

УДК 359.3

ОПТИМІЗАЦІЯ РЕЖИМІВ ТЕРМООБРОБКИ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ З ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИХ МАТЕРІАЛІВ

М. Г. СТАЩУК¹, Є. М. ІРЗА²

¹ Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів;

² Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Запропоновано методику керування швидкодією теплових режимів за теплового навантаження тіл обертання з функціонально-градієнтних матеріалів, яка ґрунтується на числових методах. Для розв'язування прямих задач використано метод зважених залишків у поєднанні з методом скінченних елементів. Розв'язок сформульованої екстремальної задачі заснований на принципі поетапної параметричної оптимізації.

Ключові слова: *термопружний стан, тіло обертання, функціонально-градієнтний матеріал, метод скінченних елементів, порожнистий циліндр, оптимізація режимів.*

Вступ. Конструкції з функціонально-градієнтних матеріалів часто піддаються тепловим процесам, які пов'язані з їх нагрівом і подальшим охолодженням. У результаті дії температурних полів у них виникають температурні напруження, які можуть перевищувати допустимі значення і призводити до руйнування конструкцій або погіршувати їх експлуатаційні властивості. Але режими термообробки енергозатратні, тому необхідні ефективні математичні методики, щоб оптимально, за певними критеріями, керувати ними під час нагріву-охолодження таких тіл. Для цього слід забезпечити оптимум певного критерію за обмежень на напружено-деформований стан конструкції і технологічні умови нагріву-охолодження.

Загальні підходи до розробки ефективних математичних методик у цьому напрямку достатньо повно висвітлені в літературі [1–6], де здебільшого описані термомеханічні процеси в тілах за різних теплових навантажень, а властивості матеріалу, з якого виготовлена конструкція, вважають однорідними. Нижче запропонована методика керування швидкодією теплових режимів під час нагріву-охолодження тіл обертання з функціонально-градієнтних матеріалів (форма яких відмінна від канонічної). Теплофізичні характеристики і обмеження на напружений стан вважали залежними від просторової координати і температури.

Формулювання задачі. Постава задач керування швидкодією теплових режимів під тепловим навантаженням охоплює такі етапи: вибір критерію і відповідного функціоналу оптимізації, а також функцій керування, за допомогою яких досягають екстремуму функціоналу оптимізації; формування обмежень на параметри стану і функцій керування; побудова залежностей, які описують поведінку тіл за даних умов теплового навантаження. Розглянемо кожен з цих етапів. Критерій вибрали за цільовим призначенням теплового навантаження, а як функціонал оптимізації – тривалість теплового навантаження

$$J = \tau_k. \quad (1)$$

Мінімізуючи функціонал (1), можна скоротити тривалість процесу. При цьому міцність конструкції забезпечували за відповідних обмежень. Функцію керування вибирали, враховуючи технологічні можливості контролю фізико-механіч-

ними процесами. Третім важливим етапом є формулювання обмежень. Типовими в цих задачах є обмеження на напруження в тілі:

$$\max_{\tau, \Omega} \sigma_i(s, t) \leq \sigma_d(s, t), \quad i = \overline{1, 3}, \quad (2)$$

де $\sigma_d(s, t)$ – рівень допустимих напружень, s – просторова координата в напрямку неоднорідності фізико-механічних властивостей матеріалу тіла, t – температурне поле в тілі.

До типових можна також віднести обмеження на температуру тіла під час теплового навантаження

$$t_1 \leq t(s, \tau) \leq t_2, \quad (3)$$

на функцію керування

$$h_1 \leq h(\tau) \leq h_2 \quad (4)$$

і швидкість її зміни

$$v_1 \leq dh(\tau) / d\tau \leq v_2. \quad (5)$$

Кількість додаткових умов на параметри розглядуваних полів і функції керування під час теплового навантаження в цій схемі несуттєва.

Один з головних етапів у поставі задачі оптимізації – вибір термомеханічної моделі тіла під тепловим навантаженням, яка б максимально відтворювала особливості його механічної поведінки. Вважали, що за вказаних теплових навантажень напружено-деформований стан тіла не впливає на його температуру, тобто задачу про його визначення формулюємо квазістатично (в переміщеннях). Тіло обертання займає область Ω евклідового простору R^3 , обмежене неперервною за Ліпшицем поверхнею Γ і належить до криволінійної циліндричної системи координат $Or\phi z$. На частині Γ_u його поверхні Γ задані переміщення $\vec{u} = \vec{u}_0$, а на частині Γ_σ – силове навантаження, яке характеризується вектором \vec{p} , $\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \Gamma$. Неоднорідну структуру матеріалу тіла описують фізико-механічні параметри, які залежать від просторової координати і температури. Тіло піддається технологічному осесиметричному нагріванню зовнішнім середовищем з температурою $t_c(\tau)$ через частину поверхні Γ_t , тепловим потоком $q(\tau)$ через частину поверхні Γ_q , ($\Gamma_t \cup \Gamma_q = \Gamma$), а також розподіленими джерелами тепла потужності $Q(\vec{r}, \tau)$, ($\vec{r} \in \Omega$). Температурне поле в ньому описує відоме рівняння теплопровідності [7]

$$1/r \cdot \partial/\partial r (rk \cdot \partial t/\partial r) + \partial/\partial z (k \cdot \partial t/\partial z) + Q = c\rho \cdot \partial t/\partial \tau, \quad (6)$$

за таких початкової і крайових умов:

$$t(r, z, 0) = t_0(r, z); \quad [k(\partial t/\partial r \cdot n_r + \partial t/\partial z \cdot n_z) + \alpha(t - t_c)]_{\Gamma_t} = 0, \\ [k(\partial t/\partial r \cdot n_r + \partial t/\partial z \cdot n_z) + q]_{\Gamma_q} = 0. \quad (7)$$

Тут $k(s, t)$ – коефіцієнт теплопровідності; $c(s, t)$ – питома теплоємність; $\rho(s, t)$ – густина; α – коефіцієнт тепловіддачі; n_r, n_z – компоненти зовнішньої нормалі до поверхні тіла; τ – біжучий час; r, z – просторові координати точки.

Зв'язок між компонентами $\{\sigma\}$, $\{\varepsilon\}$ тензорів напружень і деформацій беремо у вигляді [7]

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_t\}), \quad (8)$$

де $[D]$ – матриця пружних характеристик; $\{\varepsilon_t\}$ – компоненти тензора температурного навантаження.

У циліндричній системі координат (за осесиметричного нагріву) ці тензори зобразимо так:

$$\begin{aligned} \{\sigma\}^T &= [\sigma_{rr} \ \sigma_{\varphi\varphi} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{rz}], \quad \{\varepsilon\}^T = [\varepsilon_{rr} \ \varepsilon_{\varphi\varphi} \ \varepsilon_{zz} \ \varepsilon_{rz}], \\ \{\varepsilon_t\}^T &= [1 \ 1 \ 1 \ 0] \cdot \int_{t_0}^t \alpha_t(s, \zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (9)$$

Тут $\alpha_t(s, t)$ – коефіцієнт лінійного температурного розширення.

Матриця пружних характеристик має вигляд

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5-\nu \end{bmatrix}, \quad (10)$$

де $E(s, t)$ – модуль пружності; $\nu(s, t)$ – коефіцієнт Пуассона.

В області Ω повинні виконуватися рівняння рівноваги і крайові умови:

$$\partial\sigma_{rr}/\partial r + \partial\sigma_{rz}/\partial z + (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})/r = 0, \quad \partial\sigma_{rz}/\partial r + \partial\sigma_{zz}/\partial z + \sigma_{rz}/r = 0; \quad (11)$$

$$n_r\sigma_{rr} + n_z\sigma_{zr} - p_r = 0, \quad n_r\sigma_{rz} + n_z\sigma_{zz} - p_z = 0 \quad \text{на } \Gamma_\sigma, \quad (12)$$

$$u_r = u_r^0, \quad u_z = u_z^0 \quad \text{на } \Gamma_u.$$

Обмежимося малими деформаціями. Зв'язок між компонентами тензора деформацій і вектора переміщень такий:

$$\varepsilon_{rr} = \partial u_r / \partial r, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = u_r / r, \quad \varepsilon_{zz} = \partial u_z / \partial z, \quad \varepsilon_{rz} = \partial u_r / \partial z + \partial u_z / \partial r. \quad (13)$$

Задачу формулюємо в квазістатичній поставі і в переміщеннях. Залежності (6)–(13) складають повну систему співвідношень для визначення температурного поля, компонент вектора переміщень та тензорів деформацій і напружень за заданих температури навколишнього середовища t_c , теплового потоку q , зовнішнього силового навантаження \bar{p} і потужності внутрішніх джерел тепла Q . Тоді задача керування швидкодією теплових режимів під тепловим навантаженням є задачею на умовний екстремум (мінімум) функціоналу (1) за обмежень (2)–(5) і в'язей (6)–(13).

Методика розв'язування. Побудуємо розв'язок прямої задачі, яка містить відповідні задачі теплопровідності і термопружності. Оскільки геометрична конфігурація області, яку займає тіло, часто досить складна, а система розглядуваних диференціальних рівнянь нелінійна, під час розв'язання поєднували метод зважених залишків і скінченних елементів [8]. При цьому систему рівнянь (6)–(13) піддавали просторово-часовій дискретизації і звели до системи нелінійних алгебричних рівнянь

$$[K_T]\{T\} = \{F_T\}, \quad [K_{U,T}]\{U\} = \{F_{U,T}\}, \quad (14)$$

де $[K_T]$, $[K_{U,T}]$ – відповідні матриці жорсткості; $\{F_T\}$, $\{F_{U,T}\}$ – вектори навантаження [7], які знаходили методом простої ітерації.

Оптимальний розв'язок для функції керування на проміжку часу $[\tau_n, \tau_{n+1}]$ шукаємо на множині кусково-лінійних або кусково-сталих функцій. Значення h_{n+1} функції керування h у момент часу τ_{n+1} знаходимо за формулою

$$h_{n+1} = h_n + a_n \Delta \tau_n \quad \text{або} \quad h_{n+1} = b_n, \quad (15)$$

де a_n, b_n – шукані параметри, які змінюються в заданих межах.

Таким чином мінімізацію функціоналу J на проміжку $[\tau_n, \tau_{n+1}]$ зводимо до задачі нелінійного програмування пошуку мінімуму відповідної функції однієї змінної $J = J(a_n)$ або $J = J(b_n)$ (аргументом якої є параметр a_n або b_n).

Керування швидкодією нагрівом-охолодженням порожнистого циліндра. Запропоновану модель використали, щоб оптимізувати режими термообробки порожнистого циліндра, виготовленого з пружного функціонально-градієнтного матеріалу, в напрямку осі Or [7] (рис. 1, де $z_1 = 0,1$ м, $r_1 = 0,206$ м, $r_2 = 0,211$ м, $r_3 = 0,216$ м).

Циліндр поетапно нагрівали-охолоджували. На першому етапі нагрівали до $t_{\max} = 400^\circ\text{C}$, а на другому – охолоджували до $t_{\max} = 30^\circ\text{C}$.

За функціонал J оптимізації брали час нагріву-охолодження τ_k , тобто

$$J = \tau_k. \quad (16)$$

Критерієм оптимальності слугував мінімум часу процесу.

Під час нагріву-охолодження повинні виконуватися такі технологічні обмеження:

$$30^\circ\text{C} \leq t(r, z, \tau) \leq 400^\circ\text{C}; \quad dt/d\tau \leq 0,5 \text{ К/с}; \quad \sigma_{\text{фр}} \leq 10 \text{ МПа}. \quad (17)$$

За функцію керування вибрали температуру на зовнішній поверхні циліндра $t_c(\tau)$, а внутрішня була теплоізольована.

При цьому існували початкова умова

$$t(r, z, 0) = 30^\circ\text{C} \quad \text{на } \Omega \quad (18)$$

та крайові

$$k\vec{\nabla}t \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{на } \Gamma_v; \quad t(r, z, \tau) = t_c(\tau) \quad \text{на } \Gamma_z; \quad \vec{p} = (0, 0) \quad \text{на } \Gamma. \quad (19)$$

Тут Γ_v, Γ_z – внутрішня та зовнішня поверхні.

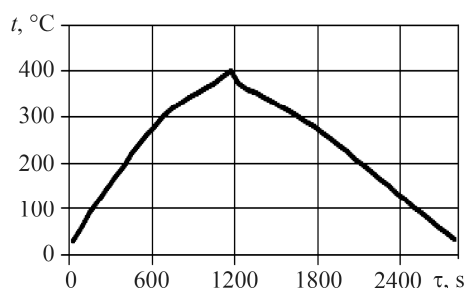


Рис. 1. Fig. 1.

Рис. 1. Оптимальний температурний режим нагріву порожнистого циліндра.

Fig. 1. Optimal temperature mode of a hollow cylinder heating.

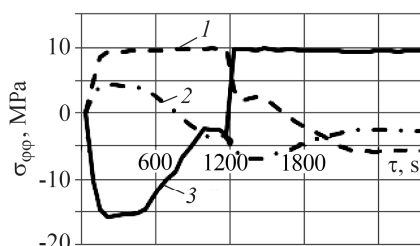


Рис. 2. Fig. 2.

Рис. 2. Термонапружений стан (криві 1–3 – точки заміру з координатами r_1, r_2, r_3).

Fig. 2. Thermo-stressed state (curves 1–3 correspond to measurement points with coordinates r_1, r_2, r_3).

Результати замірів теплофізичних характеристик для точок r_1 , r_2 , r_3 наведені в праці [7]. Рис. 1 ілюструє оптимальний режим нагріву, а рис. 2 – відповідну зміну напружень у точках заміру. Описаний режим нагріву не вимагає нульового наближення для функції керування і обмеження на технологічні умови теплового навантаження, які можна задавати в будь-якій кількості.

ВИСНОВКИ

За запропонованою моделлю можна розв'язувати задачі, пов'язані з тепловим навантаженням елементів конструкцій, виготовлених з функціонально-градієнтних матеріалів, а також порівнювати результати з отриманими іншими методами.

РЕЗЮМЕ. Предложена методика управления быстродействием тепловых режимов при тепловой нагрузке тел вращения из функционально-градиентных материалов, которая базируется на числовых методах. Для решения прямых задач использован метод взвешенных остатков в сочетании с методом конечных элементов. Решение сформулированной экстремальной задачи построено на принципе поэтапной параметрической оптимизации.

Ключевые слова: *термонапряженное состояние, тело вращения, функционально-градиентный материал, метод конечных элементов, полый цилиндр, оптимизация режимов.*

SUMMARY. A technique is proposed to control the speed of thermal conditions under thermal load of bodies of revolution of functionally gradient materials. The construction of solutions of the class of problems under consideration is based on numerical methods. To solve direct problems, the method of weighted residuals in combination with the finite element method is used. The solution of the formulated extremal problem is based on the principle of step-by-step parametric optimization.

Keywords: *thermal stress state, body of revolution, functional gradient material, finite element method, hollow cylinder, optimization modes.*

1. Кушнір Р. М., Попович В. С., Ясінський А. В. Оптимізація та ідентифікація в термомеханіці неоднорідних тіл. – Львів: СПОЛЮМ, 2011. – Т. 5. – 256 с.
2. Аналитическое решение смешанных осесимметричных задач для функционально-градиентных сред / С. М. Айзикович, В. М. Александров, А. С. Васильев, Л. И. Кренин, И. С. Трубочник. – М.: Физматлит, 2011. – 192 с.
3. Kawasaki A. and Watanabe R. Thermal fracture behavior of metal/ceramic functionally graded materials // Engng. Fract. Mech. – 2002. – № 69. – P. 1713–1728.
4. Андрейків О. Є., Гембара О. В. Деструктивний вплив водню на міцність матеріалів у нестационарному температурному полі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1996. – 32, № 4. – С. 31–35.
(Andreikiv O. E. and Gembara O. V. Destructive effect of hydrogen on the strength of materials in nonstationary temperature fields // Materials Science. – 1996. – 32, № 4. – P. 411–416.)
5. Стащук М. Г. Вплив зовнішніх навантажень на перерозподіл водню у металі біля концентраторів напружень // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – 47, № 6. – С. 23–29.
(Stashchuk M. H. Influence of external loads on the redistribution of hydrogen in the metal near stress concentrators // Materials Science. – 2012. – 47, № 6. – P. 737–745.)
6. Stashchuk M. H. and Dorosh M. I. Analytical evaluation of hydrogen induced-stress in metal // Int. J. of Hydrogen Energy. – 2017. – 42, № 9. – P. 6394–6400.
7. Стащук М. Г., Ірза Є. М. Термонапружений стан тіл обертання з функціонально-градієнтних матеріалів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2019. – 55, № 3. – С. 16–23.
8. Zienkiewicz O. C. and Taylor R. L. Finite Element Method: Vol 1. The Basis. – London: Butterworth Heinemann, 2000. – 690 p.

Одержано 21.02.2019