

УДК 539.3

ЧАСТКОВЕ РОЗКРИТТЯ ПІВНЕСКІНЧЕНОЇ ТРІЩИНИ НА МЕЖІ ПРУЖНОЇ СМУГИ І ЖОРСТКОЇ СТІНКИ

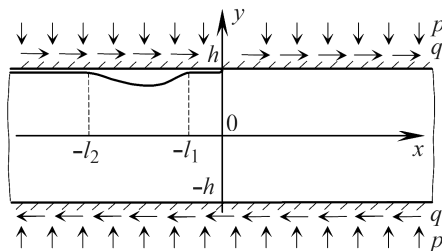
В. І. ОСТРИК

Інститут прикладної фізики НАН України, Суми

Проаналізовано стиск і зсув пружної смуги з півнескінченною тріщиною на межі смуги і жорсткої стінки. Тріщина розкрита всередині та закрита на краях, де її береги знаходяться в умовах фрикційного проковзування. Із застосуванням методу Вінера–Гопфа систему інтегральних рівнянь задачі зведено до нескінченної системи алгебричних рівнянь. Знайдено коефіцієнт інтенсивності напружень та розкриття тріщини.

Ключові слова: міжфазна тріщина, пружна смуга, тертя, ковзний контакт, метод Вінера–Гопфа.

Вступ. Повністю закрити півнескінченну тріщину на межі пружної смуги і жорсткої стінки вивчали раніше [1]. Показано, що тріщина повністю закрита, якщо відношення інтенсивностей зсувного і стискального навантаження не перевищує певного граничного значення. Нижче розглянуто часткове розкриття тріщини за суттєвого зсувного навантаження. Отримані результати можна використати для оцінювання розподілу водню біля міжфазної тріщини [2].



Пружна смуга з частково розкритою тріщиною.

An elastic strip with a partially opened crack.

Постава задачі. Узагальнимо поставу розглянутої раніше [1] задачі про пружну смугу $-\infty < x < \infty$, $-h \leq y \leq h$ з півнескінченною тріщиною $-\infty < x < 0$ між верхньою гранню $y = h$ смуги і жорсткою стінкою за розкриття тріщини всередині на певному інтервалі $-l_2 < x < -l_1$ ($l_2 > l_1 > 0$), межі якого заздалегідь невідомі (див. рисунок). Поза цим інтервалом між берегами тріщини відбувається фрикційний контакт. Нижній $y = -h$ і частина ($0 \leq x < \infty$) верхнього $y = h$ краю смуги скріплені зі стінками. Як з'ясовано [1], нижній берег

тріщини відривається від верхньої стінки, якщо відношення інтенсивностей прикладених до стінок зсувного та нормального навантажень q/p перевищує деяке граничне значення \bar{q}_* . При цьому $\bar{q}_* = 3,05$ і $3,26$, якщо коефіцієнт Пуассона $\nu = 1/3$, а коефіцієнт тертя $\mu_0 = 0$ і $0,25$, відповідно.

Крайові умови задачі такі:

$$u_y|_{y=h} = -\delta_1, \quad -\infty < x \leq -l_2, \quad -l_1 \leq x < \infty; \quad u_x|_{y=h} = \delta_2, \quad 0 \leq x < \infty;$$

$$\tau_{yx}|_{y=h} = -\mu_0 \sigma_y|_{y=h}, \quad -\infty < x < -l_2, \quad -l_1 \leq x < 0;$$

$$\sigma_y|_{y=h} = 0, \quad \tau_{yx}|_{y=h} = 0, \quad -l_2 < x < -l_1; \quad u_x|_{y=-h} = 0, \quad u_y|_{y=-h} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (1)$$

де δ_1, δ_2 – нормальне та тангенціальне відносні зміщення стінок. Як і в праці [1], маємо

$$\frac{\delta_1}{2h} = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{p}{2G}, \quad \frac{\delta_2}{2h} = \frac{2q-\mu_0 p}{G},$$

де G – модуль зсуву.

Система інтегральних рівнянь задачі та її розв'язання. Тангенціальні переміщення та нормальні напруження на верхній грані смуги подамо у вигляді [1]:

$$u_x|_{y=h} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda(2\mu h)a_1(\mu) + \mu\lambda_1(2\mu h)a_2(\mu)}{\mu\Delta(2\mu h)} e^{-i\mu x} d\mu,$$

$$\frac{1}{2G}\sigma_y|_{y=h} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu\Delta_1(2\mu h)a_2(\mu) - \lambda_{12}(2\mu h)a_1(\mu)}{\Delta(2\mu h)} e^{-i\mu x} d\mu,$$

$$a_1(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)e^{i\mu x} dx, \quad a_2(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x)e^{i\mu x} dx,$$

$$g_1(x) = \frac{1}{2G}(\tau_{yx} + \mu_0\sigma_y)|_{y=h}, \quad 0 < x < \infty; \quad g_1(x) = 0, \quad -\infty < x < 0;$$

$$g_2(x) = u_y|_{y=h}, \quad -l_2 < x < -l_1; \quad g_2(x) = -\delta_1, \quad -\infty < x \leq -l_2, \quad -l_1 \leq x < \infty. \quad (2)$$

Тут функції $g_1(x)$, $0 < x < \infty$ і $g_2(x)$, $-l_2 < x < -l_1$ невідомі; функції аргументу $2\mu h$ визначено раніше [1].

Візьмемо

$$g_1(r) = \frac{q-\mu_0 p}{G} + g_*(r), \quad g_*(\infty) = 0; \quad g_2(r) = -\delta_1 + g_{**}(r), \quad (3)$$

виконаємо заміни $x = 2h\xi$, $r = 2h\eta$ і перейдемо до нових невідомих функцій

$$\varphi_1(\eta) = g_*(2h\eta), \quad 0 < \eta < \infty; \quad \varphi_2(\eta) = \frac{1}{2h}g_{**}(2h\eta), \quad -c < \eta < -b. \quad (4)$$

Задовольнивши через подання (2)–(4) другу та четверту крайові умови (1), отримаємо систему інтегральних рівнянь

$$L_1(\xi) \equiv \int_0^{\infty} k_{11}(\xi-\eta)\varphi_1(\eta)d\eta + \int_{-c}^{-b} k_{12}(\xi-\eta)\varphi_2(\eta)d\eta = f_1(\xi), \quad 0 < \xi < \infty,$$

$$L_2(\xi) \equiv \int_0^{\infty} k_{21}(\xi-\eta)\varphi_1(\eta)d\eta + \int_{-c}^{-b} k_{22}(\xi-\eta)\varphi_2(\eta)d\eta = f_2(\xi), \quad -c < \xi < -b;$$

$$k_{mj}(\xi-\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_{mj}(\tau)e^{-i\tau(\xi-\eta)}d\tau, \quad m, j = 1, 2; \quad b = \frac{l_1}{2h}, \quad c = \frac{l_2}{2h};$$

$$K_{11}(\tau) = \frac{\lambda(\tau)}{\tau\Delta(\tau)}, \quad K_{12}(\tau) = \frac{\lambda_1(\tau)}{\Delta(\tau)}, \quad K_{21}(\tau) = -\frac{\lambda_{12}(\tau)}{\Delta(\tau)}, \quad K_{22}(\tau) = \frac{\tau\Delta_1(\tau)}{\Delta(\tau)},$$

$$f_1(\xi) = \frac{q-\mu_0 p}{G} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda(\tau)}{\tau^2\Delta(\tau)} e^{-i\tau\xi} d\tau + 1 \right) = \frac{q-\mu_0 p}{G} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(is'_k)}{s'_k{}^2\Delta'(is'_k)} e^{s'_k\xi},$$

$$f_2(\xi) = \frac{p}{2G} - \frac{q - \mu_0 p}{G} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_{12}(\tau)}{\tau \Delta(\tau)} e^{-i\tau \xi} d\tau = \frac{p}{2G} - \frac{q - \mu_0 p}{G} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{12}(is_k)}{is_k \Delta'(is_k)} e^{s_k \xi}. \quad (5)$$

Останні два інтеграли перетворили за теорією лишків, а через s'_k і s_k ($k=1, 2, \dots$) позначили корені рівняння $\Delta(is) = 0$ із півплощин $\text{Re } s < 0$ і $\text{Re } s > 0$, відповідно.

Для розв'язання системи інтегральних рівнянь (5) застосуємо метод Вінера–Гопфа [3]. Продовжимо рівняння (5) на всю числову вісь, поклавши $\varphi_1(\eta) = 0$, якщо $-\infty < \eta \leq 0$, і $\varphi_2(\eta) = 0$, якщо $-\infty < \eta \leq -c$, $-b \leq \eta < \infty$, та застосуємо до них інтегральне перетворення Фур'є. Увівши до розгляду невідомі функції

$$\begin{aligned} \Phi_1^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \varphi_1(\xi) e^{iz\xi} d\xi, & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-c}^{-b} \varphi_2(\xi) e^{iz\xi} d\xi &= e^{-izc} \Phi_2^+(z) = e^{-izb} \Phi_2^-(z), \\ \Phi_1^-(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 L_1(\xi) e^{iz\xi} d\xi, & \Psi^+(z) &= -\frac{e^{izb}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^{\infty} L_2(\xi) e^{iz\xi} d\xi, \\ \Psi^-(z) &= \frac{e^{izc}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-c} L_2(\xi) e^{iz\xi} d\xi, \end{aligned} \quad (6)$$

аналітичні відповідно у півплощинах $\text{Im } z > c^+$ ($c^+ < 0$) і $\text{Im } z < c^-$ ($c^- > 0$) комплексної площини, отримаємо систему функціональних рівнянь

$$\begin{aligned} K_{11}(z) \Phi_1^+(z) + e^{-izc} K_{12}(z) \Phi_2^+(z) - \Phi_1^-(z) &= F_1(z), \\ K_{21}(z) \Phi_1^+(z) + e^{-izc} K_{22}(z) \Phi_2^+(z) - e^{-izb} \Psi^+(z) - e^{-izc} \Psi^-(z) &= F_2(z), \\ \Phi_2^+(z) - e^{iz(c-b)} \Phi_2^-(z) &= 0, \quad -\infty < \text{Re } z < \infty, \quad c^+ < \text{Im } z < c^-; \\ F_1^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f_1(\xi) e^{iz\xi} d\xi = -2\bar{q}_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(is'_k)}{s_k^2 \Delta'(is'_k)} \frac{1}{s'_k + iz}, \\ F_2(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-c}^{-b} f_2(\xi) e^{iz\xi} d\xi = \bar{p} \frac{e^{-izb} - e^{-izc}}{iz} + e^{-izb} F_{21}^-(z) + e^{-izc} F_{22}^-(z), \\ F_{21}^-(z) &= -2\bar{q}_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{12}(is_k)}{is_k \Delta'(is_k)} \frac{e^{-s_k b}}{s_k + iz}, \quad F_{22}^-(z) = 2\bar{q}_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{12}(is_k)}{is_k \Delta'(is_k)} \frac{e^{-s_k c}}{s_k + iz}, \\ \bar{p} &= \frac{p}{2G\sqrt{2\pi}}, \quad \bar{q}_0 = \frac{q_0}{2G\sqrt{2\pi}}, \quad q_0 = q - \mu_0 p. \end{aligned} \quad (7)$$

Факторизуємо коефіцієнти

$$\begin{aligned} K_{11}(z) &= 2K_{11}^+(z)K_{11}^-(z), \quad K_{11}(0) = 2; \\ K_{22}(z) &= \kappa K_{22}^+(z)K_{22}^-(z), \quad \kappa = K_{22}(0) = \frac{1-\nu}{1-2\nu}, \\ K_{11}^+(z) &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{iz}{\tau_n}\right) \left(1 + \frac{iz}{s'_n}\right)^{-1}, \quad K_{11}^-(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{iz}{\tau_n}\right) \left(1 + \frac{iz}{s_n}\right)^{-1}, \\ K_{22}^+(z) &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{iz}{\zeta_n}\right) \left(1 + \frac{iz}{s'_n}\right)^{-1}, \quad K_{22}^-(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{iz}{\zeta_n}\right) \left(1 + \frac{iz}{s_n}\right)^{-1}, \end{aligned}$$

де τ_n ($n = 1, 2, \dots$) – корені рівняння $\lambda(is) = 0$ із півплощини $\text{Re } s > 0$. Тоді систему рівнянь (7) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
& 2K_{11}^+(z)\Phi_1^+(z) + \frac{e^{-izb}}{K_{11}^-(z)}K_{12}(z)\Phi_2^-(z) - \frac{\Phi_1^-(z)}{K_{11}^-(z)} = \frac{F_1^+(z)}{K_{11}^-(z)}, \\
& \kappa K_{22}^+(z)\Phi_2^+(z) + \frac{1}{K_{22}^-(z)} \left\{ e^{izc}K_{21}(z)\Phi_1^+(z) + e^{iz(c-b)} \left[\Psi^+(z) - \frac{\bar{p}}{iz} - F_{21}^-(z) \right] \right\} + \\
& \quad + \frac{\bar{p}}{iz} - \frac{\Psi^-(z)}{K_{22}^-(z)} = \frac{1}{K_{22}^-(z)} \left[F_{22}^-(z) - \frac{\bar{p}}{iz} \right] + \frac{\bar{p}}{iz}, \\
& \kappa K_{22}^-(z)\Phi_2^-(z) + e^{izb} \frac{K_{21}(z)}{K_{22}^+(z)} \Phi_1^+(z) - \frac{e^{-iz(c-b)}}{K_{22}^+(z)} \left[\Psi^-(z) - \frac{\bar{p}}{iz} + F_{22}^-(z) \right] - \frac{\bar{p}}{iz} + \\
& \quad + \frac{\Psi^+(z)}{K_{22}^+(z)} = \frac{1}{K_{22}^+(z)} \left[F_{21}^-(z) + \frac{\bar{p}}{iz} \right] - \frac{\bar{p}}{iz}, \quad c^+ < \text{Im } z < c^-. \quad (8)
\end{aligned}$$

Окремі складові рівнянь (8), які неаналітичні у півплощинах $\text{Im } z > c^+$, $\text{Im } z < c^-$, подамо різницею аналітичних у цих півплощинах функцій:

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{-izb}}{K_{11}^-(z)}K_{12}(z)\Phi_2^-(z) = \chi_1^+(z) - \chi_1^-(z), \quad e^{izb} \frac{K_{21}(z)}{K_{22}^+(z)} \Phi_1^+(z) = \chi_3^+(z) - \chi_3^-(z), \\
& \frac{1}{K_{22}^-(z)} \left\{ e^{izc}K_{21}(z)\Phi_1^+(z) + e^{iz(c-b)} \left[\Psi^+(z) - \frac{\bar{p}}{iz} - F_{21}^-(z) \right] \right\} + \frac{\bar{p}}{iz} = \chi_2^+(z) - \chi_2^-(z), \\
& \quad - \frac{e^{-iz(c-b)}}{K_{22}^+(z)} \left[\Psi^-(z) - \frac{\bar{p}}{iz} + F_{22}^-(z) \right] - \frac{\bar{p}}{iz} = \chi_4^+(z) - \chi_4^-(z), \\
& \frac{F_1^+(z)}{K_{11}^-(z)} = f_1^+(z) - f_1^-(z), \quad \frac{1}{K_{22}^+(z)} \left[F_{21}^-(z) + \frac{\bar{p}}{iz} \right] - \frac{\bar{p}}{iz} = f_2^+(z) - f_2^-(z). \quad (9)
\end{aligned}$$

Увівши до розгляду інтеграли типу Коші, густинами яких слугують ліві частини рівностей (9), і перетворивши інтеграли у ряди за теорією лишків, знаходимо:

$$\begin{aligned}
& \chi_1^+(z) = i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_1(is'_k)\Phi_2^-(is'_k)}{\Delta'(is'_k)K_{11}^-(is'_k)} \frac{e^{s'_kb}}{s'_k + iz}, \quad \chi_3^-(z) = i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{12}(is_k)\Phi_1^+(is_k)}{\Delta'(is_k)K_{22}^+(is_k)} \frac{e^{-s_kb}}{s_k + iz}, \\
& \chi_2^-(z) = \kappa \sum_{k=1}^{\infty} \frac{K_{22}^+(i\zeta_k)}{\zeta_k \Delta_1'(i\zeta_k)} \left\{ \lambda_{12}(i\zeta_k)\Phi_1^+(i\zeta_k)e^{-\zeta_k c} - \right. \\
& \quad \left. - \Delta(i\zeta_k) \left[\Psi^+(i\zeta_k) + \frac{\bar{p}}{\zeta_k} - F_{21}^-(i\zeta_k) \right] e^{-\zeta_k(c-b)} \right\} \frac{1}{\zeta_k + iz}, \\
& \chi_4^+(z) = \kappa \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta(-i\zeta_k)K_{22}^-(-i\zeta_k)}{\zeta_k \Delta_1'(i\zeta_k)} \left[\Psi^-(i\zeta_k) - \frac{\bar{p}}{\zeta_k} + F_{22}^-(-i\zeta_k) \right] \frac{e^{-\zeta_k(c-b)}}{\zeta_k - iz}, \\
& f_1^+(z) = 2\bar{q}_0 \frac{K_{11}^+(z) - 1}{iz}, \quad f_2^-(z) = 2\bar{q}_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{12}(is_k)}{is_k \Delta'(is_k)K_{22}^+(is_k)} \frac{e^{-s_kb}}{s_k + iz}.
\end{aligned}$$

У результаті за принципом аналітичного продовження отримуємо:

$$\begin{aligned}\Phi_1^+(z) &= \frac{f_1^+(z) - \chi_1^+(z)}{2K_{11}^+(z)}, \quad \Phi_1^-(z) = K_{11}^-(z) \left[f_1^-(z) - \chi_1^-(z) \right], \\ \Phi_2^+(z) &= -\frac{\chi_2^+(z)}{\kappa K_{22}^+(z)}, \quad \Psi^-(z) = -K_{22}^-(z) \left[\chi_2^-(z) + \frac{\bar{p}}{iz} \right] - F_{22}^-(z) + \frac{\bar{p}}{iz}, \\ \Phi_2^-(z) &= \frac{\chi_3^-(z) + \chi_4^-(z) - f_2^-(z)}{\kappa K_{22}^-(z)}, \quad \Psi^+(z) = K_{22}^+(z) \left[f_2^+(z) - \chi_3^+(z) - \chi_4^+(z) \right].\end{aligned}\quad (10)$$

Із умови обмеженості напружень σ_y у точках $x = -l_2$, $x = -l_1$ ($y = h$) впливають додаткові умови

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} z \chi_2^+(z) = 0, \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} z [\chi_3^-(z) + \chi_4^-(z) - f_2^-(z)] = 0. \quad (11)$$

Поклавши у п'ятій рівності (10) $z = is'_n$, у шостій – $z = i\zeta_n$, у першій – $z = is_n$ і в четвертій – $z = -i\zeta_n$, $n = 1, 2, \dots$, відносно невідомих

$$\begin{aligned}z_{1k}^+ &= -\frac{1}{q_0} \Phi_1^+(is_k) - \frac{2}{s_k}, \quad z_{1k}^- = -\frac{1}{q_0} \Phi_2^-(is'_k), \\ z_{2k}^- &= -\frac{1}{q_0} \left[\Psi^-(i\zeta_k) - \frac{\bar{p}}{\zeta_k} + F_{22}^-(i\zeta_k) \right], \\ z_{2k}^+ &= -\frac{1}{q_0} \left[\Psi^+(i\zeta_k) + K_{21}(i\zeta_k) \Phi_1^+(i\zeta_k) e^{-\zeta_k b} + \bar{p}/\zeta_k - F_{21}^-(i\zeta_k) \right], \quad k = 1, 2, \dots,\end{aligned}$$

отримаємо нескінченну систему алгебричних рівнянь

$$\begin{aligned}z_{1n}^+ + \beta_{1n}^+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{1k}^- z_{1k}^-}{s'_k - s_n} &= g_{1n}^+, \quad z_{1n}^- + \beta_{1n}^- \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_{1k}^+ z_{1k}^+}{s_k - s'_n} + \frac{\alpha_{2k}^- z_{2k}^-}{\zeta_k + s'_n} \right) = g_{1n}^-, \\ z_{2n}^+ + \beta_{2n}^+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_{1k}^+ z_{1k}^+}{s_k - \zeta_n} + \frac{\alpha_{2k}^- z_{2k}^-}{\zeta_k + \zeta_n} \right) &= g_{2n}^+, \quad z_{2n}^- + \beta_{2n}^- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2k}^+ z_{2k}^+}{\zeta_k + \zeta_n} = g_{2n}^-, \quad n = 1, 2, \dots,\end{aligned}\quad (12)$$

у якій введені такі позначення коефіцієнтів:

$$\begin{aligned}\alpha_{1k}^+ &= \frac{\lambda_{12}(is_k)}{i\Delta'(is_k)K_{22}^+(is_k)} e^{-s_k b}, \quad \alpha_{1k}^- = \frac{i\lambda_1(is'_k)}{\Delta'(is'_k)K_{11}^-(is'_k)} e^{s'_k b}, \\ \alpha_{2k}^+ &= \frac{\kappa\Delta(i\zeta_k)K_{22}^+(i\zeta_k)}{\zeta_k\Delta_1'(i\zeta_k)} e^{-\zeta_k(c-b)}, \quad \alpha_{2k}^- = -\frac{\kappa\Delta(-i\zeta_k)K_{22}^-(-i\zeta_k)}{\zeta_k\Delta_1'(i\zeta_k)} e^{-\zeta_k(c-b)}, \\ \beta_{1n}^+ &= \frac{1}{2K_{11}^+(is_n)}, \quad \beta_{1n}^- = \frac{1}{\kappa K_{22}^-(is'_n)}, \quad \beta_{2n}^+ = -K_{22}^+(i\zeta_n), \quad \beta_{2n}^- = -K_{22}^-(-i\zeta_n), \\ g_{1n}^+ &= -\frac{4\beta_{1n}^+}{s_n}, \quad g_{1n}^- = \frac{\bar{p}}{q_0} \frac{\beta_{1n}^-}{s'_n}, \quad g_{2n}^+ = \frac{\bar{p}}{q_0} \frac{\beta_{2n}^+}{\zeta_n}, \quad g_{2n}^- = -\frac{\bar{p}}{q_0} \frac{\beta_{2n}^-}{\zeta_n}, \quad k, n = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Система рівнянь (12) має експоненціально згасаючі за k коефіцієнти та належить до регулярних систем типу Пуанкаре–Коха. Тому вона допускає ефективне розв'язання методом редукції.

Додаткові умови (11) до системи рівнянь (12), які запишемо у вигляді

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k}^+ z_{2k}^+ = -\frac{\bar{p}}{q_0}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_{1k}^+ z_{1k}^+ - \alpha_{2k}^- z_{2k}^-) = -\frac{\bar{p}}{q_0},$$

служать для визначення меж $x = -l_2 = -2hc$, $x = -l_1 = -2hb$ зони відриву верхньої грані смуги від жорсткої стінки.

Розкриття тріщини, дотичні напруження та коефіцієнт інтенсивності напружень. Нормальні переміщення верхньої грані смуги на інтервалі $-l_2 < x < -l_1$, які характеризують розкриття тріщини, та розподіл дотичних напружень на лінії продовження тріщини $0 < x < \infty$ знайдемо, використавши заміни (3), (4), друге рівняння (2) і обернене перетворення Фур'є першої та другої рівностей (6). Перетворивши відповідні інтеграли з урахуванням першого та третього рівнянь (10) у ряди за теорією лишків, отримаємо:

$$u_y \Big|_{y=h} = -\delta_1 + \frac{\bar{p}}{\kappa} h_0 + \bar{q}_0 h_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta_k \Delta'_1(i\zeta_k)} \left(\Delta(-i\zeta_k) z_{2k}^- e^{-\zeta_k(\xi+c)} + \Delta(i\zeta_k) z_{2k}^+ e^{\zeta_k(\xi+b)} \right),$$

$$\tau_{yx} \Big|_{y=h} = 2q - \mu_0 p - q_0 \sum_{k=1}^{\infty} \left[\mu_0 \frac{s'_k \Delta_1(is'_k)}{\Delta'(is'_k)} z_{1k}^- e^{s'_k(\xi+b)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\tau_k \lambda_{11}(i\tau_k)}{\lambda'(i\tau_k)} K_{11}^-(-i\tau_k) \left(\frac{4}{\tau_k} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{1m}^- z_{1m}^-}{s'_m + \tau_k} \right) e^{-\tau_k \xi} \right].$$

Асимптотичну поведінку дотичних напружень на продовженні тріщини поблизу її вершини ($y = h$, $x \rightarrow +0$) знайдемо, застосовуючи теорему абелевого типу [3] до другої рівності (6). Врахувавши при цьому скінченність нормальних напружень [1], отримаємо коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН)

$$K_{II} = \lim_{x \rightarrow +0} (2\pi x)^\rho \tau_{yx} \Big|_{y=h} = \frac{q - \mu_0 p}{2A^+ \Gamma(1-\rho)} \left(4 - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{1k}^- z_{1k}^- \right) (4\pi h)^\rho,$$

де сталі A^+ , ρ такі, як і в праці [1]. Аналогічно [1] КІН подамо також у вигляді

$$K_{II} = (q - \mu_0 p) \sqrt{\frac{1-\nu}{\pi(3-4\nu)}} e^I \left(4 - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{1k}^- z_{1k}^- \right) (4\pi h)^\rho,$$

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \arctg \frac{\lambda_{11}(\zeta) \operatorname{th} \pi \zeta - i \mu_0 \lambda_{12}(\zeta) \operatorname{tg} \pi \rho}{\lambda_{11}(\zeta) \operatorname{tg} \pi \rho + i \mu_0 \lambda_{12}(\zeta) \operatorname{th} \pi \zeta} \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Результати обчислень. Відносні відстані $b = l_1/(2h)$, $c = l_2/(2h)$ меж ділянки розкриття тріщини від її вершини та відносні максимальні розкриття тріщини $d = -\delta_2^{-1}(\min u_y \Big|_{y=h} + \delta_1)$ (при $x = -0,9 \cdot 2h$ для $q/p \leq 5$ та $x = -2h$ для $q/p > 5$), а також нормалізовані значення КІН $\tilde{K}_{II} = \pi^{-\rho+1/2} q^{-1} (4h)^{-\rho} K_{II}$ (при $\mu_0 = 0,25$) залежно від зусиль q/p за $\nu = 1/3$ подано у таблиці. За відсутності тертя ($\mu_0 = 0$) значення $\tilde{K}_{II} = 2,5298$ не залежить від q/p . Зі збільшенням q/p права межа $x = -l_1$ зони відриву смуги від жорсткої стінки наближається до вершини тріщини, а ліва $x = -l_2$ необмежено віддаляється від неї. При цьому тертя дещо зменшує розмір зони відриву. У граничному випадку тільки зсувного навантаження ($p = 0$), коли $q/p \rightarrow \infty$, тріщина розкривається на півнескінченному інтервалі $-\infty < x < -l_1^*$ ($l_1^* = 0,1536 \cdot 2h$, якщо $\mu_0 = 0,25$, і $l_1^* = 0,1492 \cdot 2h$, якщо $\mu_0 = 0$; $l_2 \rightarrow \infty$), а область контакту берегів тріщини $-l_1^* \leq x < 0$ стає скінченною.

q/p	$\mu_0 = 0$			$\mu_0 = 0,25$			
	b	c	$d \cdot 10^2$	b	c	$d \cdot 10^2$	\tilde{K}_{II}
3,265	0,586	1,260	0,073	0,845	0,934	0,0002	2,530
3,5	0,495	1,431	0,180	0,586	1,296	0,082	2,544
4	0,401	1,671	0,393	0,443	1,591	0,296	2,566
5	0,316	1,984	0,713	0,337	1,931	0,651	2,596
10	0,213	2,786	1,375	0,221	2,755	1,358	2,653
100	0,155	5,379	1,961	0,159	5,359	1,960	2,701
10^3	0,150	7,985	2,0191	0,154	7,966	2,0185	2,7052
10^4	0,1493	10,590	2,0249	0,1537	10,571	2,0243	2,7057

РЕЗЮМЕ. Проанализированы сжатие и сдвиг упругой полосы с полубесконечной трещиной на границе полосы и жесткой стенки. Трещина раскрыта внутри и закрыта на краях, где ее берега находятся в условиях фрикционного проскальзывания. С применением метода Винера–Хопфа система интегральных уравнений задачи сведена к бесконечной системе алгебраических уравнений. Найдены коэффициент интенсивности напряжений и раскрытие трещины.

Ключевые слова: межфазная трещина, упругая полоса, трение, скользящий контакт, метод Винера–Хопфа.

SUMMARY. The compression and shear of an elastic strip containing a semi-infinite crack at the edge of the strip and rigid wall are analyzed. The crack is open in the middle while it is closed at the edges, where its surfaces are in the state of friction sliding. Applying the Wiener–Hopf method, the system of integral equations is reduced to the infinite system of algebraic equations. The stress intensity factor is found as well as the crack opening.

Keywords: interface crack, elastic strip, friction, sliding contact, Wiener–Hopf method.

1. *Острик В. І.* Закрита півнескінченна тріщина на межі пружної смуги і жорсткої стінки // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2017. – **53**, № 1. – С. 84–89.
(*Ostryk V. I.* Closed semiinfinite crack on the boundary of an elastic strip and a rigid wall // Materials Science. – 2017. – **53**, № 1. – P. 93–101.)
2. *Сташук М. Г.* Оцінювання розподілу водню біля тріщиноподібного дефекту // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2016. – **52**, № 6. – С. 56–62.
(*Stashchuk M. H.* Determination of the distribution of hydrogen near cracklike defects // Materials Science. – 2017. – **52**, № 6. – P. 803–810.)
3. *Нобл Б.* Метод Винера–Хопфа. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 280 с.

Одержано 13.04.2017