

УДК 534.134

РОЗРАХУНОК ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ІЗ АЛЮМІНІЄВОГО СПЛАВУ

П. В. ЯСНІЙ, М. С. МИХАЙЛИШИН, Ю. І. ПИНДУС, М. І. ГУДЬ

Тернопільський національний технічний університет ім. Івана Пулюя

З використанням числових та аналітичних методів розв'язано задачу про вільні коливання циліндричної оболонки. Встановлено граничну похибку числового розрахунку проти аналітичного.

Ключові слова: *гладка циліндрична оболонка, власні коливання, аналітичний та числовий розрахунки.*

Вступ. У виробках машинобудівної, авіаційної, ракетно-космічної, приладобудівної та суднобудівної галузях промисловості широко застосовують конструкційні компоненти – циліндричні оболонки, які суттєво впливають на міцність і жорсткість конструкції. Тому особливого значення набувають надійні методи числового та аналітичного визначення їх резонансних частот. Для розв'язування задач механіки ефективні системи комп'ютерного інженерного аналізу ANSYS APDL, що дає змогу оцінити поведінку моделі за реальних умов експлуатації, перевірити дієздатність конструкції без значних затрат часу та ресурсів, зокрема, методом скінченних елементів (МСЕ).

Для розрахунку оболонкових елементів конструкцій використовують точні аналітичні [1, 2] та числові методи [1]. Досліджено лінійні пришвидшення, які виникають під час морського транспортування ракети-носія “Зеніт-3SL” [4], на основі статистичної обробки їх максимальних значень на опорах установки впродовж 29 місій. Огляд експериментальних методів випроб наведено в працях [4–6].

У праці [5] визначено частоти вільних коливань тонкої циліндричної оболонки зі склопластика за несиметричних граничних умов, а в публікації [6] вивчено нелінійну поведінку оболонки з допомогою декількох числових стратегій з урахуванням невизначеностей фізичних і геометричних параметрів системи. Також розглянуто [7] задачу про вільні коливання ортотропних кругових циліндричних оболонок змінної товщини в межах уточненої теорії Тимошенка–Міндліна. Визначено [8] їх власні частоти для режимів, де домінує поперечний прогин. На основі теорії тонких оболонок Доннелла–Муштарі виведено рівняння коливань кругової циліндричної оболонки з використанням розширення ряду для осьової координати і ряду Фур'є для колового напрямку.

Мета дослідження – порівняти результати аналітичного і числового розрахунків власних частот коливань гладкої циліндричної оболонки, щоб оцінити напружено-деформований стан та втомну міцність підсилених циліндричних оболонок під час перевезень авіаційним транспортом.

Матеріали та методи випроб. Для числового моделювання використовували програмний комплекс ANSYS APDL. Для визначення частот і форм (мод) власних коливань конструкції – модальний аналіз, який є першим кроком для інших видів динамічного аналізу: перехідних процесів, гармонічного і спектрального та передбачає, що система лінійна. Інші види нелінійності (нелінійну поведінку матеріалу, контактні граничні умови, кінцеві переміщення) нехтували.

Контактна особа: М. Г. Гудь, e-mail: mishagud77@gmail.com

У декартових координатах створювали скінченно-елементну фізичну модель тонкостінного циліндра без підсилення стрингерами (рис. 1). Початок координат розташували у центрі торця циліндра у площині YZ. Поздовжньою віссю циліндра є вісь X. Довжина циліндра $L = 6,3$ m, діаметр $D = 2R = 1,8$ m, товщина стінки $h = 0,0015$ m. Механічні властивості циліндричної оболонки зі сплаву Д16АТ такі: модуль Юнга $E = 7,2 \cdot 10^5$ МПа; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$; густина $\rho = 2,7 \cdot 10^4$ Н/м³. Гравітаційне пришвидшення $g = 9,8$ м/с².

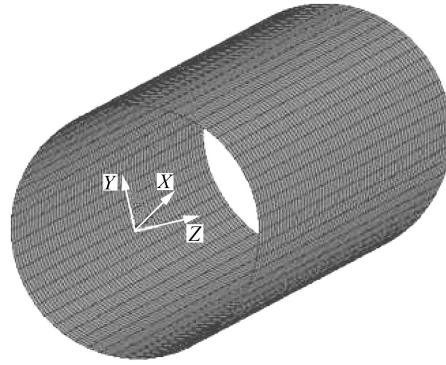


Рис. 1. Скінченно-елементна модель циліндричної оболонки.

Fig. 1. Finite-elemental model of a cylindrical shell.

Для створення скінченно-елементної моделі циліндра використовували тривимірний елемент SHELL181, який має чотири вузли і шість ступенів свободи в кожному з них: переміщення у напрямку осей X, Y і Z і повороти навколо них. Елемент можна застосовувати у лінійних і нелінійних задачах. Непідсилену оболонку закріплювали у просторі, обмежуючи переміщення крайніх торцевих вузлів зліва і справа у всіх напрямках (жорстке заземлення). Розміри скінченно-елементної сітки 100×100 mm.

Результати та їх обговорення. Для модального аналізу використовували блочний метод Ланцоша, призначений для пошуку великої кількості мод (більше 40) для великих моделей. Його рекомендують, коли модель містить дво- і тривимірні елементи складної форми і задовільно працює, містить оболонкові елементи або комбінації оболонкових, балкових і солідів.

Кількість шуканих “експандованих” мод залежить від потреб задачі (у нашому випадку – 100). Для врахування деформації конструкції під дією власної ваги заздалегідь виконували статичний розрахунок, після цього у модальному аналізі вживали опцію “Inclprestresseffects”, щоб врахувати ефекти попереднього напруженого стану. Результати розрахунків власних частот коливань циліндричних оболонок числовим методом наведено в таблиці.

Для аналітичного дослідження їх коливань використали рівняння

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2}(1+k) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \varphi} + \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} - \frac{1-\nu}{2} k \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \varphi^2} - \nu \frac{\partial w}{\partial \xi} = \\ & = \rho R^2 \left(\frac{1-\nu^2}{E} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^3}; \\ & \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \varphi} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1-\nu}{2}(1+3k) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{3-\nu}{2} k \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \varphi} - \frac{\partial w}{\partial \varphi} = \\ & = \rho R^2 \left(\frac{1-\nu^2}{E} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}, \\ & k \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} - \frac{1-\nu}{2} k \frac{\partial^3 v}{\partial \xi \partial \varphi^2} - \nu \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{3-\nu}{2} k \frac{\partial^3 v}{\partial \xi^2 \partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w + \\ & + k \left[\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \right] = -\rho R^2 \left(\frac{1-\nu^2}{E} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Тут } \xi = \frac{x}{R}; \quad k = \frac{h^2}{12R^2}.$$

Власні частоти коливань циліндричних оболонок, визначені аналітичним та числовим методами (в Hz)

Частота, визначена числовим методом [9]	Частота, знайдена аналітичним методом	Відносна похибка числового методу, %
18,8	19,1	10,06
18,8	19,1	10,06
19,4	19,7	9,75
19,4	19,7	9,75
23,5	23,9	10,72
23,5	23,9	10,72
24,2	24,6	10,4
24,2	24,6	10,4
29,8	30,3	10,5
29,8	30,3	10,5

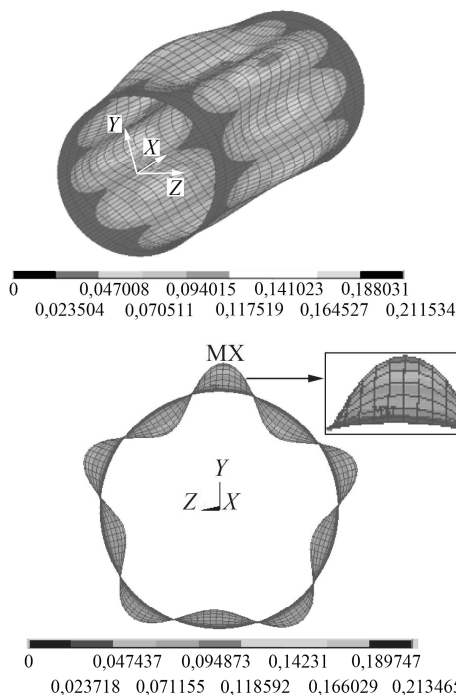


Рис. 2. Частота коливань невідсиленої циліндричної оболонки по другій моді за частоти 18,8 Hz, визначена числовим методом.

Fig. 2. Frequency of oscillation of the non-amplified cylindrical shell fluctuations in the 2nd mode at a frequency of 18.8 Hz determined by the numerical method.

Рис. 3. Зміщені на чверть довжини хвилі форми коливань невідсиленої циліндричної оболонки за частоти 18,8 Hz, визначені числовим методом.

Fig. 3. The waveforms of a non-reinforced cylindrical shell shifted to a quarter of the wavelength at a frequency of 18.8 Hz, determined by the numerical method.

Загальний розв'язок рівнянь (1) шукаємо у вигляді

$$u = U(\xi) \sin(n\varphi + \varphi_0) e^{i\omega t}, \quad v = V(\xi) \cos(n\varphi + \varphi_0) e^{i\omega t}, \quad w = W(\xi) \sin(n\varphi + \varphi_0) e^{i\omega t}, \quad (2)$$

де n – кількість вузлових ліній уздовж твірної оболонки; ω – кругова частота коливань.

Підставляючи вирази (2) у (1), отримаємо систему рівнянь для знаходження функцій U , V і W :

$$\begin{aligned}
U &= C_1 S_1 e^{a\xi} - C_2 S_1 e^{-a\xi} - C_3 S_2 \sin \beta \xi + C_4 S_2 \cos \beta \xi + e^{C\xi} [C_5 (k_1 \cos d\xi + m_1 \sin d\xi) + \\
&+ C_6 (k_1 \sin d\xi - m_1 \cos d\xi)] + e^{-C\xi} [C_7 (-k_1 \cos d\xi + m_1 \sin d\xi) + \\
&+ C_8 (k_1 \sin d\xi + m_1 \cos d\xi)]; \quad V = C_1 S_3 e^{a\xi} + C_2 S_3 e^{-a\xi} + C_4 S_4 \sin \beta \xi + C_3 S_4 \cos \beta \xi + \\
&+ e^{C\xi} [C_5 (k_2 \cos d\xi - m_2 \sin d\xi) + C_6 (k_2 \sin d\xi + m_2 \cos d\xi)] + \\
&+ e^{-C\xi} [C_7 (k_2 \cos d\xi + m_2 \sin d\xi) + C_8 (k_2 \sin d\xi - m_2 \cos d\xi)]; \\
W &= C_1 e^{a\xi} + C_2 e^{-a\xi} + C_3 \cos b\xi + C_4 \sin b\xi + \\
&+ e^{C\xi} (C_5 \cos d\xi + C_6 \sin d\xi) + e^{-C\xi} (C_7 \cos d\xi + C_8 \sin d\xi).
\end{aligned} \tag{3}$$

Якщо на кожному з країв оболонки виконуються умови Нав'є, граничні умови набудуть вигляду:

$$\varpi = 0, \quad \nu = 0, \quad M_\xi = 0, \quad N_\xi = 0, \quad \text{при} \quad \xi = 0, \tag{4}$$

$$w = 0, \quad \nu = 0, \quad M_\xi = 0, \quad N_\xi = 0, \quad \text{при} \quad \xi = l. \tag{5}$$

У результаті задоволення цих умов отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned}
C_1 + C_2 + C_3 + C_5 + C_7 &= 0; \\
C_1 p_1 + C_2 p_2 - C_3 q_1 + C_5 (p_2 + a_2) + C_6 (q_2 - b_2) + C_7 (p_2 + a_2) - C_8 (q_2 + b_2) &= 0; \\
C_1 p_3 + C_2 p_3 - C_3 q_3 + C_5 (p_4 + a_2) + C_6 (q_4 - b_2) + C_7 (p_4 + a_2) - C_8 (q_4 + b_2) &= 0; \\
C_1 S_3 + C_2 S_3 + C_3 S_4 + C_5 k_2 + C_6 m_2 + C_7 k_2 - C_8 m_2 &= 0; \\
C_1 e^{al} + C_2 e^{-al} + C_3 \cos bl + C_4 \sin bl + e^{cl} (C_5 \cos dl + C_6 \sin dl) + e^{-cl} &= 0; \\
p_1 (C_1 e^{al} + C_2 e^{-al}) - q_1 (C_3 \cos bl + C_4 \sin bl) + C_5 e^{cl} [(p_2 + a_2) \cos dl - \\
- ((q_2 - b_2) \sin dl)] + C_6 e^{cl} [(p_2 + a_2) \sin dl + ((q_2 - b_2) \cos dl)] + \\
+ C_7 e^{-cl} [(p_2 + a_2) \cos dl + ((q_2 - b_2) \sin dl)] + C_8 e^{-cl} [(p_2 - a_2) \sin dl - \\
- ((q_2 + b_2) \cos dl)] = 0; \quad p_3 (C_1 e^{al} + C_2 e^{-al}) - q_3 (C_3 \cos bl + C_4 \sin bl) + \\
+ C_5 e^{cl} [(p_4 + a_2) \cos dl - ((q_4 - b_2) \sin dl)] + C_6 e^{cl} [(p_4 + a_2) \sin dl + \\
+ ((q_4 - b_2) \cos dl)] + C_7 e^{-cl} [(p_4 + a_2) \cos dl + ((q_4 - b_2) \sin dl)] + \\
+ C_8 e^{-cl} [(p_4 - a_2) \sin dl - ((q_2 + b_2) \cos dl)] = 0; \\
C_1 S_3 e^{al} + C_2 S_3 e^{-al} + C_3 S_4 \cos bl + C_4 S_4 \sin bl + \\
+ e^{cl} [C_5 (k_2 \cos dl - m_2 \sin dl) + C_6 (k_2 \sin dl + m_2 \cos dl)] + \\
+ e^{-cl} [C_7 (k_2 \cos dl + m_2 \sin dl) + C_8 (k_2 \sin dl - m_2 \cos dl)] = 0.
\end{aligned}$$

Тут додатково позначено:

$$\begin{aligned}
a_1 &= S_1 a - \nu n S_3, & b_1 &= S_2 b + \nu n S_4, \\
a_2 &= c k_1 + d m_1, & b_2 &= c m_1 - d k_1, \\
a_3 &= n(S_1 + ka) - (1-k)a S_3, & b_3 &= n(S_2 + kb) + (1-k)b S_4, \\
a_4 &= nkc + (1-k)a_3, & b_4 &= nkd + (1-k)b_3, \\
p_1 &= a^2 - \nu n^2 + a_1, & q_1 &= b^2 + \nu n^2 + b_1, \\
p_2 &= c^2 - d^2 - \nu n^2 - \nu n k_2, & q_2 &= 2cd - \nu n m_2 + b_1, \\
p_3 &= ka^2 - \nu + a_1, & q_3 &= kb^2 + \nu + b_1, \\
p_4 &= k(c^2 - d^2) - \nu - \nu n k_2, & q_4 &= 2kcd - \nu n m_2.
\end{aligned}$$

Отже, маємо систему лінійних однорідних рівнянь для знаходження частоти коливання гладкої циліндричної оболонки $C_1 \dots C_8$. Відмінний від нуля розв'язок одержимо тоді, коли визначник коефіцієнтів

$$\begin{vmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \dots & \Psi_{18} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} & \dots & \Psi_{28} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Psi_{81} & \Psi_{82} & \dots & \Psi_{88} \end{vmatrix} = 0.$$

Звідси знаходимо частоти власних коливань оболонки за різних значень її геометричних і фізичних параметрів і різних значень n .

ВИСНОВКИ

Розглянута задача про вільні коливання циліндричної оболонки зі защемленими торцями. Для її розв'язку використано числовий та аналітичний методи. Найбільша похибка числових розрахунків власних частот коливань оболонки порівняно з аналітичним розв'язком не перевищує 10,72%.

РЕЗЮМЕ. С использованием численных и аналитических методов решена задача о свободных колебаниях цилиндрической оболочки. Установлена предельная погрешность численного расчета в сравнении с аналитическим.

Ключевые слова: гладкая цилиндрическая оболочка, собственные колебания, аналитический и численный расчеты.

SUMMARY. The problem of free oscillations of a cylindrical shell is solved using the numerical and analytical methods. The limit error of the numerical calculation with respect to the analytical solution is established.

Keywords: smooth cylindrical shell, natural oscillations, analytical and numerical calculations.

1. Моссаковский В. И., Макаренко А. Г., Никитин П. И. Прочность ракетных конструкций. – М.: Высш. шк., 1990. – 360 с.
2. Андрианов И. В., Лесничая В. А., Лобода В. В. Расчет прочности ребристых оболочек инженерных конструкций. – К.; Донецк: Виц. шк., 1986. – 168 с.
3. Мейш Ю. А. Задачі про вимушені коливання циліндричних оболонок еліптичного перерізу на пружній основі при нестационарних навантаженнях // Вісник Нац. транспорт. ун-ту. Сер. Технічні науки. – 2014. – 3, № 1. – С. 173–179.
4. Остаюк В. А., Арлекинова О. Э. Исследование результатов экспериментального определения нагружения ракеты-носителя при морской транспортировке на стартовой платформе // Ракетная техника и вооружение. Научн.-техн. сб. – 2010. – Вып. 2. – С. 71–84.
5. Шевченко В. П., Власов О. И., Каиров В. А. Экспериментальное исследование собственных колебаний конструктивно неоднородных цилиндрических оболочек // Вісник НТУУ “КПІ”. Сер. Машинобудування. – 2013. – 68, № 2. – С. 122–127.
6. Заруцкий В. А. О комплексных экспериментальных исследованиях устойчивости и колебаний конструктивно-неоднородных оболочек // Прикл. механика. – 2001. – 37, № 8. – С. 38–67.
7. Босяков С. М., Чживэй В. Определение собственных частот свободных колебаний тонкой цилиндрической оболочки из стеклопластика при несимметричных граничных условиях // Вестник Белорус. гос. ун-та. – 2011. – 1, № 1. – С. 110–115.
8. Da Silva F. M. A., Del Prado Z. J., and Gonçalves P. B. Influence of physical parameters and geometrical imperfection uncertainties on the nonlinear vibrations of axially excited cylindrical shells // J. Brazilian Soc. Mech. Sci. Eng. – 2014. – July. – P. 2043–2048.
9. Влайков Г. Г., Григоренко А. Я., Соколова Л. В. Свободные колебания анизотропных цилиндрических оболочек с переменными параметрами // Восточно-Европейский журн. передовых технологий. – 2013. – С. 13–16.
10. Dubyk Ya., Orynyak I., and Ishchenko O. An exact series solution for free vibration of cylindrical shell with arbitrary boundary conditions // Sci. J. Ternopil Natl. Tech. Univ. – 2018. – 1, № 89. – P. 79–88.
11. Yasniy P., Pyndus Y., and Hud M. Analysis of natural frequencies and shapes of stringer-stiffened cylindrical shells // Sci. J. Ternopil Natl. Tech. Univ. – 2016. – 83, № 3. – P. 7–15.

Одержано 25.03.2019