

УДК 539.375

ПЛАСТИЧНЕ ВІДШАРОВУВАННЯ ПЕРІОДИЧНОЇ СИСТЕМИ ТОНКИХ ПРИМЕЖОВИХ ВКЛЮЧЕНЬ

В. А. КРИВЕНЬ, А. Р. БОЙКО, В. Б. ВАЛЯШЕК, Л. І. ЦИМБАЛЮК

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

Отримано числово-аналітичний розв’язок антиплоскої задачі про напружено-деформований стан пружно-пластичного півпростору із періодичною системою тонких жорстких тунельних паралельних межі півпростору включень, які до навантаження перебували в однобічному механічному зв’язку з середовищем. Визначено напружено-деформований стан і досліджено пластичне відшаровування включень. Побудовано діаграми критичного навантаження в координатах геометричних параметрів системи включень за умови сталості критичної довжини міжфазних пластичних смуг.

Ключові слова: *однобічно відшароване включення, міжфазні пластичні смуги, антиплоска деформація, періодична система включень.*

Вступ. Дослідження напружено-деформованого стану (НДС) тіл із взаємодіючими між собою та межею тіла системами включень викликають значний інтерес для теорії міцності композитів і армованих матеріалів та прогнозування і оптимізації їх деформаційних характеристик [1–4]. Ці задачі особливо актуальні у пружно-пластичному формулюванні з урахуванням неідеального контакту включень із основним середовищем.

Нижче дослідили пластичне відшаровування системи тонких рівновіддалених прямолінійних включень, розміщених у площині, паралельній межі ідеального пружно-пластичного півпростору. Розглянемо однобічний контакт включень із основним середовищем: включення не контактують на межі зі середовищем та ідеально контактують з протилежного боку. НДС, спричинений монотонно зростаючим зсувним навантаженням $\tau_{xz} = 0, \tau_{yz} = \tau_\infty$, прикладеним на нескінченності (рис. 1: a – відстань включень від межі півпростору, $2c$ – ширина включень, $2b$ – відстань між центрами сусідніх включень, d – довжина смуг міжфазного пластичного відшарування).

Задачу можна перефразувати як крайову в області D (півсмуга $x > 0, 0 < y < b$, із розрізом вздовж відрізка $x = a, 0 \leq y \leq c$) для аналітичної і однолистої функції $\tau(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y), \zeta = x + iy$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \tau(\zeta) = 0 \quad (\zeta \in \{x + ib, 0 < x < +\infty\} \cup \{iy, 0 < y < b\} \cup \{x, 0 < x < a\} \cup \\ \cup \{a - 0, 0 < y < c\} \cup \{x, a < x < +\infty\}); \quad |\tau(\zeta)| = k, \quad (\zeta \in \{a + 0, c - d < y < c\}); \\ \operatorname{Re} \tau(\zeta) = 0, \quad (\zeta \in \{a + 0, 0 < y < c - d\}); \quad \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \tau(\zeta) = \tau_\infty. \end{aligned} \quad (1)$$

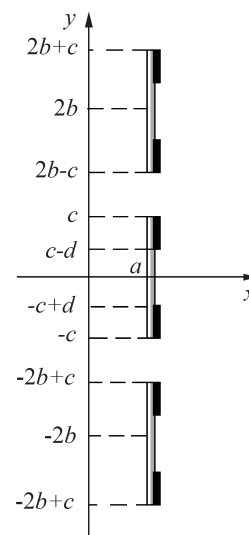


Рис. 1. Поперечний переріз тіла.

Fig. 1. Transversal cross-section of a body.

Тут k – зсувна границя плинності основного середовища; τ_∞ – навантаження; d – довжина смуг пластичного відшарування відповідна навантаженню τ_∞ .

Розв'язання задачі (1) зводимо до побудови конформного відображення (рис. 2).

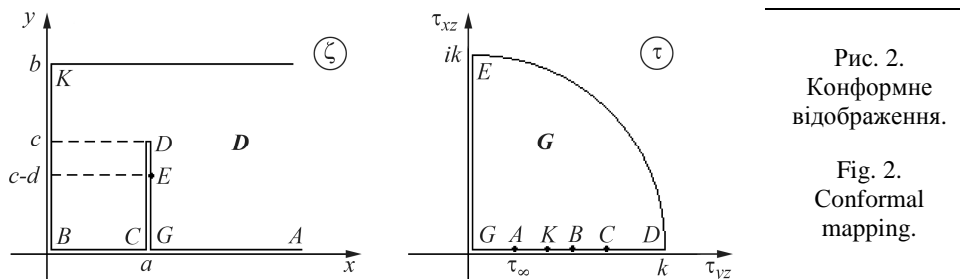


Рис. 2.
Конформне відображення.

Fig. 2.
Conformal mapping.

За фіксованих параметрів a, b, c існує єдина залежність $d = d(\tau_\infty)$, коли задача (1) матиме розв'язок, який дасть змогу для довільних допустимих співвідношень між шириною включень, відстанню між ними та їх відстанню від межі основного середовища досліджувати НДС та квазістатичне міжфазне відшарування включень, робити висновки про вплив включень і їхнього контакту з середовищем на механічні властивості розглянутої системи.

Наведене на рис. 2 відображення зручно шукати в параметричній формі:

$$\zeta = \zeta(t), \quad \tau = \tau(t) \quad (t \in H = \text{Im } t > 0). \quad (2)$$

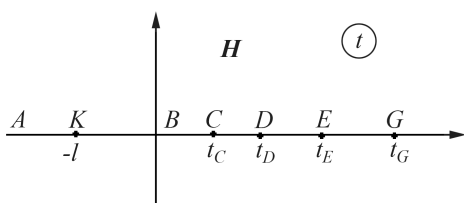


Рис. 3. Площина допоміжного параметра.

Fig. 3. Auxiliary parameter plane.

Оскільки область D у площині ζ є прямолінійним багатокутником подамо відображення $\zeta(t)$ інтегралом Шварца–Крістофеля [5]. Поклавши координати точок A, K, B у площині t (рис. 3) фіксованими і відповідно рівними $\infty, -1, 0$, отримуємо:

$$\zeta(t) = \frac{b}{KB} \int_0^t F(\eta) d\eta, \quad (3)$$

де $F(\eta) = \frac{\eta - t_D}{\sqrt{(\eta + 1)\eta(\eta - t_C)(\eta - t_G)}}$, $KB = \int_{-1}^0 |F(\eta)| d\eta$. Тут і далі під $\sqrt{t - \alpha}$ (α –

дійсне число) розумітимемо аналітичну в області H функцію, що набуває дійсних додатних значень, коли t дійсне і $t > \alpha$.

Для забезпечення необхідних співвідношень між довжинами відрізків KB, BC, CD, DG параметри t_C, t_D, t_G слід вибрати так, щоб задовольнити три умови:

$$\begin{cases} a \int_{-1}^0 |F(\eta)| d\eta = b \int_0^{t_C} |F(\eta)| d\eta \\ c \int_{-1}^0 |F(\eta)| d\eta = b \int_0^{t_D} |F(\eta)| d\eta, \\ \int_{t_C}^{t_D} |F(\eta)| d\eta = \int_{t_D}^{t_G} |F(\eta)| d\eta \end{cases} \quad (4)$$

які будують систему нелінійних інтегро-алгебричних рівнянь.

Для довільних $b > c > 0$ і $a > 0$ система (4) сумісна і має єдиний розв'язок, що гарантується теоремою Рімана про конформні відображення [5]. Інтеграл, які входять у рівності (3), можна подати повними еліптичними [6], але для їх обчислення зручніше скористатися відповідними кубатурними формулами, попередньо виділивши особливості у підінтегральних функціях у кінцевих точках відрізків інтегрування. Зауважимо також, що $F(\eta) \rightarrow \infty$, коли $t_C \rightarrow 0$ і для достатньо малих $|t_C|$ набуває форми δ -функції. Інтеграл $\int_0^{t_C} |F(\eta)| d\eta \rightarrow \pi \frac{t_D}{\sqrt{t_G}}$, а

$\int_0^{t_C} |F(\eta)| d\eta \approx \pi \frac{2t_D - t_C}{\sqrt{(2+t_C)(2t_G - t_C)}}$ і для достатньо малих $|t_C|$ виражається елементарними функціями.

Розв'язок системи (4) отримуємо такими послідовними наближеннями:

$$\begin{aligned} t_C^{(j+1)} &= t_C^{(j)} + \alpha_1 t_D^{(j)} \frac{(a/b)KB^{(j)} - BC^{(j)}}{(a/b)KB^{(j)} + BC^{(j)}}; \\ t_D^{(j+1)} &= t_D^{(j)} + \alpha_2 (t_G^{(j)} - t_C^{(j)}) \frac{CD^{(j)} - DG^{(j)}}{CD^{(j)} + DG^{(j)}}; \\ t_G^{(j+1)} &= t_G^{(j)} + \alpha_3 (t_G^{(j)} - t_C^{(j)}) \frac{(c/a)BC^{(j)} - DG^{(j)}}{(c/a)BC^{(j)} + DG^{(j)}} \quad (j=0,1,\dots). \end{aligned} \quad (5)$$

Тут $KB^{(j)} = \int_{-1}^0 F^{(j)}(\eta) d\eta$, $BC^{(j)} = \int_0^{t_C^{(j)}} F^{(j)}(\eta) d\eta$, $CD^{(j)} = \int_{t_C^{(j)}}^{t_D^{(j)}} F^{(j)}(\eta) d\eta$,

$DG^{(j)} = \int_{t_C^{(j)}}^{t_D^{(j)}} F^{(j)}(\eta) d\eta$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – достатньо малі додатні числа, $t_C^{(0)}, t_D^{(0)}, t_G^{(0)}$

– початкові значення шуканих параметрів перетворення (3), функція $F^{(j)}(\eta)$ відрізняється від $F(\eta)$ тільки заміною t_C, t_D, t_G відповідно на $t_C^{(j)}, t_D^{(j)}, t_G^{(j)}$.

Тепер, коли координати точок C, D, G у площині t знайшли, отримаємо також координати точок A, D і G на межі областей H і G . Функцію $\tau(t)$ можна побудувати композицією елементарних відображень:

$$\tau(t) = \frac{(k^2 - \tau_\infty^2)\sqrt{t-t_D} - (k^2 + \tau_\infty^2)\sqrt{t-t_E}}{2\tau_\infty\sqrt{t-t_G}}, \quad t_E = \frac{(k^2 - \tau_\infty^2)t_D + 4k^2\tau_\infty^2 t_G}{(k^2 + \tau_\infty^2)^2}. \quad (6)$$

Формули (3), (5) дають повну інформацію про напружено-деформований стан і, зокрема, про довжину смуги пластичного відшарування:

$$d = \frac{b}{KB} \int_{t_D}^{t_E} F(\eta) d\eta. \quad (7)$$

Частковим випадком розв'язаної тут задачі є пластичне відшарування окремого (одиначного) тонкого жорсткого прямолінійного включення, лівий бік якого (повернутий до межі півпростору) не контактує із середовищем, а правий у початковому стані перебуває в ідеальному механічному контакті з ним.

Відповідну функцію напружень знайдемо із формул (3), (6). Замінімо у відображенні (3) прямі кути K та B розгорнутими і отримаємо із формули (3):

$$\zeta = \frac{c}{t_G - t_D} \sqrt{(t-t_G)(t+t_G-2t_D)}.$$

Вилучивши із формул (6), (8) параметр t , знаходимо функцію напружень для окремого включення в явному вигляді:

$$\tau(\zeta) = \frac{\sqrt{(k^2 + \tau_\infty^2)^2 \sqrt{\zeta^2 + c^2} - 4k^2 \tau_\infty^2 c - (k^2 - \tau_\infty^2) \sqrt{\zeta^2 + c^2}}}{2\tau_\infty \sqrt{\sqrt{\zeta^2 + c^2} - c}}$$

а також раніше відому [7] явну залежність довжини міжфазної пластичної смуги від навантаження:

$$d_0 = c \frac{(k^2 + \tau_\infty^2)^2 - (k^2 - \tau_\infty^2) \sqrt{k^4 + 6k^2 \tau_\infty^2 + \tau_\infty^4}}{(k^2 + \tau_\infty^2)^2}.$$

Розвиток пластичного відшарування за квазістатичного збільшення навантаження проілюстровано на рис. 4. Зі зменшенням віддалі включень від межі півпростору довжина пластичних смуг плавно знижується. Навпаки, що менша віддаль між включеннями, то більша довжина пластичних смуг.

Довжина пластичних смуг може слугувати критерієм локального руйнування у вершинах включень. Вона залежить від навантаження та ширини й розміщення включень. Коли розглянута система включень має технологічне походження, виникає завдання їх безпечного розташування. Криві, за якими можна визначити конфігурацію включень, для якої навантаження стає критичним $\tau_\infty = \tau_{cr}$ за умови, що довжина пластичних смуг не може досягати граничної величини $d = d_{cr}$, наведені на рис. 5.

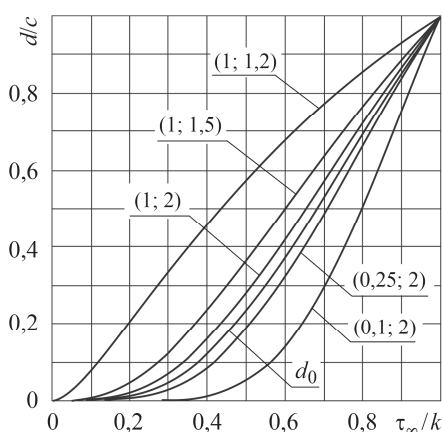


Рис. 4. Fig. 4.

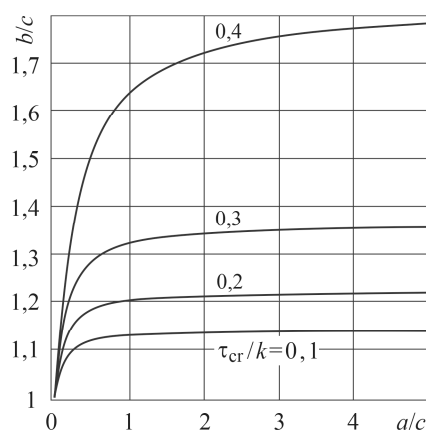


Рис. 5. Fig. 5.

Рис. 4. Залежності довжин міжфазних пластичних смуг від навантаження для декількох співвідношень між шириною включень c і їх відстанню від межі півпростору a (у дужках перше число – c/a , друге – b/c).

Fig. 4. Dependence of interphase plastic bands length on the load for different ratios between the width of inclusions c and their distance from the boundary of the half space a (in the designations in Figure, the first number – c/a , the second – b/c).

Рис. 5. Діаграми критичних навантажень у координатах геометричних параметрів включень. Критична довжина пластичних смуг становить 20% ширини включення.

Fig. 5. Critical loads diagrams of in the coordinates geometric parameters of inclusions. The critical length of the plastic bands is 20% of the width of the inclusion.

ВИСНОВКИ

Досліджено квазістатичне пластичне відшарування періодичної системи рівновіддалених тонких плоских жорстких включень, розміщених в одній площині, паралельній межі в ідеальному пружно-пластичному півпросторі. Знайдено

числово-аналітичний розв'язок задачі, отримано функцію напружень, із якої визначено напружено-деформований стан середовища поза включеннями та довжину міжфазних пластичних смуг як функцію рівня навантаження. З'ясовано вплив відстаней між включеннями та від межі півпростору на розвиток пластичних смуг. Побудовано діаграми критичних навантажень у координатах геометричних параметрів включень, коли критична довжина пластичних смуг становить 20% ширини включення. Міжфазне відшарування сповільнюється із наближенням включень до межі півпростору та пришвидшується зі зближенням їх між собою. Взаємодія включень між собою та з межею півпростору є несуттєвою, коли відстань між ними та від межі півпростору у чотири або більше разів перевищує їхню ширину. Досліджені закономірності пластичного відшарування включень можна використати для оптимізації механічної конструкції.

РЕЗЮМЕ. Получено численно-аналитическое решение антиплоской задачи о напряженно-деформированном состоянии упруго-пластического полупространства, содержащего периодическую систему тонких жестких туннельных включений в плоскости, параллельной границе полупространства. Предполагается, что изначально включения находились в одностороннем механическом контакте со средой. Исследовано квазистатическое пластическое отслаивание включений. Построены диаграммы критических нагрузок в пространстве геометрических параметров системы включений.

Ключевые слова: *одностороннее отслоившееся включение, межфазные пластические полосы, антиплоская деформация, периодическая система включений.*

SUMMARY. The numerical-analytic solution of the anti-plane problem on the stress-strain state of an elastic-plastic semi-space with a periodic system of thin rigid tunnel inclusions in a plane parallel to the semi-space is obtained. It is assumed that the inclusions were in unilateral mechanical contact with an environment before the load was put on. Quasi-static plastic delamination of inclusions is investigated. The critical diagrams of loads in a space of geometric parameters of the inclusions system are built.

Keywords: *unilateral exfoliated inclusion, interphase plastic strips, anti-plane deformation, system of periodic inclusions.*

1. Силованюк В. П., Маруха В. І., Онищак Н. В. Залишкова міцність циліндричних елементів з тріщинами, залікованими за ін'єкційною технологією // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – **43**, № 1. – С. 99–103.
(*Sylovanyuk V. P., Marukha V. I., Onyshchak N. V. Residual strength of cylindrical elements with cracks healed by using the injection technology // Materials Science. – 2007. – 43, № 1. – P. 109–116.*)
2. Силованюк В. П., Юхим Р. Я., Горбач П. В. Деформування та руйнування матеріалів в околі сфероїдальних включень // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – **46**, № 6. – С. 99–103.
(*Sylovanyuk V. P., Yukhym R. Ya., Horbach P. V. Deformation and fracture of materials heave spheroidal inclusions // Materials Science. – 2011. – 46, № 6. – P. 757–762.*)
3. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями: монографія. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
4. Kryven V. A., Sulym G. T., and Yavorska M. I. Plastic interfacial slip of periodic systems of rigid thin inclusions undergoing longitudinal shear // J. Theoret. and Appl. Mech. – 2006. – **44**, № 4. – P. 837–848.
5. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1969. – 572 с.
6. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. – 304 с.
7. Кривень В. А., Валяшек В. Б., Яворська М. І. Пластичне відшарування тонкого жорсткого включення, паралельного межі півпростору, за умови однобічного контакту з середовищем // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2018. – **54**, № 2. – С. 64–69.
(*Kryven' V. A., Valiashek V. B., Yavors'ka M. I. Plastic exfoliation of a thin stiff inclusion parallel to the boundary of half space in the case of its unilateral contact with the medium // Materials Science. – 2018. – 54, № 2. – P. 202–208.*)

Одержано 21.02.2019