

УДК 539.37

НАПРУЖЕНИЙ СТАН В'ЯЗКОПРУЖНОГО ШАРУ НА ЖОРСТКІЙ ОСНОВІ ПІД ДІЄЮ ЗОСЕРЕДЖЕНОГО ЦИКЛІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

I. С. СКОРОДИНСЬКИЙ¹, О. В. МАКСИМУК²

¹ Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів;

² Львівський національний університет ім. Івана Франка

У межах узагальненої двопараметричної моделі досліджено основні закономірності деформування нескінченного в'язкопружного шару на жорсткій основі за дії зосередженого циклічного навантаження. Змодельовано настання усталеного режиму деформування за періодичного негармонічного навантаження. Виявлено важливість врахування залишкових деформацій (переміщень) у шарі, виготовленому з матеріалу Кельвіна–Фойгта, та їхню роль під час оцінки швидкості настання усталеного режиму.

Ключові слова: *в'язкопружний шар, узагальнена двопараметрична модель, циклічне навантаження, вертикальне переміщення, усталений режим, залишкові деформації.*

Вступ. Циклічні навантаження – одні з найрозповсюдженіших у природі та техніці. Тому актуально вивчити їх дію на непружні середовища та елементи конструкцій, коли спостерігаються запізнення реакції матеріалу на зовнішню механічну дію, релаксація напружень, повзучість (течіння), незворотні залишкові деформації та гістерезисні втрати [1–3].

У праці [4] подано результати теоретичних та експериментальних досліджень накопичення незворотних залишкових деформацій у дорожньому асфальтобетоні за циклічних навантажень. При цьому асфальтобетон розглядали або як тверду рідину Максвелла [1], або як пружно-в'язко-пластичне середовище Богуславського. Вивчено [5] механічну поведінку в'язкопружних матеріалів під час малоциклового деформування. У межах механіки ґрунтів (теорії одновимірної консолідації) досліджено [6–10] їх просідання (ступінь консолідації) в часі за дії нормального, рівномірно розподіленого навантаження, яке змінюється в часі за різними законами. При цьому в статтях [6–8] скелет ґрунту розглядали як пружне середовище, а в працях [9, 10] враховували його в'язкопластичні властивості.

У цій статті досліджено механічну поведінку нескінченного в'язкопружного шару на жорсткій основі під дією зосередженого циклічного навантаження в межах узагальненої двопараметричної моделі [11–13]. Вивчено часову залежність вертикального переміщення навантаженої поверхні для різних матеріалів шару, а також усталений режим та залишкові деформації за дії періодичного прямокутного навантаження.

Формулювання задачі. Розглянемо нескінченний в'язкопружний шар товщиною $2h$, зчеплений зі жорсткою основою. За плоскої деформації розглядатимемо тільки поперечний переріз шару та основи. Вісь Ox направимо вздовж середньої лінії поперечного перерізу шару зліва направо, а вісь Oy – перпендикулярно догори в бік незакріпленої поверхні. Матеріал шару описує модель Кельвіна–

Контактна особа: I. С. СКОРОДИНСЬКИЙ, e-mail: skorodynski@ukr.net

Фойгта. До незакріпленої поверхні шару, в точці з координатами $(0, h)$, прикладено нормальне зосереджене циклічне навантаження

$$P(t) = \sum_{i=1}^N P_i [H_+(t - t_i) - H_+(t - t_i - \tau_l)], \quad (1)$$

де P_i – амплітуди навантаження у кожному циклі; t_i – моменти його прикладання ($i = \overline{1, N}$, $t_1 = 0$); τ_l – час дії, а $H_+(t)$ – асиметрична функція Хевісайда (рис. 1).

Диференціальне рівняння для визначення вертикального переміщення v навантаженої поверхні в межах узагальненої двопараметричної моделі, крайова та початкова умови відомі [13].

Далі розглядатимемо тільки циклічні навантаження сталої амплітуди ($P_1 = \dots = P_N = P_0$), причому $t_2 - t_1 = \dots = t_N - t_{N-1} = T_c$. За цих припущень $t_i = (i-1)T_c$ ($i = \overline{1, N}$), а функція (1) стає періодичною з періодом T_c і набуває вигляду

$$P(t) = P_0 \sum_{i=1}^N [H_+(t - t_i) - H_+(t - t_i - \tau_l)]. \quad (2)$$

Вертикальне переміщення навантаженої поверхні. Отримано [13] розв'язок поставленої задачі, коли зосереджена сила довільно змінюється в часі. Введемо безрозмірні координату $\bar{x} = x/h$, час $\bar{t} = t/\tau_0$ (τ_0 – характерний час), час запізнення елемента Кельвіна–Фойгта $\bar{\tau}_K = \tau_K/\tau_0$, час дії навантаження $\bar{\tau}_l = \tau_l/\tau_0$ та період циклу $\bar{T}_c = T_c/\tau_0$. Тоді для безрозмірного вертикального переміщення $\bar{v}(0, \bar{t}) = 2Gv(0, t)/(3P_0)$ точки прикладання зосередженої сили (G – рівноважний модуль зсуву матеріалу шару) отримаємо такі подання:

$$v(0, t) = -\frac{1}{\pi} \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t-t_j}{\tau_K} \frac{\alpha^2 + u^2}{1+u^2}\right) \left[\exp\left(\frac{\tau_l}{\tau_K} \frac{\alpha^2 + u^2}{1+u^2}\right) - 1 \right] \frac{du}{\alpha^2 + u^2} + \frac{\pi}{2\alpha} - \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t-t_i}{\tau_K} \frac{\alpha^2 + u^2}{1+u^2}\right) \frac{du}{\alpha^2 + u^2} \right\}, \quad t_i \leq t < t_i + \tau_l;$$

$$v(0, t) = -\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^i \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t-t_j}{\tau_K} \frac{\alpha^2 + u^2}{1+u^2}\right) \left[\exp\left(\frac{\tau_l}{\tau_K} \frac{\alpha^2 + u^2}{1+u^2}\right) - 1 \right] \frac{du}{\alpha^2 + u^2},$$

$$t_i + \tau_l \leq t < t_{i+1} \quad (i = \overline{1, N}; \quad t_{N+1} \rightarrow \infty). \quad (3)$$

Тут $\alpha^2 = 3(1-\nu)/[2(1-2\nu)]$, а ν – коефіцієнт Пуассона матеріалу шару; верхні риси над безрозмірними величинами опущено.

Якщо час дії навантаження малий, то

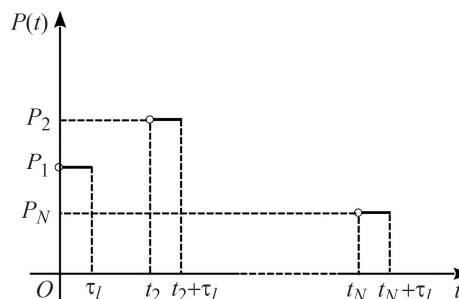


Рис. 1. Схема циклічного навантаження змінної амплітуди.

Fig. 1. The scheme of cyclic load of variable amplitude.

$$\exp\left(\frac{\tau_l \alpha^2 + u^2}{\tau_K 1 + u^2}\right) - 1 \approx \frac{\tau_l \alpha^2 + u^2}{\tau_K 1 + u^2}, \quad \exp\left(-\frac{t - t_i \alpha^2 + u^2}{\tau_K 1 + u^2}\right) \approx 1 - \frac{t - t_i \alpha^2 + u^2}{\tau_K 1 + u^2}.$$

Наближені формули для вертикального переміщення точки $x = 0$ мають вигляд

$$v(0, t) \approx -\frac{1}{\tau_K} \left[\frac{\tau_l}{\pi} \sum_{j=1}^{i-1} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t - t_j \alpha^2 + u^2}{\tau_K 1 + u^2}\right) \frac{du}{1 + u^2} + \frac{t - t_i}{2} \right], \quad t_i \leq t < t_i + \tau_l;$$

$$v(0, t) \approx -\frac{\tau_l}{\pi \tau_K} \sum_{j=1}^i \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t - t_j \alpha^2 + u^2}{\tau_K 1 + u^2}\right) \frac{du}{1 + u^2}, \quad t_i + \tau_l \leq t < t_{i+1}$$

$$(i = \overline{1, N}; t_{N+1} \rightarrow \infty). \quad (4)$$

На рис. 2 побудовано графіки зміни в часі вертикального переміщення в точці прикладання зосередженої сили для трьох матеріалів шару (для визначення безрозмірних переміщень використовували модуль зсуву матеріалів 1 та 2). Період циклу $T_c = 5$ s, кількість циклів $N = 22$, а час дії навантаження $\tau_l = 0,3$ s. Характерний час $\tau_0 = 10$ s. Суцільні криві відповідають точним формулам (3), а штрихпунктирні – наближеним (4). Отже, на відміну від пружного матеріалу, де графіки для переміщень повторювали б графік для зовнішнього навантаження (2) з відповідними амплітудами, у в'язкопружному матеріалі Кельвіна–Фойгта переміщення навантаженої поверхні зростає зі скінченною швидкістю, поки діє зовнішнє навантаження. Максимальне за модулем вертикальне переміщення у кожному циклі досягається в момент закінчення його дії. Після зняття навантаження поверхня $y = h$ намагається відновити свою форму зі швидкістю тим більшою, що менший час запізнення τ_K (рис. 2), тобто деформації релаксують. Через навантаження в наступному циклі не вдається повністю зняти деформацію, тому під час циклічного навантаження завжди є ненульові залишкові в'язкопружні деформації (переміщення). Зрозуміло, що максимальні за модулем вертикальні переміщення будуть тим більшими, що триваліше навантаження τ_l . На відміну від статичного [13], за циклічного навантаження вертикальні переміщення поверхні залежать не тільки від модуля пружності матеріалу шару, а й від його в'язкості (часу запізнення τ_K), що добре ілюструють криві 1 та 2. Швидкість вертикального переміщення та його коливання за період T_c є тим більшими, що податливіший матеріал шару (рис. 2).

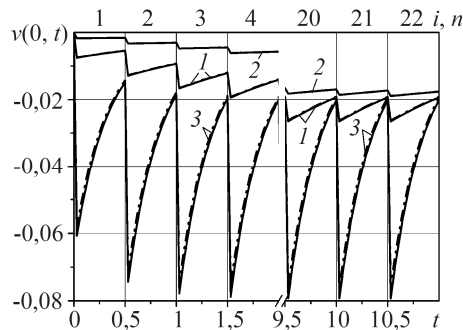


Рис. 2. Вертикальні переміщення точки $x = 0$ за циклічного навантаження для різних матеріалів: 1 – $E = 570$ МПа, $\nu = 0,12$, $\eta = 5$ ГПа·с, $\tau_K = 19,65$ с; 2 – $\eta = 22$ ГПа·с, $\tau_K = 86,46$ с; 3 – $E = 300$ МПа, $\nu = 0,2$, $\eta = 600$ МПа·с, $\tau_K = 4,8$ с.

Fig. 2. Vertical displacements of the point $x = 0$ at cyclic load for different materials: 1 – $E = 570$ МПа, $\nu = 0.12$, $\eta = 5$ ГПа·с, $\tau_K = 19.65$ с; 2 – $\eta = 22$ ГПа·с, $\tau_K = 86.46$ с; 3 – $E = 300$ МПа, $\nu = 0.2$, $\eta = 600$ МПа·с, $\tau_K = 4.8$ с.

Наприкінці зазначимо, що, використовуючи наближені формули (4), можна суттєво виграти у часі. Відносна максимальна похибка при цьому для найподатливішого матеріалу 3 не перевищує 4,5%.

Усталений режим. При $N \rightarrow \infty$ вертикальні переміщення навантаженої поверхні в моменти часу t (номер циклу $i \gg 1$) та $t + nT_c$ ($n = 1, 2, \dots$) стають майже однаковими (рис. 2). Такий режим деформування, коли закон зміни в часі вертикального переміщення навантаженої поверхні наближається до періодичного, називатимемо усталеним.

Розглянемо функціональну послідовність

$$v_n(t) = v(0, t + t_n) = v(0, t + (n-1)T_c) \quad (n = 1, 2, \dots; t \in [0, T_c]), \quad (5)$$

кожний член якої описує часову залежність вертикального переміщення навантаженої поверхні при $x = 0$ в n -му циклі. Визначимо різницю між $n+1$ -им та n -им її членами:

$$v_{n+1}(t) - v_n(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t + nT_c}{\tau_K} \frac{\alpha^2 + u^2}{1 + u^2}\right) \left[\exp\left(\frac{\tau_l}{\tau_K} \frac{\alpha^2 + u^2}{1 + u^2}\right) - 1 \right] \frac{du}{\alpha^2 + u^2} < 0$$

$$(n = 1, 2, \dots; t \in [0, T_c]). \quad (6)$$

Як бачимо, послідовність $v_n(t)$ монотонно спадна для всіх $t \in [0, T_c]$ (відповідна послідовність абсолютних значень монотонно зростає). На основі виразу (6) одержимо:

$$|v_{n+1}(t) - v_n(t)| < \frac{1}{2\alpha} \left[\exp\left(\frac{\tau_l \alpha^2}{\tau_K}\right) - 1 \right] e^{-nT_c/\tau_K} \quad (t \in [0, T_c]; n = 1, 2, \dots). \quad (7)$$

Отже, послідовність (5) рівномірно збігається до неперервної функції

$$v_s(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(t) = v_1(t) + \sum_{n=1}^{\infty} [v_{n+1}(t) - v_n(t)] \quad (t \in [0, T_c]). \quad (8)$$

З формули (8) випливає, що

$$v_n(t) - v_s(t) = -\sum_{m=n}^{\infty} [v_{m+1}(t) - v_m(t)] \quad (t \in [0, T_c]). \quad (9)$$

Співвідношення (6), (9) та оцінка (7) разом дають:

$$|v_n(t) - v_s(t)| < \frac{1}{2\alpha} \left[\exp\left(\frac{\tau_l \alpha^2}{\tau_K}\right) - 1 \right] \frac{e^{-nT_c/\tau_K}}{1 - e^{-T_c/\tau_K}} \quad (t \in [0, T_c]). \quad (10)$$

Оцінки (7) та (10) свідчать про те, що послідовність (5) збігається до граничної функції (8) зі швидкістю геометричної прогресії зі знаменником e^{-T_c/τ_K} . Очевидно,

$$v_s(t) < v_n(t) \leq 0 \quad (n = 1, 2, \dots; t \in [0, T_c]).$$

Зауважимо, що обмеженість та неперервність граничної функції (8) впливають також з фізичних властивостей в'язкопружного твердого тіла Кельвіна–Фойгта та характеру зовнішнього навантаження (2). Оскільки

$$v_n(T_c) = v(0, nT_c) = v_{n+1}(0) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

то при $n \rightarrow \infty$ отримаємо:

$$v_s(0) = v_s(T_c).$$

За періодичного продовження граничної функції (8) на весь проміжок $[0, \infty)$ одержуємо часову залежність вертикального переміщення навантаженої поверхні в точці $x = 0$ за усталеного режиму.

Таким чином, щоб дослідити настання усталеного режиму деформування у в'язкопружному шарі в точці прикладання зосередженої сили за періодичного навантаження (2), необхідно вивчити властивості функціональної послідовності (5), а щоб проаналізувати часову залежність деформування за цього режиму, – періодично продовжити граничну функцію (8) на всю часову вісь.

Як умову збіжності послідовності (5) природно взяти

$$\max_{0 \leq t \leq T_c} |v_{n+1}(t) - v_n(t)| < \varepsilon, \quad (11)$$

де $\varepsilon > 0$ – довільне наперед задане число. З формули (6) випливає, що максимум модуля в умові (11) досягається при $t = 0$, тобто в моменти прикладання зовнішнього навантаження, коли в шарі є тільки залишкові деформації. Для числового дослідження настання усталеного режиму (збіжності послідовності (5)) цю умову зручно модифікувати:

$$\left| \frac{v_{n+1}(0) - v_n(0)}{v_n(0)} \right| = \frac{v_{n+1}(0)}{v_n(0)} - 1 < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (12)$$

Таким чином, настання усталеного режиму за умови збіжності (11) визначають залишкові переміщення (деформації) $v_{rn} = v_n(0) = v(0, t_n)$ ($n = 1, 2, \dots$).

Вихід на усталений режим для трьох матеріалів шару (див. рис. 2)

Матеріал	n	v_{rn}	v_{rn+1}	v_{mn}	v_{mn+1}	$\frac{v_{m+1}}{v_m} - 1$	v_e
1	10	-0,0182	-0,0185	-0,0254	-0,0257	0,0160	-0,3794
2	22	-0,0173	-0,0176	-0,0190	-0,0193	0,0186	-0,3794
3	4	-0,0197	-0,0200	-0,0788	-0,0791	0,0156	-0,7197

У таблиці наведено дані про встановлення усталеного режиму деформування у в'язкопружному шарі для різних матеріалів (рис. 2) при $\varepsilon = 0,02$. У другому стовпці подано кількість циклів, після якого режим деформування можна вважати усталеним (з вибраною точністю). У третьому та четвертому стовпцях наведено залишкові переміщення v_{rn} , v_{rn+1} у n -му та $n+1$ -му циклах, а в п'ятому та шостому – максимальні за модулем вертикальні переміщення навантаженої поверхні v_{mn} , v_{mn+1} у моменти зняття навантаження. У передостанньому стовпці подано відносну похибку (12), а в останньому – значення пружного розв'язку в точці $x = 0$ [11]. Як бачимо, найшвидше усталений режим формується для найподатливішого матеріалу 3 (після четвертого циклу), а найповільніше – для найжорсткішого матеріалу 2 (після 22-го циклу). Швидкість його встановлення визначає геометрична прогресія зі знаменником e^{-T_c/τ_K} , а також параметри T_c , τ_K та τ_l . З формул (6) та (9) випливає, що зі збільшенням періоду циклу швидкість збіжності підвищується, а зі збільшенням тривалості навантаження – спадає. Залежність швидкості збіжності від часу запізнення (в'язкості матеріалу шару) немонотонна. Зокрема, використовуючи формулу (6), можна показати, що при

$$\tau_K \geq \alpha^2(nT_c + t) \quad (t \in [0, T_c])$$

більшим значенням τ_K відповідатимуть менші значення величини $|v_{n+1}(t) - v_n(t)|$ (за фіксованих n, t). Однак при

$$\tau_K \leq nT_c + t - \tau_l \quad (t \in [0, T_c]),$$

зокрема, якщо $n \gg 1$, ця величина монотонно зростатиме з часом запізнення (в'язкістю матеріалу). Така властивість притаманна лише матеріалам з достатньо великою в'язкістю, оскільки для матеріалів з малою в'язкістю з першого циклу залежність швидкості збіжності від часу запізнення монотонно спадає. Відзначимо, що за використання умови (12) залежність швидкості збіжності від часу τ_K монотонно спадає для всіх розглянутих значень в'язкості матеріалу шару. Зауважимо, що навіть після виходу на усталений режим максимальні за модулем вертикальні переміщення навантаженої поверхні приблизно в 10–20 разів менші, ніж відповідні пружні v_e (див. таблицю). Це пояснюють запізненням деформації у матеріалі Кельвіна–Фойгта та малим часом дії навантаження. Отже, за циклічного (періодичного) навантаження незворотні залишкові деформації розвиваються не тільки у твердих рідинах та в'язкопластичних середовищах [4, 9, 10], а й у в'язкопружних твердих тілах. Тому не можна погодитися з думкою [3], що деформація в тілі Кельвіна–Фойгта завжди повністю зворотна. Більше того, якраз залишкові переміщення визначають збіжність функціональної послідовності (5) (настання усталеного режиму) за умови (11). Граничне максимальне за модулем значення залишкових переміщень в усталеному режимі v_{rs} дає формула

$$v_{rs} = v_s(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_{rn}.$$

Залишкові деформації тим більші, що податливіший матеріал шару, однак, для трьох розглянутих матеріалів значення залишкових переміщень в усталеному режимі є досить близькими (див. рис. 2 і таблицю). За повного зняття навантаження залишкові деформації прямують до нуля. Усталені режими за періодичного навантаження реалізуються тільки у в'язкопружних твердих тілах, оскільки у твердих рідинах незворотні залишкові деформації необмежено зростають з кількістю циклів.

ВИСНОВКИ

Таким чином, у межах узагальненої моделі, що враховує деформацію поперечного зсуву, отримано та проаналізовано точні й наближені часові залежності вертикального переміщення точки прикладання зосередженої сили у нескінченному в'язкопружному шарі на жорсткій основі за циклічного (періодичного) навантаження (2). З допомогою функціональної послідовності (5) досліджено настання усталеного режиму деформування у шарі. З'ясовано, що найшвидше він реалізується для найподатливішого матеріалу, а найповільніше – для найжорсткішого. При цьому максимальні за модулем в'язкопружні переміщення навантаженої поверхні приблизно на порядок менші, ніж відповідні пружні. Досліджено накопичення залишкових деформацій (переміщень) за циклічного (періодичного) навантаження. З'ясовано, що саме залишкові переміщення відповідають за настання усталеного режиму за умови збіжності (11).

РЕЗЮМЕ. В рамках обобщенной двухпараметрической модели исследованы основные закономерности деформирования бесконечного вязкоупругого слоя на жестком основании при действии сосредоточенной циклической нагрузки. Смоделировано наступление установившегося режима деформирования при периодическом негармоническом нагружении. Выявлена важность учета остаточных деформаций (перемещений) в слое, изготов-

ленном из материала Кельвина–Фойгта, и их роль при оценке скорости наступления установившегося режима.

Ключевые слова: вязкоупругий слой, обобщенная двухпараметрическая модель, циклическая нагрузка, вертикальное перемещение, установившийся режим, остаточные деформации.

SUMMARY. The basic regularities of deformation of an infinite viscoelastic layer on the rigid foundation subjected to concentrated cyclic load are investigated in the frames of generalized two-parameter model. The reaching of the steady-state regime of deformation under periodic, non-harmonic loading has been modeled. The importance of accounting of residual strains (displacements) in the layer made of the Kelvin–Voigt material and their role in the estimate of the rate of reaching of the steady-state regime is revealed.

Keywords: viscoelastic layer, generalized two-parameter model, cyclic load, vertical displacement, steady-state regime, residual strains.

1. Рейнер М. Деформация и течение. – М.: Гос. науч.-техн. изд-во нефтяной и горно-топливной лит., 1963. – 382 с.
2. Ферри Дж. Вязкоупругие свойства полимеров – М.: Иностран. лит., 1963. – 536 с.
3. Виноградов Г. В., Малкин А. Я. Реология полимеров – М.: Химия, 1977. – 440 с.
4. Дорожный асфальтобетон / Л. Б. Гезенцев, Н. В. Горельшев, А. М. Богуславский, И. В. Королев / Под ред. Л. Б. Гезенцева. – М.: Транспорт, 1985. – 350 с.
5. Моделирование механического поведения вязкоупругого элемента при малоцикловом деформировании / М. Ю. Демина, Л. С. Полугрудова, И. Н. Андронов, Н. П. Богданов // Изв. Коми науч. центра УрО РАН. – 2013. – Вып. 1(13). – С. 79–83.
6. Zhuang Y. Ch. and Xie K. H. Study on one-dimensional consolidation of soil under cyclic loading and with varied compressibility // J. Zhejiang Univ. SCI. – 2005. – 6A, № 2. – P. 141–147.
7. Yazdani H. and Toufigh M. M. Nonlinear consolidation of soft clays subjected to cyclic loading – Part I: Theory // Geomechanics and Eng. – 2012. – 4, № 4. – P. 229–241.
8. Yazdani H. and Toufigh M. M. Nonlinear consolidation of soft clays subjected to cyclic loading – Part II: Verification and application // Geomechanics and Eng. – 2012. – 4, № 4. – P. 243–249.
9. Шаповал А. В., Марченко В. И. Определение деформационных и реологических характеристик водонасыщенного глинистого грунта // Комунальне господарство міст. – Харків: ХНАМГ, 2012 – Вып. 105. – С. 242–250.
10. К вопросу адекватного определения деформационных и реологических характеристик водонасыщенного глинистого грунта при циклической нагрузке / В. В. Крысан, Е. И. Нестерова, Е. С. Причина, В. И. Марченко // Матеріали 7-ої міжнар. наук.-практ. конф. молодих учених, аспірантів і студентів “Перспективи розвитку будівельних технологій” (18–19 квітня 2013 р., Дніпропетровськ). – Дніпропетровськ: Нац. гірничий ун-т, 2013. – С. 120–124.
11. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: Физматгиз, 1960. – 492 с.
12. Пастернак П. Л. Основы нового метода расчёта фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. – М.; Л.: Гос. изд-во лит. по строительству и архитектуре, 1954. – 56 с.
13. Скородинський І. С., Максимук О. В. Узагальнена модель в'язкопружного проміжного шару або покриття, що враховує деформацію поперечного зсуву // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – 56, № 1. – С. 62–70.

Одержано 12.12.2018