

УДК 539.375

## ВПЛИВ ГНУЧКОГО ПОКРИВУ НА ГРАНИЧНУ РІВНОВАГУ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З МЕРИДІОНАЛЬНОЮ ТРІЩИНОЮ

*І. П. ШАЦЬКИЙ, М. В. МАКОВІЙЧУК, А. Б. ЩЕРБІЙ*

*Івано-Франківський відділ Інституту прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України*

Досліджена задача про розтяг сферичної оболонки, що підкріплена гнучким покриттям та містить меридіональну тріщину. Покриття змодельовано шарніром, що з'єднує береги розрізу в одній з лицьових поверхонь оболонки. Методом сингулярних інтегральних рівнянь визначено напружений стан поблизу вершин тріщини та розподіл шарнірної реакції в покриття. Граничний стан оболонки проаналізовано з урахуванням обмеженої міцності покриття.

**Ключові слова:** оболонка, тріщина, гнучкий покриття, міцність.

Найпоширенішим способом ремонту тонкостінних конструкцій задля відтворення їх герметичності та продовження ресурсу роботи є нанесення на дефектну ділянку тонких латок, які сприймають частину зовнішнього навантаження, а отже, зменшують напруження поблизу пошкоджень [1, 2]. Розраховувати граничний стан складених конструкцій необхідно, застосовуючи критерії міцності і до основи, і до підкріплення. Раніше [3, 4] розроблено модель для оцінки впливу одностороннього гнучкого покриття на міцність пластини з наскрізною тріщиною. Гнучкий покриття модельований шарніром, який з'єднує береги розрізу на одній із лицьових поверхонь пластини. У працях [5–7] таку модель розвинуто для дослідження рівноваги тонких оболонок з тріщинами. Зокрема, для малих параметрів кривини побудовано аналітичні оцінки граничного навантаження вкритої необмежено міцним покриттям оболонки з тріщиною, орієнтованою в головному напрямку серединної поверхні. Відомий числовий аналіз [8] циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною.

Мета цього дослідження – вивчити вплив одностороннього гнучкого покриття на напружено-деформований стан та міцність пологої сферичної оболонки, послабленої меридіональною тріщиною, з урахуванням обмеженої міцності підкріплення. За числовим розв'язком, побудованим у широкому діапазоні зміни параметра кривини поверхні, встановити межі застосовності асимптотичних результатів.

**Інтегральне рівняння задачі.** Розглянемо ізотропну сферичну оболонку завтовшки  $2h$  з радіусом серединної поверхні  $R$ , яка послаблена наскрізною тріщиною завдовжки  $2l$ , розташованою вздовж відрізка меридіана (рис. 1). Нехай на одну із лицьових поверхонь оболонки нанесено гнучкий покриття, що деформується сумісно з підкладкою і здатний витримати доволі високі напруження. Оболонка зазнає рівномірного розтягу мембранними зусиллями  $p = \text{const}$ ; решту поверхонь об'єкта вважаємо вільними від навантаження. В межах теорії пологих оболонок Кірхгофа–Лява досліджуємо напружений стан та граничну рівновагу композиції.

Виберемо систему декартових координат  $Oxuz$  з початком у центрі розрізу (рис. 1). Якщо прийняти гіпотезу Кірхгофа про жорстку нормаль, то тріщину в обо-

лонці з абсолютно гнучким покривом доцільно моделювати математичним розрізом, береги якого з'єднані шарнірно в одній із лицьових поверхонь оболонки  $z = sh$  ( $s = +1$  для зовнішнього чи  $s = -1$  внутрішнього підкріплення). В разі симетрії об'єкта та навантаження відносно осі абсцис такий підхід призводить до задачі теорії пологих оболонок зі взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізі [5, 6]:

$$\Delta\Delta\varphi - \frac{B}{R}\Delta w = 0, \quad \Delta\Delta w + \frac{1}{DR}\Delta\varphi = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus L; \quad (1)$$

$$[u_y] - sh[\vartheta_y] = 0, \quad M_y - sh(N_y + p) = 0, \quad x \in L; \quad (2)$$

$$N_x = N_{xy} = N_y = 0, \quad M_x = M_{xy} = M_y = 0, \quad (x, y) \rightarrow \infty. \quad (3)$$

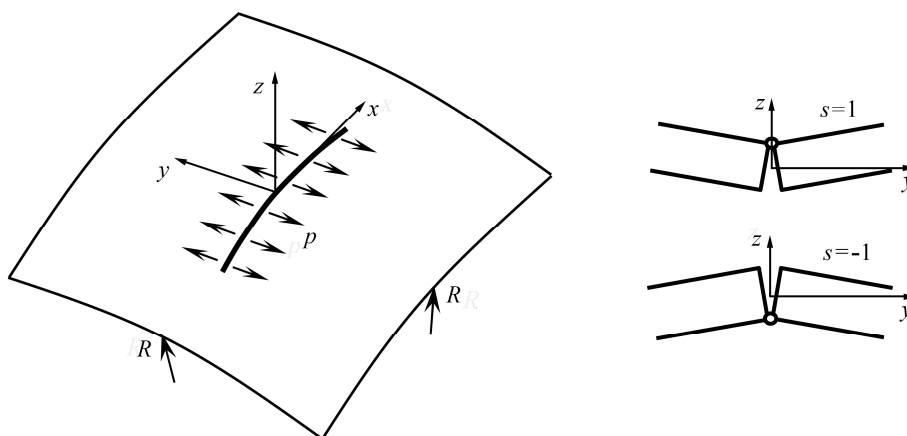


Рис. 1. Схема задачі.

Fig. 1. Scheme of the problem.

Тут  $\varphi$  – функція напружень;  $w$  – прогин;  $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$  – оператор Лапласа;  $[u_y]$  – розкриття тріщини в базовій поверхні оболонки;  $[\vartheta_y]$  – розрив кута повороту нормалі ( $\vartheta_y = \partial w / \partial y$ );  $N_x$ ,  $N_{xy}$ ,  $N_y$  – мембранні зусилля;  $M_x$ ,  $M_{xy}$ ,  $M_y$  – моменти;  $B = 2Eh$ ,  $D = 2Eh^3 / (3(1 - \nu^2))$ ;  $E$  і  $\nu$  – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки;  $L = (-l, l)$  – відрізок, вздовж якого розташована тріщина.

Основну роль за такого формулювання відіграють крайові умови (2). Перша з них означає неперервність переміщень на з'єднаних берегах розрізу, друга – описує реактивний момент, викликаний перенесенням контактної реакції з шарніра у базову поверхню оболонки.

Для побудови розв'язку задачі (1)–(3) скористаємось методом сингулярних інтегральних рівнянь (СІР). Зусилля та моменти на лінії тріщини виразимо через похідні від функцій стрибків переміщення та кута повороту нормалі [9–12]:

$$N_y(x, 0) = \frac{B}{4\pi} \int_L \{K_{11}(\xi - x)[u_y]'(\xi) - K_{13}(\xi - x)a[\vartheta_y]'(\xi)\} d\xi,$$

$$M_y(x, 0) = \frac{Ba}{4\pi} \int_L \{K_{31}(\xi - x)[u_y]'(\xi) - K_{33}(\xi - x)a[\vartheta_y]'(\xi)\} d\xi. \quad (4)$$

Тут

$$\begin{aligned}
K_{11}(z) &= \frac{1}{z} - \frac{2}{z} \left( \frac{2}{\gamma|z|} \operatorname{kei}'(\gamma|z|) - \operatorname{ker}(\gamma|z|) + \frac{1}{2} + \gamma|z| \operatorname{ker}'(\gamma|z|) \right); \\
K_{13}(z) = K_{31}(z) &= -\frac{2(1-\nu)}{z} \left( \frac{2}{\gamma^2 z^2} + \frac{2}{\gamma|z|} \operatorname{ker}'(\gamma|z|) + \operatorname{kei}(\gamma|z|) \right) - \\
&\quad - 2\gamma \operatorname{sgn} z \operatorname{ker}'(\gamma|z|); \\
K_{33}(z) &= \frac{2(1-\nu)^2}{z} \left( \frac{2}{\gamma|z|} \operatorname{kei}'(\gamma|z|) - \operatorname{ker}(\gamma|z|) \right) - \\
&\quad - 2(1-\nu^2)\gamma \operatorname{sgn} z \operatorname{ker}'(\gamma|z|) - 2\gamma^2 \int_0^z \operatorname{kei}(\gamma|z|) dz; \\
z &= \xi - x, \quad a = h/\sqrt{3(1-\nu^2)}, \quad \gamma^2 = 1/(Ra),
\end{aligned}$$

$\operatorname{ker} z$ ,  $\operatorname{kei} z$  – функції Томсона.

Підставимо вирази (4) в крайову умову (2). Вилучаючи функцію  $[\vartheta_y]$ , дістаємо СІР для знаходження розриву переміщень, яке в безрозмірних змінних  $t = x/l$ ,  $\tau = \xi/l$  подамо у вигляді

$$\frac{B}{4\pi} \int_{-1}^1 K(\tau-t) [u_y]'(\tau) d\tau = -p, \quad t \in (-1, 1); \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
K(\zeta) &= K_{11}(\zeta) - 2sK_{13}(\zeta)/\sqrt{3(1-\nu^2)} + K_{33}(\zeta)/(3(1-\nu^2)); \\
K_{jk}(\zeta) &= lK_{jk}(l\zeta), \quad j, k = 1, 3, \quad \zeta = \tau - t.
\end{aligned}$$

На кінцях розрізу розв'язок рівняння (5) повинен задовольняти умову  $[u_y](\pm 1) = 0$ .

**Асимптотичні результати та критерій руйнування.** Наближений аналітичний розв'язок задачі, побудований методом малого параметра, має вигляд [6, 7]

$$\begin{aligned}
[u_y](t) &= -\frac{2pl\sqrt{1-t^2}}{B(3-\nu-2\nu^2)} \left\{ 1 + \frac{\lambda^2}{3-\nu-2\nu^2} \left( \frac{3-\nu-6\nu^2}{32} \pi + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + s\sqrt{3(1-\nu^2)} \left[ -\frac{3+5\nu}{32} + \frac{1+3\nu}{8} \left( \frac{t^2}{3} + \frac{2}{3} + \ln \frac{\gamma_0 \lambda}{8} \right) \right] \right\} + O(\lambda^4 \ln^2 \lambda), \quad (6)
\end{aligned}$$

$$[\vartheta_y](t) = [u_y](t)/(sh),$$

де  $\lambda = l\gamma = (l/\sqrt{Rh})(3(1-\nu^2))^{1/4}$  – малий параметр кривини;  $\ln \gamma_0 = 0,5772\dots$  – стала Ейлера.

За результатом (6) із виразів (4) знаходимо розподіл зусиль у покриві на лінії розрізу

$$\begin{aligned}
N(t) &= \frac{p(3+\nu)}{2(3+2\nu)} \left\{ 1 - \frac{\lambda^2}{3-\nu-2\nu^2} \left[ \frac{(3-\nu)\pi}{8} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + s\sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{\nu}{48(1+\nu)} \left( \frac{1-\nu}{2} + (2+6\nu) \left( \ln \frac{\gamma_0 \lambda}{4} + t^2 \right) \right) \right] \right\} + O(\lambda^4 \ln^2 \lambda) \quad (7)
\end{aligned}$$

та формули для коефіцієнтів інтенсивності зусиль  $K_N$  і моментів  $K_M$  [9] в околі вершин тріщини:

$$K_N = \frac{3p\sqrt{l}(1+\nu)}{2(3+2\nu)}F(\lambda), \quad K_M = -\frac{psh\sqrt{l}(3+\nu)}{2(3+2\nu)}F(\lambda), \quad (8)$$

$$F(\lambda) = 1 + \frac{\lambda^2}{3-\nu-2\nu^2} \left[ \frac{3-\nu-6\nu^2}{32} \pi + \right. \\ \left. + s\sqrt{3(1-\nu^2)} \left( \frac{1+7\nu}{32} + \frac{1+3\nu}{8} \ln \frac{\gamma_0 \lambda}{4} \right) \right] + O(\lambda^4 \ln^2 \lambda).$$

Якщо розглянути задачу про розтяг сферичної оболонки з тріщиною без покриття, то після підставлення інтегральних виразів (4) у крайові умови  $N_y = 0$ ,  $M_y = 0$ ,  $x \in L$  дістаємо систему інтегральних рівнянь, розв'язком якої будуть функції [10, 11, 14]

$$[\bar{u}_y](t) = \frac{4pl\sqrt{1-t^2}}{B} \left[ 1 + \frac{3\pi}{32} \lambda^2 + O(\lambda^4 \ln^2 \lambda) \right], \\ [\bar{\vartheta}_y](t) = \frac{4phl\sqrt{1-t^2}}{D(3-2\nu-\nu^2)} \lambda^2 \left[ \frac{3+5\nu}{32} - \frac{1+3\nu}{8} \left( \frac{t^2}{3} + \frac{2}{3} + \ln \frac{\gamma_0 \lambda}{4} \right) + O(\lambda^4 \ln^2 \lambda) \right].$$

Цим стрибкам відповідають коефіцієнти асимптотики зусиль та моментів:

$$\bar{K}_N = p\sqrt{l} \left[ 1 + \frac{3\pi}{32} \lambda^2 + O(\lambda^4 \ln \lambda) \right], \\ \bar{K}_M = -\frac{ph\sqrt{l}}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \lambda^2 \left( \frac{3+5\nu}{32} - \frac{1+3\nu}{8} \left( 1 + \ln \frac{\gamma_0 \lambda}{4} \right) \right) + O(\lambda^4 \ln \lambda). \quad (9)$$

Вважаємо, що руйнування підкріпленої оболонки з тріщиною може відбуватися двома шляхами: розповсюдженням тріщини без порушення цілісності покриття та втратою несучої здатності через його розтріскування. Перший механізм оцінюємо енергетичним критерієм лінійної механіки руйнування за комбінованого розтягу–згину [6, 7, 9]:

$$\frac{\pi}{4h^2 E} \left[ K_N^2 + \frac{3(1+\nu)}{3+\nu} \left( \frac{K_M}{h} \right)^2 \right] = 2\gamma_*, \quad (10)$$

де  $\gamma_*$  – густина ефективної поверхневої енергії матеріалу.

Після підставлення виразів (8) у критерій (10) визначаємо граничне навантаження, за якого тріщина почне розвиватися:

$$p_{1*} = p_0 \sqrt{\frac{2(3+2\nu)}{3(1+\nu)}} \left\{ 1 - \frac{\lambda^2}{3-\nu-2\nu^2} \left[ \frac{3-\nu-6\nu^2}{32} \pi + \right. \right. \\ \left. \left. + s\sqrt{3(1-\nu^2)} \left( \frac{1+7\nu}{32} + \frac{1+\nu}{8} \ln \frac{\gamma_0 \lambda}{4} \right) \right] \right\} + O(\lambda^4 \ln^2 \lambda).$$

Тут  $p_0 = 2h\sqrt{2E\gamma_*/(\pi l)}$  – Гріффітсове зусилля для пластини, що містить тріщину з вільними від в'язей берегами.

Для оцінки граничного стану покриття скористаємось класичною теорією міцності:

$$\max_{t \in [-1,1]} N(t) = N_*,$$

де  $N_*$  – критична сила, яку здатний витримати покрив.

Використавши формули (7), з прийнятою тут мірою точності знаходимо:

$$p_{2*} = N_* \frac{2(3+2\nu)}{3(1+\nu)} \min_{t \in [-1,1]} \left\{ 1 + \frac{\lambda^2}{3-\nu-2\nu^2} \left[ \frac{(3-\nu)\pi}{8} + s\sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{\nu}{48(1+\nu)} \left( \frac{1-\nu}{2} + (2+6\nu) \left( \ln \frac{\gamma_0 \lambda}{4} + t^2 \right) \right) \right] \right\} + O(\lambda^4 \ln^2 \lambda).$$

За руйнівне зусилля слід, вочевидь, прийняти менше з  $p_{1*}$  та  $p_{2*}$ .

Нарешті, підставляючи класичний результат (9) у критерій (10), дістаємо руйнівне зусилля для оболонки з тріщиною без покриву:

$$p_{3*} = p_0 \left[ 1 - \frac{3\pi}{32} \lambda^2 + O(\lambda^4 \ln^2 \lambda) \right].$$

**Аналіз числових результатів.** Поряд з асимптотичним розв'язком інтегрального рівняння (5), якщо  $0 \leq \lambda \leq 4$  при  $\nu = 0,3$ , методом механічних квадратур [10, 11] побудували і числовий. За числовими даними для  $[u_y]'$  знаходили  $[\vartheta_y]'$  та коефіцієнти інтенсивності зусиль і моменти (рис. 2).

Як і в задачах про розтяг пластин, вплив шарнірного з'єднання берегів тріщини за розтягу оболонки проявляється перш за все у суттєвому зменшенні коефіцієнта інтенсивності зусиль та появі суттєвого коефіцієнта інтенсивності моментів. Для малих  $\lambda$  обидва коефіцієнти інтенсивності можуть змінюватися немонотонно. На наш погляд, це викликано зростанням ролі перехресних ефектів розтягу–згину, які описує ядро  $K_{13}(\zeta)$ .

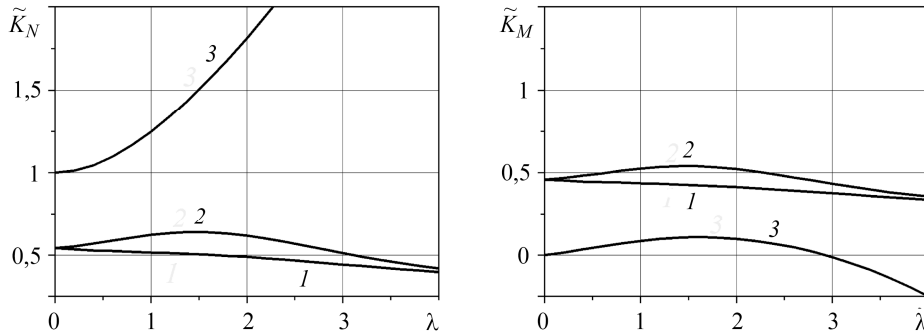


Рис. 2. Залежності коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів від параметра кривини  $\lambda = (l/\sqrt{Rh})(3(1-\nu^2))^{1/4}$ : 1 – оболонка зі зовнішнім покривом ( $s = 1$ ); 2 – з внутрішнім

( $s = -1$ ),  $\tilde{K}_N = K_N/(p\sqrt{l})$ ,  $\tilde{K}_M = K_M/(sph\sqrt{l})$ ; 3 – без покриву [9, 11, 13, 14],

$$\tilde{K}_N = \bar{K}_N/(p\sqrt{l}), \quad \tilde{K}_M = \bar{K}_M/(ph\sqrt{l}).$$

Fig. 2. Dependences of the stress intensity factors and moments on the curvature parameter  $\lambda = (l/\sqrt{Rh})(3(1-\nu^2))^{1/4}$ : 1 – shell with external coating ( $s = 1$ ); 2 – with internal coating

( $s = -1$ ),  $\tilde{K}_N = K_N/(p\sqrt{l})$ ,  $\tilde{K}_M = K_M/(sph\sqrt{l})$ ; 3 – without coating [9, 11, 13, 14],

$$\tilde{K}_N = \bar{K}_N/(p\sqrt{l}), \quad \tilde{K}_M = \bar{K}_M/(ph\sqrt{l}).$$

Графіки на рис. 3 характеризують розподіл безрозмірних зусиль у покриві на лінії тріщини для різних значень параметра кривини. З його зростанням реактивне зусилля в шарнірі суттєво підвищується, особливо посередині розрізу.

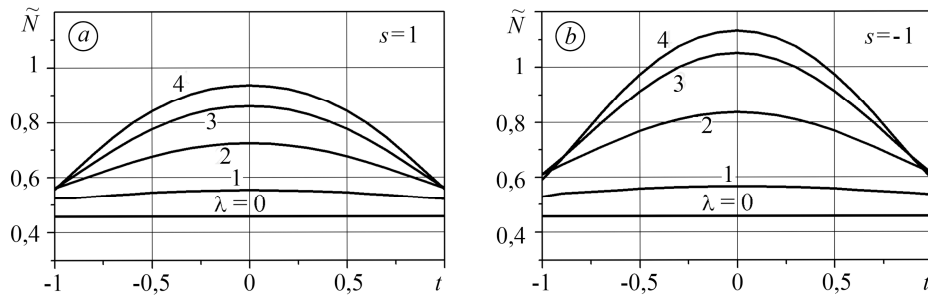


Рис. 3. Розподіл реакції в шарнірі:  $a, b$  – покриття на зовнішній і внутрішній поверхнях;  $\tilde{N} = N(t)/p$ ,  $t = x/l$ .

Fig. 3. Distribution of the reaction in the joint:  $a, b$  – coating on the external and on the internal surfaces;  $\tilde{N} = N(t)/p$ ,  $t = x/l$ .

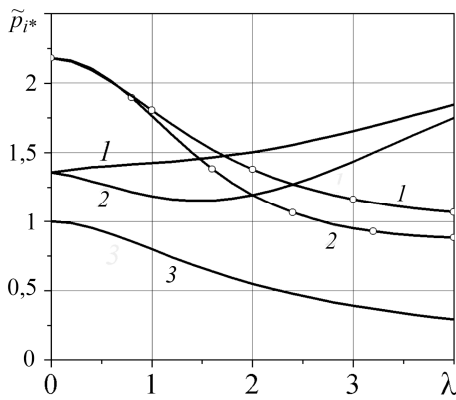


Рис. 4. Руйнівні навантаження для сферичної оболонки з тріщиною:  $\tilde{p}_{i*} = p_{i*}/p_0$ ; суцільні лінії 1, 2 –  $p_{1*}$  для оболонки зі зовнішнім та внутрішнім покритвом відповідно; марковані  $p_{2*}$  для зовнішнього та внутрішнього покриттів; 3 –  $p_{3*}$  для оболонки без покритву.

Fig. 4. Failure loads for a spherical shell with a crack:  $\tilde{p}_{i*} = p_{i*}/p_0$ ; solid lines 1, 2 –  $p_{1*}$  for a shell with external and internal coating respectively; marked lines  $p_{2*}$  for external and internal coating; 3 –  $p_{3*}$  for a shell without coating.

чатиме першочергове руйнування покритву за навантажень, менших, ніж для непідкріпленої оболонки з тріщиною. Крім того, за будь-яким з критеріїв криві 2 розташовані нижче, ніж криві 1, тобто підкріплення покритвом дефектної сферичної оболонки ззовні вигідніше, ніж зсередини. Насамкінець, порівнюючи асимптотичні і числові результати, можемо встановити діапазон застосовності аналітичних залежностей. Зокрема, похибка обчислення граничного навантаження за формулою (10) не перевищує 5%, якщо  $\lambda \leq 1$ .

### ВИСНОВКИ

Руйнівне навантаження розтягом підкріпленої сферичної оболонки з тріщиною немонотонно залежить від параметра кривини. За з'єднання берегів тріщини

Крім того, дослідили вплив кривини на граничну рівновагу сферичної оболонки з меридіональною тріщиною за розтягу (рис. 4). Якщо в класичному формулюванні граничне значення розтягувального навантаження для оболонки з тріщиною завжди менше, ніж для пластини, то, враховуючи підкріплення покритвом на внутрішній чи зовнішній поверхнях, залежно від параметра  $\lambda$ , за критерієм розтріскування оболонки можемо дістати для неї як вищу, так і нижчу утримувальну здатність порівняно з аналогічно навантаженою пластинною. Граничні навантаження, розраховані за міцністю покритву при  $N_*/p_0=1$ , суттєво знижуються зі збільшенням параметра  $\lambda$ . За малих кривин оболонки руйнівним є навантаження  $p_{1*} = \min\{p_{1*}, p_{2*}\}$ ; за більших –  $p_{2*} = \min\{p_{1*}, p_{2*}\}$ . Для слабких покриттів з меншим  $N_*$  ординати маркованих кривих закономірно зменшуються, усуваючи ефект підкріплення. Зокрема, при  $N_*/p_0 < 0,23$  у дослідженому діапазоні зміни параметра кривини марковані лінії 1 та 2 лежать нижче від класичної 3, що означає

у зовнішній лицьовій поверхні несуча здатність конструкції більша, ніж у внутрішній. Для оцінки міцності вкритих надтріснутих оболонок необхідно врахувати обмежену міцність гнучкого покриття. Слабкі підкріплення за малих значень  $N_*/p_0 < 0,23$  не дають відновлювального ефекту, тому неефективні.

**РЕЗЮМЕ.** Исследована задача о растяжении усиленной покрытием сферической оболочки с меридиональной трещиной. Гибкое покрытие смоделировано шарниром, соединяющим берега разреза в одной из лицевых поверхностей оболочки. Методом сингулярных интегральных уравнений определены напряженное состояние вблизи вершин трещины и распределение шарнирной реакции в покрытии. Предельное равновесие оболочки проанализировано с учетом ограниченной прочности покрытия.

**Ключевые слова:** оболочка, трещина, гибкое покрытие, прочность.

**SUMMARY.** The problem on tension of a coated spherical shell with a meridional crack is investigated. The flexible covering has been modeled by a joint connecting the cut edges on a shell surface. The stressed state near the crack tips and distribution of the joint reaction in the coating are determined by the singular integral equations method. The limit equilibrium of the cracked shell has been analyzed, considering limited strength of coating.

**Keywords:** shell, crack, flexible covering, strength.

1. Саврук М. П., Кравець В. С. Напружений стан підкріпленої накладкою пластини з тріщиною // Физ.-хим. механіка матеріалів. – 1991. – 27, № 4. – С. 68–74.  
(Savruk M. P., Kravets' V. S. State of stress in a patched plate containing a crack // Soviet Material Science. – 1992. – 27, № 4. – P. 360–367.)
2. Саврук М. П., Кравець В. С. Влияние подкрепляющих накладок на распределение напряжений в пластинах с трещинами // Прикл. механіка. – 1993. – 29, № 3. – С. 48–55.
3. Шацький І. П. Растяжение пластины, содержащей прямолинейный разрез с шарнирно соединенными кромками // Журн. прикл. механіки і техн. фізики. – 1989. – № 5. – С. 163–165.  
(Shatskii I. P. Tension of a plate containing a rectilinear cut with hinged rims // J. Appl. Mech. and Techn. Phys. – 1989. – 30, № 5. – P. 828–830.)
4. Шацький І. П. Модель тріщини в пластинці з гнучким покриттям // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 57. – С. 42–47.
5. Шацький І. П. Інтегральне рівняння задачі про тріщину в пологій оболонці з гнучким покриттям // Доп. АН України. – 1992. – № 1. – С. 46–48.
6. Шацький І. П. Задача о трещине в полой оболочке с гибким покрытием // Прикл. механіка і техн. фізика. – 1996. – 37, № 2. – С. 131–138.  
(Shatskii I. P. Crack problem for a shallow shell with a flexible coating // J. Appl. Mech. and Techn. Phys. – 1996. – 37, № 2. – P. 259–265.)
7. Shatskyi I. P., Makoviichuk M. V., and Shcherbii A. B. Equilibrium of cracked shell with flexible coating // Proc. of the 11<sup>th</sup> Int. Conf. SSTA 2017. Shell Structures: Theory and Application (Gdansk, Poland, Oct. 11–13, 2017). – 2017. – Vol. 4. – P. 165–168.
8. Shats'kyi I. P., Makoviichuk M. V., and Shcherbii A. B. Influence of a flexible coating on the strength of a shallow cylindrical shell with longitudinal crack // J. Math. Sci. – 2019. – 238, № 2. – P. 165–173.
9. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. – К.: Наук. думка, 1985. – 224 с.
10. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – К.: Наук. думка, 1976. – 444 с.
11. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
12. Хижняк В. К., Шевченко В. П. Смешанные задачи теории пластин и оболочек. – Донецк: Изд-во Донецк. ун-та, 1980. – 126 с.
13. Erdogan F. E. Cylindrical and spherical shells with cracks // Int. J. Fract. Mech. – 1969. – 5, № 3. – P. 229–237.
14. Folias E. S. Failure of Pressurized Vessels. Fracture: A Topical Encyclopedia of Current Knowledge. Chapter 12, ed. by G. P. Cherepanov. – 1998. – P. 275–288.

Одержано 26.09.2016