552 p.
2. *Тимошенко С. П.* Курс теории упругости. – К.: Наук. думка, 1972. – 508 с.
3. *Космодамианский А. С., Шалдырван В. А.* Толстые многосвязные пластины. – К.: Наук. думка, 1978. – 240 с.
4. *Доннелл Л. Г.* Балки, пластины и оболочки. – М.: Наука, 1982. – 568 с.
5. *Lukasiewicz S.* Local Loads in Plates and Shells. Monographs and Textbooks on Mechanics of Solids and Fluids. – Alphen aan den Rijn: Sijthoff & Noordhoff, 1979. – 570 p.
6. *Noor A. K.* Bibliography of monographs and surveys on shells // Appl. Mech. Rev. – 1990. – **43**, № 9. – P. 223–234.
7. *Kobayashi H.* A Survey of Books and Monographs on Plates // Mem. Fac. Eng. – 1997. – **38**. – P. 73–98.
8. *Lebée A. and Sab K. A.* Bending gradient model for thick plates. Part I: Theory // Int. J. of Solids and Struct. – 2010. – **48**, № 20. – P. 2878–2888.
9. *Ревенко В. П.* Тривимірна задача теорії пружності ортотропних консолей та пластин під згином поперечною силою // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – **40**, № 2. – С. 53–58.

   (*Revenko V. P.* Three-dimensional problem of the theory of elasticity for orthotropic cantilevers and plates subjected to bending by transverse forces // Materials Science. – 2004. – **40**, № 2. – P. 215–222.)
10. *Ревенко В. П.* Зведення тривимірної задачі теорії згину товстих пластин до розв’язання двох двовимірних задач // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2015. – **51**, № 6. – С. 34–39.

    (*Revenko V. P.* Reduction of a three-dimensional problem of the theory of bending of thick plates to the solution of two two-dimensional problems // Materials Science. – 2016. – **51**, № 6. – P. 785–792.)
11. *Revenko V. P.* Solving the three-dimensional equations of the linear theory of elasticity // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, № 7. – P. 730–741.

Одержано 07.08.2018