

УДК 539.3

## КОНТАКТ ПРУЖНОГО ТІЛА ТА ЖОРСТКОЇ ОСНОВИ З ВИЙМКАМИ, ЧАСТКОВО ЗАПОВНЕНИМИ НЕЗМОЧУВАЛЬНОЮ РІДИНОЮ

О. П. КОЗАЧОК

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів*

Досліджено безфрикційний контакт пружного півпростору та текстурованої квазі-еліптичними виймками жорсткої основи за наявності нестисливої рідини, що не змочує поверхні тіл, у міжповерхневих просвітах. Під дією поверхневого натягу рідина формує містки у середніх частинах просвітів, а на краях міститься газ, що перебуває під сталим тиском. Перепад тисків у рідині й газі описує формула Лапласа. Сформульовану контактну задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння відносно похідної для висоти міжповерхневих просвітів та трансцендентного рівняння для ширини рідинного містка. Проаналізовано залежності ширини рідинного містка, контактної тиску, форми просвітів, контактних зближення та податливості півпростору від поверхневого натягу рідини та прикладеного навантаження.

**Ключові слова:** контактна взаємодія, квазіеліптичні виймки, міжповерхневі просвіти, нестислива рідина, контактне зближення тіл, плоска деформація.

**Вступ.** Для поліпшення функціональних характеристик двокomпонентних з'єднань використовують текстуровання поверхонь [1, 2], яке полягає у формуванні на них регулярно розташованих виймок, ямок чи канавок. Під час експлуатації тіл з текстурованими поверхнями внаслідок різних процесів (конденсації, адсорбції тощо) міжповерхневі просвіти можуть частково чи повністю заповнюватися рідиною. Через малу висоту штучно нанесених нерівностей важливо для вирішення багатьох прикладних і наукових проблем врахувати рідинні містки між ними [3–7], які суттєво впливають на контактні характеристики з'єднань: розподіл контактної тиску, розміри міжконтактних просвітів, контактне зближення тіл. На форму меніска (бічної поверхні рідинного містка, що межує з газом) впливають параметри рідини та матеріалів тіл. Коли кут змочування не перевищує  $90^\circ$ , рідина змочує поверхні тіл (тобто вони є гідрофільними) та під дією поверхневого натягу локалізується в вужчих частинах міжконтактних просвітів, формуючи рідинні містки з меніском ввігнутої форми. Якщо кут змочування перевищує  $90^\circ$ , рідина не змочує поверхні тіл (тобто вони є гідрофобними) та локалізується в тих частинах просвітів, де їх висота найбільша, формуючи рідинні містки з меніском випуклої форми.

Огляд публікацій про дослідження взаємодії тіл з періодичним рельєфом за відсутності заповнювача просвітів між ними наведено раніше [8, 9]. Розв'язано [10–14] контактні задачі для тіл з номінально плоскими поверхнями, які мають поодинокі або періодично розташовані просвіти, що містять один вид заповнювача – рідину або газ. Вперше взаємодію випуклих тіл з урахуванням впливу рідинних міжповерхневих містків вивчено в працях [15–17]. Контактні задачі теорії пружності для двох пружних тіл з урахуванням рідинних містків досліджено для гідрофільних [18, 19] та гідрофобних [20, 21] поверхонь. Контакт пружного

тіла та гідрофільної жорсткої основи за наявності рідинних містків вивчено для поодинокі виймки [22, 23] і періодично розміщених виймок прямокутної [24] та квазіеліптичної [25] форм. Запропоновано [26] модель контакту пружного півпростору та жорсткої основи з періодичною системою квазіеліптичних виймок за наявності у міжповерхневих просвітах містків рідини, що не змочує їх поверхні. Нижче на основі цієї моделі числово проаналізовано вплив поверхневого натягу рідини і прикладеного навантаження на контактні параметри такого з'єднання.

**Формулювання задачі.** Дослідимо безфрикційну взаємодію пружного ізотропного півпростору з жорсткою основою, межа якої має нескінченну періодичну систему розташованих з періодом  $d$  плитких тунельних виймок завширшки  $2a$ ,

форму яких описує функція  $r(x) = -A \left( 1 - \text{tg}^2(\pi x/d) / \text{tg}^2(\pi a/d) \right)^{1/2}$ , де  $A$  – мак-

симальна висота виймок, що досягається у їх центрі ( $A/a \ll 1$ ). Півпростір притискається до основи під дією рівномірно розподіленого на нескінченності навантаження  $P^\infty$  і в ньому реалізується плоска деформація. Через нерівність основи між тілами виникають просвіти висотою  $h(x)$  (рис. 1). Вважаємо, що вони заповнені нестисливою рідиною, що повністю не змочує поверхні тіл (кут змочування  $\theta = 180^\circ$ ), а частково – газом, що перебуває під сталим тиском  $P_1$ . Кількість рідини в кожному просвіті однакова і залишається незмінною під навантаженням. Тому виконується умова збереження рідини

$$\ell \int_{-b}^b h(x) dx = V_0, \quad (1)$$

де  $2b$  – ширина рідинного містка;  $V_0$  – об'єм рідини, що припадає на одиницю довжини  $\ell = 1$  м просвіту в поздовжньому напрямку, перпендикулярному до площини на рис. 1.

Перепад тисків визначаємо за формулою Лапласа  $\Delta P = P_2 - P_1 = 2\sigma/h(b)$ , де  $h(b)$  – висота меніска;  $P_2$  – тиск рідини;  $\sigma$  – її поверхневий натяг.

Контактно-крайові умови задачі мають вигляд

– уздовж просвітів  $|x - kd| < a$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ):

$$\tau_{xy} = 0,$$

$$\sigma_{yy} = -P_2, \quad x \in (-b + kd, b + kd),$$

$$\sigma_{yy} = -P_1, \quad x \in (-a + kd, -b + kd) \cup (b + kd, a + kd);$$

– на ділянках контакту  $a \leq |x - kd| \leq d/2$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ):

$$\tau_{xy} = 0, \quad \nu = 0;$$

– на нескінченності ( $y \rightarrow \pm\infty$ ):

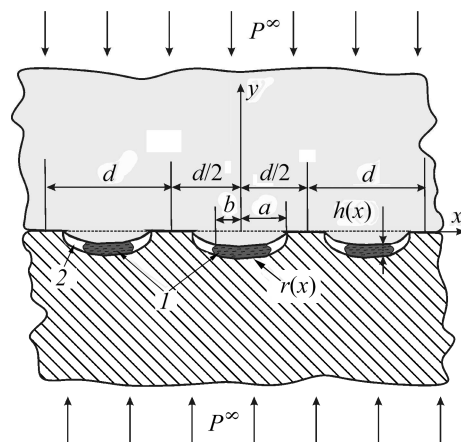


Рис. 1. Схема контакту:  
1 – рідина; 2 – газ.

Fig. 1. The scheme of contact:  
1 – liquid; 2 – gas.

$$\sigma_{yy} = -P^\infty, \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \tau_{xy} = 0.$$

Тут  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\tau_{xy}$  – компоненти тензора напружень;  $v$  – компонента вектора переміщення уздовж осі  $Oy$ .

**Розв’язання задачі.** Використовуючи метод комплексних потенціалів Колосова–Мусхелішвілі та метод функцій міжконтактних просвітів, сформульовану задачу звели до сингулярного інтегрального рівняння (СІР) [26] з ядром Коші відносно похідної висоти просвітів за горизонтальною змінною

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = \frac{d}{2\pi(1 + \xi^2)} K(P^\infty - P(\xi)) - \frac{A}{\alpha}, \quad |\xi| \leq \alpha \quad (2)$$

та трансцендентного рівняння для невідомої півширини рідинних містків  $\beta$ :

$$ld^2 \int_{-\beta}^{\beta} \frac{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{1 + \xi^2} \sum_{\ell=0}^L \Theta_\ell U_{2\ell} \left( \frac{\xi}{\alpha} \right) d\xi = V_0, \quad (3)$$

де  $K = 2(1-\nu)/G$ ;  $G = E/[2(1 + \nu)]$ ;  $\kappa = 3 - 4\nu$ ;  $G$ ,  $E$ ,  $\nu$  – відповідно модуль зсуву, модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона пружного тіла;  $\xi = \operatorname{tg} \pi x/d$ ,  $\eta = \operatorname{tg} \pi t/d$ ,

$\alpha = \operatorname{tg} \pi a/d$ ,  $\beta = \operatorname{tg} \pi b/d$ ,  $P(\xi) = \begin{cases} P_1 + 2\sigma/h(\beta), & |\xi| \leq \beta, \\ P_1, & \beta < |\xi| \leq \alpha, \end{cases}$   $\Theta_\ell$  ( $\ell = 0, \dots, L$ ) –

невідомі коефіцієнти, які визначаємо зі системи  $L+1$  лінійних алгебричних рівнянь [26]:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{K(P^\infty - P_1)}{2\pi} - \frac{2K\sigma}{\pi^2 h(\beta)} \arcsin \frac{\beta\sqrt{\alpha^2 + 1}}{\alpha\sqrt{1 + \beta^2}} \right) \frac{\xi\sqrt{\alpha^2 + 1}}{(1 + \xi^2)\sqrt{\alpha^2 - \xi_j^2}} - \\ & - \frac{K\sigma}{2\pi^2 h(\beta)} \times \frac{\Gamma(\alpha, \xi_j, \beta) - \Gamma(\alpha, \xi_j, -\beta)}{1 + \xi_j^2} - \frac{A}{\alpha d} \frac{\xi_j}{\sqrt{\alpha^2 - \xi_j^2}} = \\ & = - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \xi_j^2}} \sum_{\ell=0}^L \Theta_\ell (2\ell + 1) T_{2\ell+1} \left( \frac{\xi_j}{\alpha} \right). \end{aligned}$$

Тут  $\xi_j = \alpha \cos(\pi j / (2L + 3))$ ,  $j = 1, \dots, L + 1$ ;  $T_{2\ell+1}(\xi/\alpha)$ ,  $U_{2\ell}(\xi/\alpha)$  – поліноми Чебишова першого та другого роду відповідно;

$$\Gamma(a, x, t) = \ln \left( \frac{a^2 - tx + \sqrt{(a^2 - t^2)(a^2 - x^2)}}{a^2 - tx - \sqrt{(a^2 - t^2)(a^2 - x^2)}} \right).$$

Зумовлене поодиноким виїмкою збурення перемішень  $v$  у півплощині прямує до нуля на нескінченності. Проте за інтегрального впливу періодичної системи виїмок на великих відстанях від поверхні контакту (якщо  $y \rightarrow \infty$ ) у напрямі дії прикладених зусиль  $P^\infty$  виникає додаткове зближення тіл [15]:

$$\Delta v^\infty = \frac{A}{\alpha} \left( \sqrt{\alpha^2 + 1} - 1 \right) - d \sum_{\ell=0}^L \Theta_\ell \alpha^{-2\ell} (-1)^\ell \left( \sqrt{\alpha^2 + 1} - 1 \right)^{2\ell+1}.$$

Контактну їх податливість знаходимо зі співвідношення  $k^* = d(\Delta v^\infty)/d(P^\infty)$  [14], використовуючи формули числового диференціювання.

Контактний тиск поверхонь тіл  $P(x) = -\sigma_{yy}(x, 0)$  визначає формула

$$P(x) = \frac{-2\pi \left(1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi x}{d}\right)\right)}{K \sqrt{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi x}{d}\right) / \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi a}{d}\right) - 1}} \sum_{l=0}^L (2l+1) \Theta_l \left( \frac{\left| \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{d}\right) \right|}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi a}{d}\right)} - \sqrt{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi x}{d}\right) - 1} \right)^{2l+1} +$$

$$+ \frac{2\pi A}{Kd} \times \frac{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi x}{d}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi a}{d}\right)} \left( \left| \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{d}\right) \right| / \sqrt{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi x}{d}\right) - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi a}{d}\right) - 1} \right) + P^\infty, \quad a \leq |x| \leq d/2.$$

Трансцендентне рівняння (3) для невідомої півширини рідинних містків  $\beta$  розв'язуємо числово, використовуючи метод послідовних наближень. За початкове наближення вибираємо аналітичний розв'язок задачі, коли нехтуємо поверхневий натяг рідини ( $\sigma = 0$ ), тобто за сталого тиску заповнювача  $P_1$  у просвітах:

$$h_0(\xi) = -\frac{Kd(P^\infty - P_1)}{2\pi} \operatorname{arcth} \sqrt{\frac{\alpha^2 - \xi^2}{\alpha^2 + 1}} + \frac{A}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - \xi^2}, \quad |\xi| \leq \alpha.$$

Невідому відносну півширину рідинних містків на нульовому кроці  $\beta_0$  знаходимо з умови збереження кількості рідини (1):

$$\frac{K(P^\infty - P_1)}{2\pi} \int_0^{\beta_0} \ln \frac{\sqrt{\alpha^2 + 1} + \sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{\sqrt{\alpha^2 + 1} - \sqrt{\alpha^2 - \xi^2}} \frac{d\xi}{1 + \xi^2} +$$

$$+ \frac{2A}{\alpha d} \left[ \sqrt{\alpha^2 + 1} \arcsin \frac{\beta_0 \sqrt{\alpha^2 + 1}}{\alpha \sqrt{1 + \beta_0^2}} - \arcsin \frac{\beta_0}{\alpha} \right] - V_0 \frac{A\pi(\sqrt{\alpha^2 + 1} - 1)}{\alpha d^3} = 0.$$

**Числові результати.** Розраховували для безрозмірних величин: координати  $\tilde{x} = x/d$ ; висоти міжконтактного просвіту  $\tilde{h}(\tilde{x}) = h(x)/d$ ; форми поверхні пружного тіла, яка просіла над виїмкою  $\tilde{h}^*(\tilde{x}) = \tilde{r}(\tilde{x}) + \tilde{h}(\tilde{x})$ ; півширини виїмки (просвіту)  $\tilde{a} = a/d$ ; півширини рідинного містка  $\tilde{b} = b/d$ ; поверхневого натягу рідини  $\tilde{\sigma} = K\sigma/d$ ; тиску на нескінченності  $\tilde{P}^\infty = KP^\infty$ ; тиску газу  $\tilde{P}_1 = KP_1$ ; максимальної висоти виїмки  $\tilde{A} = A/d$ ; контактної тиску поверхонь тіл  $\tilde{P}(\tilde{x})$ ; контактної зближення тіл  $\Delta\tilde{v}^\infty = \Delta v^\infty/d$ ; контактної податливості тіл  $\tilde{k}^* = d(\Delta\tilde{v}^\infty)/d\tilde{P}^\infty$ , об'єму рідини в зазорі  $\tilde{V}_0 = V_0/V$ , що припадає на одиницю довжини  $\ell = 1$  м просвіту в поздовжньому напрямку, перпендикулярному до площини на рис. 1 ( $V$  – об'єм виїмки у цьому ж напрямку). Числово аналізували для квазіеліптичних виїмок завширшки  $\tilde{a} = 0,25$ , максимальна висота яких  $\tilde{A} = 0,001$ , тиску газу  $\tilde{P}_1 = 10^{-3}$  і об'єму рідини  $\tilde{V}_0 = 0,65$  за різного її поверхневого натягу  $\tilde{\sigma}$ :  $10^{-8}$ ;  $5 \cdot 10^{-8}$  та  $10^{-7}$ .

З підвищенням навантаження  $\tilde{P}^\infty$  півширина рідинного містка  $\tilde{b}$  збільшується (рис. 2a): що більший поверхневий натяг рідини  $\tilde{\sigma}$ , то вона менша. Зі збільшенням зовнішнього навантаження контактне зближення  $\Delta\tilde{v}^\infty$  (рис. 2b) тіл зро-

стає, а їх контактна податливість  $\tilde{k}^*$  (рис. 2c), навпаки, зменшується: що менший поверхневий натяг рідини  $\tilde{\sigma}$ , то більші контактні зближення та податливість тіл.

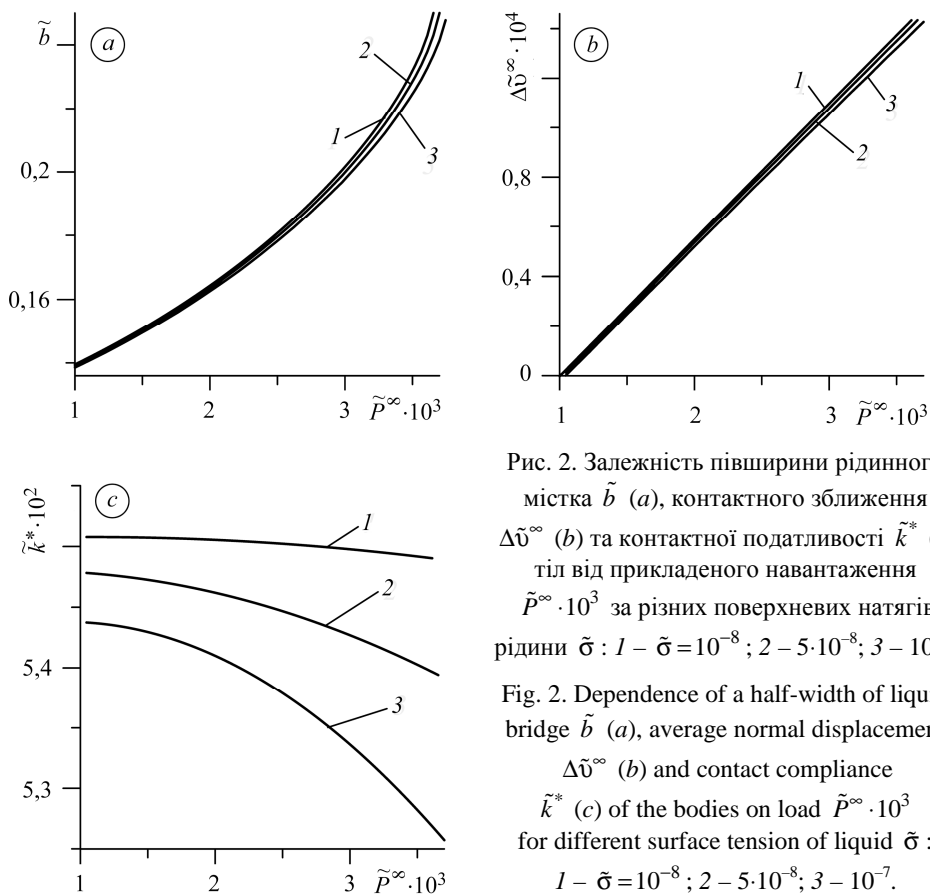


Рис. 2. Залежність півширини рідинного містка  $\tilde{b}$  (a), контактної зближення  $\Delta\tilde{v}^\infty$  (b) та контактної податливості  $\tilde{k}^*$  (c) тіл від прикладеного навантаження  $\tilde{P}^\infty \cdot 10^3$  за різних поверхневих натягів рідини  $\tilde{\sigma}$  : 1 –  $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$ ; 2 –  $5 \cdot 10^{-8}$ ; 3 –  $10^{-7}$ .

Fig. 2. Dependence of a half-width of liquid bridge  $\tilde{b}$  (a), average normal displacement  $\Delta\tilde{v}^\infty$  (b) and contact compliance  $\tilde{k}^*$  (c) of the bodies on load  $\tilde{P}^\infty \cdot 10^3$  for different surface tension of liquid  $\tilde{\sigma}$  : 1 –  $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$ ; 2 –  $5 \cdot 10^{-8}$ ; 3 –  $10^{-7}$ .

З ростом поверхневого натягу рідини  $\tilde{\sigma}$  висота проясів  $\tilde{h}(\tilde{x})$  збільшується, особливо – в їхній центральній частині (рис. 3).

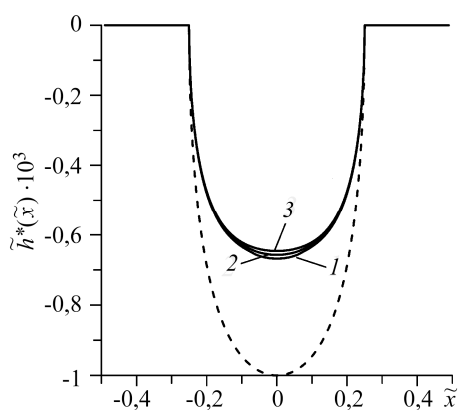


Рис. 3. Форма поверхні, яка просіла  $\tilde{h}^*(\tilde{x}) \cdot 10^3$  за зовнішнього навантаження  $\tilde{P}^\infty = 0,0035$  та різних поверхневих натягів рідини  $\tilde{\sigma}$  : 1 –  $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$ ; 2 –  $5 \cdot 10^{-8}$ ; 3 –  $10^{-7}$ . Штрихова крива описує форму виїмок  $\tilde{r}(\tilde{x}) \cdot 10^3$ .

Fig. 3. Shape of the subsided surface  $\tilde{h}^*(\tilde{x}) \cdot 10^3$  for external load  $\tilde{P}^\infty = 0.0035$  and different surface tension of liquid  $\tilde{\sigma}$  : 1 –  $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$ ; 2 –  $5 \cdot 10^{-8}$ ; 3 –  $10^{-7}$ . Dashed curve describes the grooves shape  $\tilde{r}(\tilde{x}) \cdot 10^3$ .

Зі збільшенням поверхневого натягу рідини  $\tilde{\sigma}$  її тиск у проясі підвищується (рис. 4a), а контактний тиск тіл поза ним спадає (рис. 4b). Контактний тиск

поверхонь тіл ззовні виїмки прямує до нескінченності на її краях, а з віддаленням від неї монотонно зменшується, набуваючи локального мінімуму в центрах ділянок між виїмками ( $\tilde{x} = \pm 0,5$ ). Зі зменшенням поверхневого натягу рідини від  $\tilde{\sigma} = 10^{-7}$  до  $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$  тиск рідини спадає на 45%, а контактний у точці, яка ділить навпіл ділянки між виїмками, збільшується на 7%.

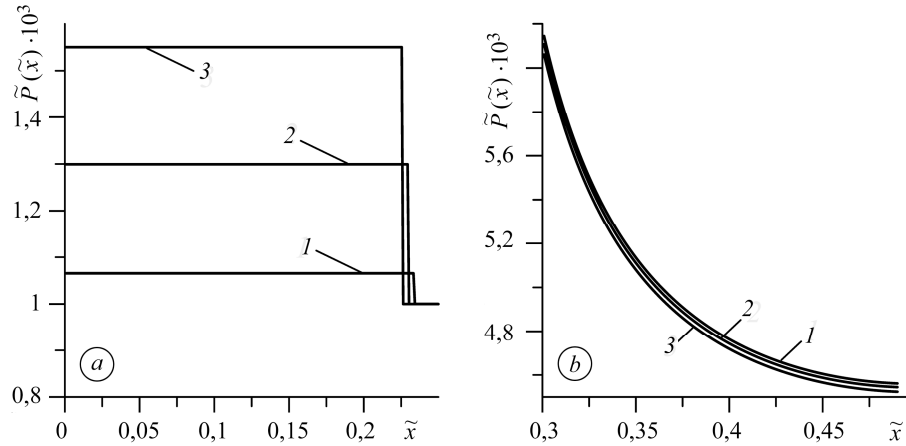


Рис. 4. Тиск рідини і газу (а), контактний тиск поверхонь тіл  $\tilde{P}(\tilde{x})$  (b) за зовнішнього навантаження  $\tilde{P}^\infty = 0,0035$  та різних поверхневих натягів рідини  $\tilde{\sigma}$  :  
 1 –  $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$ ; 2 –  $5 \cdot 10^{-8}$ ; 3 –  $10^{-7}$ .

Fig. 4. Pressure of liquid and gas (a), contact pressure of bodies surfaces  $\tilde{P}(\tilde{x})$  (b) for the external load  $\tilde{P}^\infty = 0.0035$  and different surface tension of liquid  $\tilde{\sigma}$  :  
 1 –  $\tilde{\sigma} = 10^{-8}$ ; 2 –  $5 \cdot 10^{-8}$ ; 3 –  $10^{-7}$ .

## ВИСНОВКИ

Досліджено контакт пружного півпростору та жорсткої основи, межа якої має періодичну систему виїмок квазіеліптичної форми, за наявності в міжконтактних просвітах рідинних містків. Сформульовану контактну задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння з ядром Гільберта для похідної від висоти міжконтактних просвітів та трансцендентного рівняння для ширини рідинного містка, яке отримано з рівняння збереження кількості рідини. Вивчено залежності ширини рідинного містка, висоти просвітів, контактних тиску, зближення та податливості тіл від прикладеного навантаження, поверхневого натягу рідини та її об'єму. Встановлено, що зі зменшенням поверхневого натягу рідини її тиск знижується, а контактний тиск поверхонь, контактні зближення та податливість півпростору збільшуються.

**РЕЗЮМЕ.** Исследован безфрикционный контакт упругого полупространства и текстурированной квазиэллиптическими выемками жесткой основы при наличии несжимаемой жидкости, не смачивающей поверхности тел, в межповерхностных зазорах. Под действием поверхностного натяжения жидкость формирует мостики в средних частях зазоров, а на краях под постоянным давлением содержится газ. Перепад давлений в жидкости и газе описывает формула Лапласа. Сформулированная контактная задача сведена к сингулярному интегральному уравнению относительно производной для высоты межповерхностных зазоров и трансцендентному уравнению для ширины жидкостного мостика. Проанализированы зависимости ширины жидкостного мостика, контактного давления, формы зазоров, контактных сближения и податливости полупространства от приложенной нагрузки и поверхностного натяжения жидкости.

**Ключевые слова:** контактное взаимодействие, квазиэллиптические выемки, межповерхностные зазоры, несжимаемая жидкость, контактное сближение тел, плоская деформация.

**SUMMARY.** The frictionless contact between an elastic half-space and an textured quasi-elliptical grooves of a rigid base in the presence of a non-wetting liquid that does not wet the bodies surface in the interface gaps is investigated. Under the influence of its surface tension the liquid forms bridges in the middle parts of the gaps, while at the edges there is a gas that is under constant pressure. The pressure drop in the liquid and gas is described by the Laplace formula. The formulated contact problem is reduced to a singular integral equation (SIE) for a derivative of a height of the interface gaps, and the transcendental equation for the width of the liquid bridge. The dependences of the width of the liquid bridge, the contact pressure, the shape of the gaps, the average normal displacement and contact compliance of the half-space on the applied load and the surface tension of the liquid are analyzed.

**Keywords:** contact interaction, quasi-elliptic grooves, interface gaps, incompressible liquid, average normal displacement of bodies, plane strain.

**Публікація містить результати досліджень, виконаних за грантом Президента України за конкурсним проектом Ф75/141-2018 Державного фонду фундаментальних досліджень.**

1. Etsion I. State of the art in laser surface texturing // ASME J. Tribol. – 2005. – **127**, № 1. – P. 248–253.
2. Stepien P. Deterministic and stochastic components of regular surface texture generated by a special grinding process // Wear. – 2011. – **271**, № 3–4. – P. 514–518.
3. Kobatake S., Kawakubo Y., and Suzuki S. Laplace pressure measurement on laser textured thin-film disk // Tribol. Int. – 2003. – **36**, № 4–6. – P. 329–333.
4. Zheng J. and Streater J. L. A liquid bridge between two elastic half-spaces: A theoretical study of interface instability // Tribol. Lett. – 2004. – **16**, № 1–2. – P. 1–9.
5. Shi L. and Majumdar A. Thermal transport mechanisms at nanoscale point contacts // Trans. ASME. J. Heat Transfer. – 2001. – **124**, № 2. – P. 329–337.
6. Bhushan B. Adhesion and stiction: mechanisms, measurement techniques, and methods for reductio // J. Vac. Sci. Technol. – 2003. – **21**. – P. 2262–2296.
7. Ando Y. Effect of capillary formation on friction and pull-off forces measured on submicron-size asperities // Tribology Letters. – 2005. – **19**, № 1. – P. 29–36.
8. Block J. M. and Keer L. M. Periodic contact problems in plane elasticity // J. Mech. Mater. Struct. – 2008. – **3**, № 7. – P. 1207–1237.
9. Goryacheva I. G. and Martynyak R. M. Contact problems for textured surfaces involving frictional effects // Proc. Inst. Mech. Eng., Part J: J. Eng. Tribol. – 2014. – **228**, № 7. – P. 707–716.
10. Kit G. S., Martynyak R. M., and Machishin I. M. The effect of a fluid in the contact gap on the stress state of conjugate bodies // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, № 3. – P. 292–299.
11. Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М. Взаємодія двох пружних тіл за наявності між ними періодично розташованих зазорів, заповнених реальним газом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58**, № 1. – С.103–111.  
(Kozachok O. P., Slobodian B. S., and Martynyak R. M. Interaction of two elastic bodies in the presence of periodically located gaps filled with a real gas // J. Math. Sci. – 2017. – **222**, № 2. – P. 131–142.)
12. Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М. Контакт двох пружних тіл із хвилястим рельєфом за наявності газу у просвітах // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2018. – **54**, № 2. – С. 57–63.  
(Kozachok O. P., Slobodian B. S., and Martynyak R. M. Contact of two elastic bodies with wavy topography in the presence of gases in gaps // Materials Science. – 2018. – **54**, № 2. – P. 194–201.)
13. Козачок О. П. Вплив стисливої міжконтактної рідини на взаємодію пружного тіла і текстурованої прямокутними виїмками жорсткої основи // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2018. – **54**, № 3. – С. 62–67.

- (*Kozachok O. P.* Influence of compressible intercontact liquid on the interaction of an elastic body with a rigid base textured by rectangular grooves // *Materials Science*. – 2018. – **54**, № 3. – P. 354–360.)
14. *Козачок О. П., Мартиняк Р. М., Слободян Б. С.* Взаємодія тіл з регулярним рельєфом за наявності міжконтактного середовища. – Львів: Растр-7, 2018. – 200 с.
  15. *Goryacheva I. G. and Makhovskaya Yu. Yu.* Adhesive interaction of elastic bodies // *J. Appl. Math. Mech.* – 2001. – **65**, № 2. – P. 273–282.
  16. *Rabinovich Y. I., Esayanur M. S., and Moudgil B. M.* Capillary forces between two spheres with a fixed volume liquid bridge: theory and experiment // *Langmuir*. – 2005. – **21**, № 24. – P. 10992–10997.
  17. *Zitzler L., Herminghaus S., and Mugele F. G.* Capillary forces in tapping mode atomic force microscopy // *Phys. Rev. B*. – 2002. – **66**, № 15. – P. 155436 (8 pages).
  18. *Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.* Вплив міжповерхневих рідинних містків на контактну взаємодію тіл з хвилястим рельєфом // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології*. – 2016. – Вип. 24. – С. 34–46.
  19. *Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.* Взаимодействие упругих тел с периодическим рельефом при наличии жидкостных мостиков в межконтактных зазорах // *Теорет. и прикл. механика*. – 2013. – Вып. 7 (53). – С. 45–52.
  20. *Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.* Контакт пружних тіл за наявності газу та незмочувальної рідини у періодичних міжповерхневих просвітах // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2015. – **51**, № 6. – С. 50–57.  
(*Kozachok O. P., Slobodyan B. S., and Martynyak R. M.* Contact of elastic bodies in the presence of gas and incompressible liquid in periodic interface gaps // *Materials Science*. – 2016. – **51**, № 6. – P. 804–813.)
  21. *Kozachok O. P. and Martynyak R. M.* Contact problem for wavy surfaces in the presence of an incompressible liquid and a gas in interface gaps // *Mathematics and Mechanics of Solids*. – 2019. – **24**, № 2. – P. 3381–3393.
  22. *Мартиняк Р. М., Слободян Б. С., Зеленьак В. М.* Тиск пружного півпростору на жорстку основу з прямокутною виїмкою за наявності між ними рідинного містка // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2008. – **51**, № 1. – С. 150–156.
  23. *Мартиняк Р. М., Слободян Б. С.* Контакт пружних півпросторів за наявності між ними еліптичного зазору з рідиною // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2009. – **45**, № 1. – С. 62–65.  
(*Martynyak R. M. and Slobodyan B. S.* Contact of elastic half spaces in the presence of an elliptic gap filled with liquid // *Materials Science*. – 2009. – **45**, № 1. – P. 66–71.)
  24. *Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.* Вплив міжповерхневих рідинних містків на контакт пружного тіла і жорсткої основи з періодичною системою прямокутних виїмок // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології*. – 2015. – Вип. 22. – С. 67–76.
  25. *Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.* Контакт пружного тіла і жорсткої основи з періодичною системою квазіеліптичних виїмок, частково заповнених рідиною, яка змочує поверхні тіл // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2017. – **60**, № 1. – С. 132–140.  
(*Kozachok O. P., Slobodyan B. S., and Martynyak R. M.* Contact between an elastic body and a rigid base with periodic array of quasielliptic grooves partially filled with liquid wetting the surfaces of the bodies // *J. Math. Sci.* – 2019. – **240**, № 2. – P. 162–172.)
  26. *Козачок О. П.* Моделювання контакту пружного тіла і текстурованої квазіеліптичними виїмками жорсткої основи з урахуванням міжконтактної рідини, що не змочує їх поверхні // *Проблеми обчислюваної механіки і міцності конструкцій*. – 2018. – Вип. 28. – С. 80–89.

Одержано 15.01.2019