УДК 539.3

ЗАЛІКОВУВАННЯ ТРІЩИН В АНІЗОТРОПНИХ ТІЛАХ

В. П. СИЛОВАНЮК, Н. А. ІВАНТИШИН

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Отримано розв’язок плоскої задачі теорії пружності про “заліковування” тріщини в анізотропному тілі, яку з допомогою моделі вінклерівської основи зведено до сингулярного інтегро-диференціального рівняння для переміщень точок поверхні тріщини. Для дефекту у вигляді сплющеного еліпса одержано його точний аналітичний розв’язок. За енергетичним критерієм оцінено гранично-рівноважний стан пластини зі заповненою тріщиною. Встановлено оптимальну міцність ін’єкційного матеріалу після тверднення.

Ключові слова: *“заліковування” тріщини, анізотропне тіло, включення, міцність.*

Вступ. Руйнування – достатньо складний процес навіть для ідеалізованого макроскопічного однорідного ізотропного матеріалу. В сучасних конструкціях поряд з однорідними та ізотропними використовують анізотропні матеріали, які різняться пружними властивостями у різних напрямках. Сьогодні теорія пружності анізотропного тіла достатньо повно розроблена [1, 2] і на її основі отримано розв’язки багатьох задач теорії тріщин [3–12]. Водночас деякі важливі аспекти механіки руйнування вивчено недостатньо. Зокрема, зміцнення кусково-однорідних анізотропних тіл з дефектами типу тріщин за статичних та циклічних навантажень “заліковуванням” дефектів.

В інженерній практиці для відновлення несучої здатності пошкоджених будівельних споруд тривалої експлуатації застосовують технологію ін’єкційного зміцнення дефектних зон [13–15]. Її суть – введення в пошкоджені місця бетонних і залізобетонних конструкцій і споруд (тріщини, відшарування, порожнини тощо) під тиском рідинних матеріалів, здатних після кристалізації або полімеризації формувати з бетонними матрицями міцні адгезійні зв’язки. В результаті елемент конструкції зміцнюється і здатний витримувати експлуатаційне навантаження. Щоб оцінити залишковий ресурс роботоздатності відновлених об’єктів, необхідно розв’язати задачі про граничну рівновагу тіл зі заповненими тріщинами, які є окремим класом крайових задач пружного континууму. На відміну від тріщин, поверхні яких вільні від напружень, для заповнених дефектів потрібні додаткові умови для взаємодії матеріалів матриці і наповнювача. Врахування цієї взаємодії як передачі частини навантаження, яке несе тіло зі заповненою тріщиною, є суттю запропонованої ідеї “заліковування”.

Для ізотропних тіл такі задачі розглянуті раніше [14–18]. Математично еквівалентними є задачі про тонкі включення в пружних тілах [19].

Основні співвідношення плоскої задачі теорії пружності анізотропного тіла [1]. За узагальненого плоского напруженого стану анізотропного тіла деформації залежать від напружень згідно зі співвідношеннями

$$\varepsilon_{xx} = a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{16}\tau_{xy}, \quad \varepsilon_{yy} = a_{12}\sigma_{xx} + a_{22}\sigma_{yy} + a_{26}\tau_{xy},$$
$$2\varepsilon_{xy} = a_{16}\sigma_{xx} + a_{26}\sigma_{yy} + a_{66}\tau_{xy}. \quad (1)$$

Контактна особа: В. П. СИЛОВАНЮК, e-mail: vsylovanyuk@gmail.com

Тут a_{ij} (i, j = 1, 2, 6) – пружні сталі.

Зауважимо, що за умов плоскої деформації тіла співвідношення між компонентами тензорів деформацій і напружень мають такий же вигляд, тільки замість сталих a_{ij} слід підставити сталі b_{ij}, де

$$b_{11} = \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}{a_{33}}, \quad b_{12} = b_{21} = \frac{a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23}}{a_{33}},$$

$$b_{22} = \frac{a_{22}a_{33} - a_{23}^2}{a_{33}}, \quad b_{16} = b_{61} = \frac{a_{16}a_{33} - a_{13}a_{36}}{a_{33}},$$

$$b_{66} = \frac{a_{66}a_{33} - a_{36}^2}{a_{33}}, \quad b_{26} = b_{62} = \frac{a_{26}a_{33} - a_{23}a_{36}}{a_{33}}.$$

Рівняння рівноваги за відсутності масових сил виконуватимуться, якщо функція напружень F задовольняє диференціальне рівняння [1]

$$a_{22}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 2a_{26}\frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66})\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16}\frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + a_{11}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \quad (2)$$

Загальний вираз для цієї функції залежить від параметрів μ_k – коренів алгебричного характеристичного рівняння

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0. \quad (3)$$

Якщо ці корені різні, то функцію F можна виразити через дві аналітичні функції χ_1 χ_2 комплексних змінних $z_k = x + \mu_k y$ (k = 1, 2):

$$F(x, y) = \mathrm{Re}[\chi_1(z_1) + \chi_2(z_2)]. \quad (4)$$

Напруження і переміщення через аналітичні функції подамо так [1]:

$$\sigma_{xx} = 2\,\mathrm{Re}\{\mu_1^2\Phi_1(z_1) + \mu_2^2\Phi_2(z_2)\},$$

$$\sigma_{yy} = 2\,\mathrm{Re}\{\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)\},$$

$$u_x(z) = 2\,\mathrm{Re}[p_1\varphi_1(z_1) + p_2\varphi_2(z_2)],$$

$$u_y(z) = 2\,\mathrm{Re}[q_1\varphi_1(z_1) + q_2\varphi_2(z_2)]. \quad (5)$$

Тут $p_k = a_{11}\mu_k^2 + a_{12} - a_{16}\mu_k$; $q_k = a_{12}\mu_k + a_{22}/\mu_k - a_{26}$; $\Phi_1(z_1) = \varphi_1'(z_1) = \chi_1''(z_1)$; $\Phi_2(z_2) = \varphi_2'(z_2) = \chi_2''(z_2)$.

Міцність анізотропної пластини з тріщиною. Нехай безмежна анізотропна пластина містить прямолінійну тріщину розміром $2l$ і знаходиться під дією навантажень розтягу інтенсивності p (див. рисунок).

Відомо [10], що граничне навантаження p_c для пластини розраховане згідно з критерієм Гріффітса:

$$p_c = 2\left(\gamma E_2 \Big/ \left(\pi l\,\mathrm{Re}\left[i\frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1\mu_2}\right]\right)\right)^{1/2}. \quad (6)$$

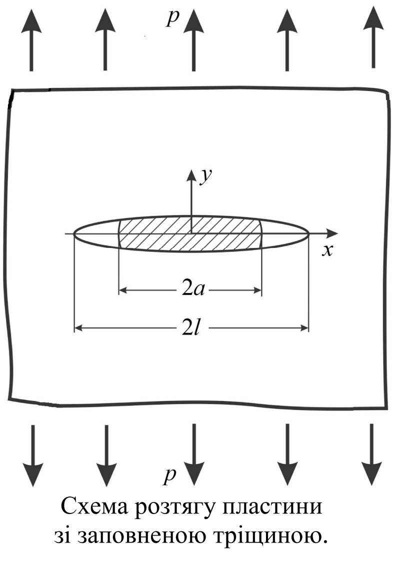

Схема розтягу пластини зі заповненою тріщиною.

A plate with a filled crack under tension.

Для плоскої деформації тіла з тріщиною

$$p_c = 2\left(\gamma E_2 \Big/ \left(\pi l\left(1-\nu_{32}\nu_{23}\right)\mathrm{Re}\left[i\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1\mu_2}\right]\right)\right)^{1/2} . \quad (7)$$

Тут γ – питома енергія руйнування матеріалу в площині $y = 0$; E_2 – модуль пружності за розтягу в напрямі осі y; ν_{32}, ν_{23} – коефіцієнти Пуассона.

Інтегральне рівняння задачі про заповнену тріщину. Припустимо, що після ін'єктування рідинний матеріал заповнює частину тріщини на відрізку $[-a, a]$ і внаслідок тверднення на поверхні поділу матеріалів виникають зв'язки, що забезпечують ідеальний механічний контакт. Встановимо для цього випадку граничні навантаження.

Уявно видаляємо ін'єкційний матеріал із тріщини, замінюючи його дію напруженнями згідно з моделлю вінклерівської основи:

$$\sigma_{yy} = \frac{[u_y^*]}{2h}E , \qquad \tau_{xy} = 0 \text{ , на } (-a, a), \quad (8)$$

де E – модуль пружності за розтягу матеріалу заповнювача тріщини після тверднення; $2h$ – товщина включення; $[u_y^*]$ – стрибок переміщень точок поверхонь включення: $u_y^* = u_y^0 + u_y$, $u_y^0 = a_{22}ph$.

На основі принципу суперпозиції задачу про розтяг пластини зі заповненою тріщиною можна звести до двох задач: про розтяг пластини без тріщини і задачі для пластини з розрізом довжиною $2l$, на поверхнях якого задані зусилля

$$\sigma_{yy} = -p + \frac{[u_y^*]}{2h}E , \qquad \tau_{xy} = 0 \text{ на } (-a, a) , \quad (9)$$

$$\sigma_{yy} = -p , \quad \tau_{xy} = 0 \text{ на } (-l, -a) \text{ і } (a, l).$$

Розв'яжемо другу задачу, оскільки розв'язок першої тривіальний і не пов'язаний з тріщиною. Через симетрію задачі відносно осі тріщини достатньо розглянути пружну рівновагу півплощини $y > 0$, на межі якої, окрім умов (9), виконуються умови рівності нулю переміщень $u_y(x, 0)$ і дотичних напружень $\tau_{xy}(x, 0)$ поза відрізком $(-l, l)$:

$$u_y = 0, \qquad \tau_{xy} = 0 \text{ на проміжках } (-\infty, -l) \text{ і } (l, \infty). \quad (10)$$

Через відсутність дотичних напружень на осі x можна вилучити з розгляду одну з функцій Φ_1, Φ_2 із загального розв'язку (5).

Зокрема, оскільки

$$\mathrm{Re}[\mu_1\Phi_1'(x) + \mu_2\Phi_2'(x)] = 0 , \quad (11)$$

із теорії аналітичних функцій випливає

$$\mu_1\Phi_1'(z) + \mu_2\Phi_2'(z) = 0 , \quad (12)$$

звідки

$$\Phi_2'(z) = -\frac{\mu_1}{\mu_2}\Phi_1'(z) . \quad (13)$$

Продиференціюємо останню із формул (5) по x, взявши до уваги співвідношення (13) та граничну умову (10):

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{q_1\mu_2 - q_2\mu_1}{\mu_2}\Phi_1'(x)\right) = \begin{cases} g'(x), & \text{на проміжку } (-l, l), \\ 0, & \text{на проміжках } (-\infty, -l) \text{ і } (l, \infty) , \end{cases} \quad (14)$$

тут $g(x)$ – невідомі переміщення точок границі півплощини на проміжку $(-l,\ l)$. Застосувавши формулу Коші, для верхньої півплощини із виразу (14) отримаємо:

$$\Phi_1'(z_1) = \frac{1}{2\pi i}\frac{\mu_2}{q_1\mu_2 - q_2\mu_1}\int_{-l}^{l}\frac{g'(x)dx}{x - z_1}\ . \tag{15}$$

Далі з першої граничної умови (9) та співвідношень (12), (13), (15) одержимо сингулярне інтегро-диференціальне рівняння для невідомої функції переміщень $g(x)$:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\pi i}\frac{\mu_1 - \mu_2}{q_1\mu_2 - q_2\mu_1}\right)\int_{-l}^{l}\frac{g'(x)dx}{x - t} = \begin{cases}\dfrac{g(x)}{h(x)}E - p(1 - a_{22}E) & \text{на } (-a,\ a)\ ,\\ -p, & \text{на } (-l, -a) \text{ і } (a,\ l)\ .\end{cases} \tag{16}$$

Загалом це рівняння можна розв’язати числовими або наближеними аналітичними методами.

Коли поверхню тріщини вважати сплющеним еліпсом з півосями $l >> c$, тобто $h(x) = c\sqrt{1 - x^2/l^2}$, то, якщо $a = l$, можна отримати точний розв’язок цього рівняння у вигляді

$$g(x) = A\,p\sqrt{l^2 - x^2}\ ,\quad A = (1 - a_{22}E)\left(\pi\,\mathrm{Re}\frac{\mu_1\mu_2}{a_{22}(\mu_1 + \mu_2) - a_{26}\mu_1\mu_2} + \lambda E\right)^{-1}. \tag{17}$$

Граничні навантаження для пластини зі заповненою тріщиною. Інтенсивність граничних навантажень для тіла зі “залікованою” тріщиною розрахуємо за енергетичним критерієм, згідно з яким для підростання країв тріщини на малу величину Δl необхідно, щоб енергія деформації

$$W(l + \Delta l) - W(l) \ge 4\Delta l\gamma\,.$$

Розкладаючи величину $W(l + \Delta l)$ у ряд Тейлора та нехтуючи члени вищого порядку малості, ніж Δl, отримуємо:

$$\frac{\partial W}{\partial l} \ge 4\gamma\ . \tag{18}$$

Енергію деформації встановлюємо згідно зі співвідношенням

$$W(l) = \int_{-l}^{l}\sigma_{yy}(x, 0)\,g(x)dx\,, \tag{19}$$

тут $\sigma_{yy}(x, 0)$ – напруження, розраховані згідно з першою умовою (9). Враховуючи розв’язок (17), дістанемо:

$$\sigma_{yy}(x, 0) = p(A\lambda + a_{22} - 1)\,. \tag{20}$$

Звідси та з формули (19)

$$W(l) = \frac{A\pi p^2 l^2}{2}(A\lambda + a_{22} - 1)\,. \tag{21}$$

Граничне значення зовнішнього навантаження p_*, встановлене зі співвідношень (18), (21), таке:

$$p_c^* = 2\sqrt{\frac{\gamma}{A\pi l\left(A\lambda + a_{22} - 1\right)}}\ . \tag{22}$$

Щоб забезпечити міцність пластини на такому рівні, необхідно, щоб ін’єкційний матеріал не зруйнувався раніше, ніж матриця. Напруження

$$\sigma_{yy} = p(a_{22}E + A\beta)\,, \qquad \beta = l/c\,, \tag{23}$$

які виникають у ньому, постійні, що узгоджується з відомими результатами про поліноміальну консервативність поля напружень в еліпсоїдальному (еліптичному) включенні [20] в анізотропному середовищі за теорією міцності максимальних напружень. Встановимо інтенсивність зовнішніх навантажень, за яких можливе руйнування матеріалу заповнювача:

$$p_c^i = \sigma_B^i /(a_{22}E + A\beta)\,, \tag{24}$$

де σ_B^i – границя міцності матеріалу.

Оптимальну міцність ін’єкційного матеріалу розраховуємо з умови $p_c^i \ge p_c^*$, яка означає, що спочатку руйнується матриця біля вершини тріщини. З урахуванням залежностей (22), (24) отримуємо:

$$\sigma_B^i \ge 2(a_{22}E + A\beta)\sqrt{\frac{\gamma}{A\pi l(A\lambda + a_{22} - 1)}}\;. \tag{25}$$

За виконання цієї умови міцність пластини зі “залікованою” тріщиною визначатиме формула (22).

ВИСНОВКИ

Отримано розв’язок плоскої задачі теорії пружності для анізотропної пластини зі “залікованою” тріщиною, яку зведено до розв’язування сингулярного інтегро-диференціального рівняння для переміщень точок поверхні тріщини. Для дефекту у вигляді сплющеного еліпса одержано точний аналітичний розв’язок рівняння. Встановлено максимальну інтенсивність навантажень розтягом, які може витримати така пластина, не руйнуючись. Виявлено, що ефективність відновлення міцності пластини залежить від пружних параметрів анізотропного матеріалу та модуля Юнґа матеріалу заповнювача. Розраховано оптимальні характеристики ін’єкційного матеріалу для зміцнення пластини.

РЕЗЮМЕ: Получено решение плоской задачи теории упругости о “залечивании” трещины в анизотропном теле, которую с помощью модели винклеровской основы сведено к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению относительно перемещений точек поверхности трещины. Для дефекта в виде сплющенного эллипса получено его точное аналитическое решение. С помощью энергетического критерия оценено предельно равновесное состояние такой пластины. Установлено оптимальную прочность инъекционного материала после твердения.

Ключевые слова: *“залечивание” трещины, анизотропное тело, включение, прочность.*

SUMMARY. The solution of the plane problem of elasticity theory of “healing” the crack in the anisotropic body is obtained. Using the Winkler basis model, the problem is reduced to a singular integro-differential equation with respect to displacements of points of the crack surface. In the case of a flattened ellipse defect, the exact analytical solution of the corresponding equation is obtained. The limit equilibrium state of the plate with the crack is estimated using the energy criterion. The optimum strength of the injection material after hardening is set to maximize the strength of the plate.

Keywords: *“healing” the crack, anisotropic body, inclusion, strength.*

1. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат, 1957. – 464 с.
2. *Elliot H. A.* Three-dimensional stress distributions in hexagonal aeolotropic crystals // Proc. of the Cambridge Philos. Soc. – 1948. – **44**, part 4. – P. 522–533.
3. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.

4. *Sih G. C., Paris P. C., and Irwin G. R.* On cracks in rectilinearly anisotropic bodies // Int. J. Fract. Mech. – 1965. – **1**, № 3. – P. 189–203.
5. *Wu E. M.* Application of fracture mechanics to anisotropic plates // J. of Appl. Mech. Tras. ACME. –1967. – **34**, № 4. – P. 967–974.
6. *Бережницкий Л. Т., Панасюк В. В., Садивский В. М.* О влиянии анизотропии материала на коэффициенты интенсивности напряжений возле дефектов типа трещин // Проблемы прочности. – 1971. – № 4. – С. 16–21.
7. *Фильштинский Л. А.* Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1976. – № 5. – С. 91–97.
8. *Ioakimidis N. I. and Theocaris P. S.* The problem of the simple smooth crack in an infinite anisotropic elastic medium // Int. J. Solids Struct. – 1977. – **13**, № 4. – P. 269–278.
9. *Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П.* О равновесии и распространении трещин в анизотропной среде // Прикл. математика и механика. – 1961. – **25**, вып. 1. – С. 45–55.
10. *Серенсен С. В., Зайцев Г. П.* Несущая способность тонкостенных конструкций из армированных пластиков с дефектами. – К.: Наук. думка, 1982. – 296 с.
11. *Божидарнік В. В., Максимович О. В.* Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами. – Луцьк: ЛДТУ, 2003. – 226 с.
12. *Божидарнік В. В., Андрейків О. Є., Сулим Г. Т.* Механіка руйнування, міцність і довговічність неперервно армованих композитів: у 2-х т. – Луцьк: Надстир'я, 2007. – Т. **2**. – 424 с.
13. *Czarnecki L. and Emmons P. H.* Naprava i ochrona konstrukcji betonowych. – Krakow: Polski Cement, 2002. – 434 s.
14. *Маруха В. І., Панасюк В. В., Силованюк В. П.* Ін'єкційні технології відновлення роботоздатності пошкоджених споруд тривалої експлуатації. – Львів: Сполом, 2009. – 298 с.
15. *Panasyuk V. V., Marukha V. I., and Sylovanyuk V. P.* Injection Technologies for the Repair of Damaged Concrete Structures. – Springer. – 2014. – 230 p.
16. *Силованюк В. П., Маруха В. І., Онищак Н. В.* Міцність тіла з тріщиною, частково заповненою ін'єкційним матеріалом // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – **45**, № 5. – С. 77–80.

    (*Sylovanyuk, V. P., Marukha, V. I., Onyshchak, N. V.* Strength of a body containing a crack partially filled with injection material // Materials Science. – 2009. – **45**, № 5. – P. 696–701.)
17. *Силованюк В. П., Маруха В. І., Онищак Н. В.* Залишкова міцність циліндричних елементів з тріщинами, залікованими за ін'єкційною технологією // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – **43**, № 1. – С. 99–104.

    (*Sylovanyuk, V. P., Marukha, V. I., Onyshchak, N. V.* Residual strength of cylindrical elements with cracks healed by using the injection technology // Materials Science. – 2007. – **43**, № 1. – P. 109–116.)
18. *Силованюк В. П., Ревенко А. В.* Довготривала міцність пружного тіла з еліптичною тріщиною, заповненою в'язкопружним матеріалом // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2012. – **48**, № 1. – С. 33–38.

    (*Sylovanyuk V. P., Revenko A. V.* Long-term strength of an elastic body with elliptic cracks filled with a viscoelastic material // Materials Science. – 2012. – **48**, № 1. – P. 29–35.)
19. *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
20. *Asaro R. I. and Barnett D. M.* The non-uniform transformation strain problem for an anisotropic ellipsoidal inclusion // J. Mech. and Phys. Solids. – 1975. – **23**, № 1. – P. 77–83.

Одержано 22.05.2019