

УДК 539.3

ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З ОТВОРАМИ ТА ВКЛЮЧЕННЯМИ

Т. В. ШОПА

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

У межах уточненої моделі, яка враховує деформацію поперечного зсуву та інерційні компоненти, розглянуто задачу про усталені коливання ортотропної пластини, яка містить одночасно отвори та абсолютно жорсткі включення. Включення мають різні типи з'єднань з пластиною. Досліджено поступальний рух включень у нормальному напрямку до серединної поверхні пластини. Проаналізовано різні гармонічні в часі крайові умови як на зовнішній межі пластини, так і на контурах отворів. На основі непрямого методу граничних елементів та секвенціального підходу до зображення функцій Гріна крайову задачу зведено до системи інтегральних рівнянь та співвідношень, яку розв'язано методом колокацій. Наведено числові результати для прямокутної пластини з круглими отворами та включеннями.

Ключові слова: коливання, ортотропна пластинка, отвори, включення, непрямий метод граничних елементів.

Тонкостінні елементи конструкції складної форми, які взаємодіють з іншими тілами, широко використовують в інженерній практиці. Дуже часто вони працюють за змінних умов навантажень, тому актуально дослідити їх динамічну поведінку. Відомо достатньо публікацій, в яких вивчено коливання прямокутних або круглих пластин з одним або двома отворами круглої або прямокутної форми [1–15]. Дослідження коливань пластини складної форми з отворами та включеннями довільної конфігурації пов'язані зі значними математичними труднощами. Запропоновано [16–21] числові схеми для розрахунку поперечних коливань пластин зі складною формою внутрішньої та зовнішньої меж. Відомі результати досліджень коливань пластин зі зосередженими в точці або приєднаними масами, однак, небагато даних про коливання пластин з наскрізними масивними включеннями певної форми [16, 22]. Відсутні праці про коливання пластин, які містять одночасно отвори та включення.

Формулювання задачі. Розглянемо задачу про усталені коливання ортотропної пластини, яка має N отворів та абсолютно жорстких включень. Серед них є N_1 включень довільних форми та розташування, які взаємодіють з пластиною через тонкі пружні прошарки типу Вінклера з коефіцієнтами жорсткості $k^{(j)}(\alpha)$, ($j = 1, N_1$), N_2 включень, які жорстко з'єднані з пластиною, та N_3 шарнірно опертих. Панель також містить N_4 , N_5 і N_6 отворів, на контурах яких задано відповідно компоненти переміщень, зусиль, переміщень та зусиль. Контурами включень є криві $L^{(j)}$, $j = 1, N_1 + N_2 + N_3$, отворів – $L^{(j)}$, $j = N_1 + N_2 + N_3 + 1, N$. Нехай на включення масою $\tilde{m}^{(j)}$ діють сили з головним вектором $P^{(j)}(t) = P_0^{(j)} \sin(\omega t)$, нормальним до серединної поверхні пластини. Вважаємо, що включення поступально рухаються вздовж нормалі до серединної поверхні пластини; $\tilde{w}^{(j)}(t) = \tilde{w}_0^{(j)} \sin(\omega t)$

Контактна особа: Т. В. ШОПА, e-mail: tetyana.sh@gmail.com

– переміщення j -го включення. Зовнішня межа пластини також довільної форми і складається з трьох взаємодоповнювальних кривих $L^{(N+1)}$, $L^{(N+2)}$ та $L^{(N+3)}$. Вважаємо, що серединна поверхня пластини займає багатозв'язну область Ω . Область Π – однозв'язна прямокутна з довжинами сторін l_1, l_2 , яка містить область Ω . Осі декартової системи координат напрямлено вздовж сторін області Π , а початок координат розміщено в одній із її вершин [20, 22].

Крайові умови на внутрішніх контурах пластини, де пластина взаємодіє з включеннями через пружні прошарки типу Вінклера, мають вигляд

$$Q_n = -p^{(j)}(\alpha, t), \quad M_n = 0, \quad M_\tau = 0, \quad \alpha \in L^{(j)}, \quad j = \overline{1, N_1}, \quad (1)$$

де $p^{(j)}(\alpha, t) = -k^{(j)}(\alpha)(\tilde{w}^{(j)}(t) - w(\alpha, t))$ – контактні сили цієї взаємодії.

Крайові умови на контурах жорстко з'єднаних з пластиною включень

$$w = \tilde{w}^{(j)}(t), \quad \gamma_n = 0, \quad \gamma_\tau = 0, \quad \alpha \in L^{(j)}, \quad j = \overline{N_1 + 1, N_1 + N_2}, \quad (2)$$

а на контурах шарнірно опертих

$$w = \tilde{w}^{(j)}(t), \quad \gamma_\tau = 0, \quad M_n = 0, \quad \alpha \in L^{(j)}, \quad j = \overline{N_1 + N_2 + 1, N_1 + N_2 + N_3}. \quad (3)$$

Контактні сили взаємодії пластини та жорстко з'єднаних і шарнірно опертих включень моделюємо так:

$$p^{(j)}(\alpha, t) = -Q_n(\alpha, t) = -Q_n(\alpha) \sin(\omega t), \quad \alpha \in L^{(j)}, \quad j = \overline{N_1 + 1, N_1 + N_2 + N_3}.$$

Крайові умови на зовнішній межі пластини та контурах отворів такі:

$$w = w_0^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad \gamma_n = \gamma_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad \gamma_\tau = \gamma_{\tau0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t),$$

$$\alpha \in L^{(j)}, \quad j = \overline{N_1 + N_2 + N_3 + 1, N_1 + N_2 + N_3 + N_4}, \quad j = N + 1,$$

$$Q_n = Q_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad M_n = M_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad M_\tau = M_{\tau0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t),$$

$$\alpha \in L^{(j)}, \quad j = \overline{N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + 1, N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5}, \quad j = N + 2,$$

$$w = w_0^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad M_n = M_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad \gamma_\tau = \gamma_{\tau0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t),$$

$$\alpha \in L^{(j)}, \quad j = \overline{N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + 1, N}, \quad j = N + 3. \quad (4)$$

Розв'язування задачі. Для цього використали рівняння коливань пластин, які враховують поперечні зсуви та інерційні компоненти, включаючи інерцію обертання [20, 22].

Рівняння руху абсолютно жорстких включень матимуть вигляд

$$\tilde{m}^{(j)} \frac{\partial^2 \tilde{w}^{(j)}(t)}{\partial t^2} = P^{(j)}(t) - \int_{L^{(j)}} k^{(j)}(\zeta) (\tilde{w}^{(j)}(t) - w(\zeta, t)) dl(\zeta), \quad j = \overline{1, N_1},$$

$$\tilde{m}^{(j)} \frac{\partial^2 \tilde{w}^{(j)}(t)}{\partial t^2} = P^{(j)}(t) - \int_{L^{(j)}} Q_n(\zeta, t) dl(\zeta), \quad j = \overline{N_1 + 1, N_1 + N_2 + N_3}. \quad (5)$$

Розв'язок крайової задачі шукаємо, застосовуючи непрямий метод граничних елементів. Використовуємо функції Гріна, знайдені раніше [20] на основі послідовнісного подання дельта-функції Дірака [16, 23, 24].

Вводимо узагальнений контур $L = L^{(1)} \cup L^{(2)} \cup \dots \cup L^{(N)} \cup L^{(N+1)} \cup L^{(N+2)} \cup \dots \cup L^{(N+3)}$, як у працях [20, 22], і такі функції на ньому:

$$\begin{aligned} \{T(\xi)\} &= \{T_1(\xi), T_2(\xi), T_3(\xi)\}^T = \{T^{(j)}(\xi)\} = \\ &= \{T_1^{(j)}(\xi), T_2^{(j)}(\xi), T_3^{(j)}(\xi)\}^T, \quad \xi \in L^{(j)}, \quad j = \overline{1, N+3}. \end{aligned}$$

Розв'язок подамо у вигляді потенціалу простого шару:

$$\{U(\alpha, t)\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \sum_L \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon) [E_{km}(\alpha)] [U_{km}] [E_{km}(\xi)] \{T(\xi)\} dl(\xi) \sin(\omega t), \quad (6)$$

$$\{U(\alpha, t)\} = \{w(\alpha, t), \gamma_1(\alpha, t), \gamma_2(\alpha, t)\}^T.$$

Інтегральні рівняння для крайової задачі будемо, використовуючи розв'язок (6) та крайові умови (1)–(4). Якщо на контурах задано компоненти зусиль, вживаємо метод фіктивного контуру для уникнення стрибка похідної від потенціалу простого шару на межі, задовольняючи крайові умови не на реальній межі, а на фіктивно зміщеній всередину розглядуваної області на малу відстань ε . Криві зміщених контурів позначатимемо $L^{\varepsilon(j)}$. Тоді система $3(N+3) + N_1 + N_2 + N_3$ інтегральних рівнянь та співвідношень з урахуванням рівняння руху включень (5) для невідомих функцій густин $\{T(\xi)\}$ та амплітуд переміщень включень $\tilde{w}_0^{(j)}$, $j = \overline{1, N_1 + N_2 + N_3}$ набуває вигляду

$$\{w_0^{(j)}(\alpha), \gamma_{n0}^{(j)}(\alpha), \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha)\}^T = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \sum_L \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon) [\Omega_{km}^{(U)}(\alpha)] [E_{km}(\xi)] \{T(\xi)\} dl(\xi),$$

$$\alpha \in L^{(j)}, \quad j = \overline{N_1+1, N_1+N_2}, \quad j = \overline{N_1+N_2+N_3+1, N_1+N_2+N_3+N_4}, \quad j = N+1,$$

$$\{Q_{n0}^{(j)}(\alpha), M_{n0}^{(j)}(\alpha), M_{\tau 0}^{(j)}(\alpha)\}^T = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \sum_L \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon) [\Omega_{km}^{(P)}(\alpha)] [E_{km}(\xi)] \{T(\xi)\} dl(\xi),$$

$$\alpha \in L^{\varepsilon(j)}, \quad j = \overline{1, N_1}, \quad j = \overline{N_1+N_2+N_3+1, N_1+N_2+N_3+N_4+N_5}, \quad j = N+2,$$

$$w_0^{(j)}(\alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \sum_L \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^3 C_{km}(\varepsilon) w_i(\alpha) \Phi_{km}^i(\xi) T_i(\xi) dl(\xi),$$

$$\gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \sum_L \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^3 C_{km}(\varepsilon) \gamma_{i\tau}(\alpha) \Phi_{km}^i(\xi) T_i(\xi) dl(\xi),$$

$$\alpha \in L^{(j)}, \quad j = \overline{N_1+N_2+1, N_1+N_2+N_3}, \quad j = \overline{N_1+N_2+N_3+N_4+N_5+1, N}, \quad j = N+3,$$

$$M_{n0}^{(j)}(\alpha) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \sum_L \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^3 C_{km}(\varepsilon) M_{in}(\alpha) \Phi_{km}^i(\xi) T_i(\xi) dl(\xi),$$

$$\alpha \in L^{\varepsilon(j)}, \quad j = \overline{N_1+N_2+1, N_1+N_2+N_3}, \quad j = \overline{N_1+N_2+N_3+N_4+N_5+1, N}, \quad j = N+3,$$

$$-\omega^2 \tilde{m}^{(j)} \tilde{w}_0^{(j)} = P_0^{(j)} - \int_{L^{(j)}} k^{(j)}(\zeta) (\tilde{w}_0^{(j)} - w(\zeta)) dl(\zeta), \quad j = \overline{1, N_1},$$

$$-\omega^2 \tilde{m}^{(j)} \tilde{w}_0^{(j)} = P_0^{(j)} - \int_{L^{\varepsilon(j)}} Q_n(\zeta) dl(\zeta), \quad j = \overline{N_1+1, N_1+N_2+N_3},$$

де

$$\gamma_{n0}^{(j)}(\alpha) = \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) = 0, \quad w_0^{(j)}(\alpha) = \tilde{w}_0^{(j)}, \quad j = \overline{N_1+1, N_1+N_2},$$

$$M_{n0}^{(j)}(\alpha) = M_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) = 0,$$

$$Q_{n0}^{(j)}(\alpha) = k^{(j)}(\alpha) \left(\tilde{w}_0^{(j)} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \sum_{L, k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^3 C_{km}(\varepsilon) w_i(\alpha) \Phi_{km}^i(\xi) T_i(\xi) dl(\xi) \right), \quad j = \overline{1, N_1},$$

$$M_{n0}^{(j)}(\alpha) = \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) = 0, \quad w_0^{(j)}(\alpha) = \tilde{w}_0^{(j)}, \quad j = \overline{N_1 + N_2 + 1, N_1 + N_2 + N_3},$$

$$Q_n(\zeta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \sum_{L, k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^3 C_{km}(\varepsilon) Q_{in}(\zeta) \Phi_{km}^i(\xi) T_i(\xi) dl(\xi),$$

$$w(\zeta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \sum_{L, k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^3 C_{km}(\varepsilon) w_i(\zeta) \Phi_{km}^i(\xi) T_i(\xi) dl(\xi),$$

$$\Phi_{km}^1(\xi) = \Phi_{km}^{ss}(\xi), \quad \Phi_{km}^2(\xi) = \Phi_{km}^{cs}(\xi), \quad \Phi_{km}^3(\xi) = \Phi_{km}^{sc}(\xi),$$

а формули для $w_i(\alpha)$, $\gamma_{in}(\alpha)$, $\gamma_{i\tau}(\alpha)$, $M_{in}(\alpha)$, $M_{i\tau}(\alpha)$, $Q_{in}(\alpha)$, які є елементами матриць $[\Omega_{km}^{(U)}(\alpha)]$, $[\Omega_{km}^{(P)}(\alpha)]$, такі ж, як у статті [20].

Розв'язок системи інтегральних рівнянь знаходимо методом колокацій, коли контури узагальненої кривої L замінюємо ламаними ($S^{(j)}$ – кількість відрізків розбиття j -го контуру; $\alpha^{(j)r}$ – їх середини, $r = \overline{1, S^{(j)}}$), а на кожному з прямолінійних відрізків задаємо розподіл невідомих густин $\{T^{(j)r}(\xi)\} = \{T^{(j)r}\} \delta(\alpha^{(j)r}, \xi)$. Мінімізуємо нев'язку в контрольних точках колокацій $\alpha^{(j)q}$.

Тоді система $3 \sum_{j=1}^{N+3} S^{(j)} + N_1 + N_2 + N_3$ лінійних алгебричних рівнянь відносно

дискретних значень невідомих густин $\{T^{(j)r}\}$, $j = \overline{1, N+3}$, $r = \overline{1, S^{(j)}}$ та амплітуд переміщень включень $\tilde{w}_0^{(j)}$, $j = \overline{1, N_1 + N_2 + N_3}$ набуває вигляду

$$\left\{ w_0^{(j)}(\alpha^{(j)q}), \gamma_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) \right\}^T =$$

$$= \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) \left[\Omega_{km}^{(U)}(\alpha^{(j)q}) \right] \left[E_{km}(\alpha^{(f)r}) \right] \{T^{(f)r}\},$$

$$\alpha^{(j)q} \in L^{(j)}, \quad q = \overline{1, S^{(j)}}, \quad j = \overline{N_1 + 1, N_1 + N_2},$$

$$j = \overline{N_1 + N_2 + N_3 + 1, N_1 + N_2 + N_3 + N_4}, \quad j = N + 1,$$

$$\left\{ Q_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), M_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), M_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) \right\}^T =$$

$$= \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) \left[\Omega_{km}^{(P)}(\alpha^{(j)q}) \right] \left[E_{km}(\alpha^{(f)r}) \right] \{T^{(f)r}\},$$

$$\alpha^{(j)q} \in L^{(j)}, \quad q = \overline{1, S^{(j)}}, \quad j = \overline{1, N_1},$$

$$j = \overline{N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + 1, N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5}, \quad j = N + 2,$$

$$w_0^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^3 C_{km}(\varepsilon) w_i(\alpha^{(j)q}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r},$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{\tau_0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) &= \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^3 C_{km}(\epsilon) \gamma_{i\tau}(\alpha^{(j)q}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r}, \\
\alpha^{(j)q} &\in L^{(j)}, \quad q = \overline{1, S^{(j)}}, \quad j = \overline{N_1 + N_2 + 1, N_1 + N_2 + N_3}, \\
& j = \overline{N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + 1, N}, \quad j = N + 3, \\
M_{n_0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) &= \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^3 C_{km}(\epsilon) M_{in}(\alpha^{(j)q}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r}, \\
\alpha^{(j)q} &\in L^{\epsilon(j)}, \quad q = \overline{1, S^{(j)}}, \quad j = \overline{N_1 + N_2 + 1, N_1 + N_2 + N_3}, \\
& j = \overline{N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + 1, N}, \quad j = N + 3, \\
P_0^{(j)} &= - \sum_{p=1}^{S^{(j)}} \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^3 C_{km}(\epsilon) \Psi_{km}^{ss}(\alpha^{(j)p}) w_{km}^i \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r} + \\
& + \tilde{w}_0^{(j)} \left(\sum_{p=1}^{S^{(j)}} \Theta(\alpha^{(j)p}) - \omega^2 \tilde{m}^{(j)} \right), \quad j = \overline{1, N_1}, \\
P_0^{(j)} &= \sum_{p=1}^{S^{(j)}} \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^3 C_{km}(\epsilon) \Psi_{in}(\alpha^{(j)p}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r} - \\
& - \omega^2 \tilde{m}^{(j)} \tilde{w}_0^{(j)}, \quad j = \overline{N_1 + 1, N_1 + N_2 + N_3},
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\gamma_{n_0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) &= \gamma_{\tau_0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = 0, \quad w_0^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = \tilde{w}_0^{(j)}, \quad j = \overline{N_1 + 1, N_1 + N_2}, \\
M_{n_0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) &= M_{\tau_0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{n_0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) &= \\
&= k^{(j)}(\alpha^{(j)q}) \left(\tilde{w}_0^{(j)} - \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^3 C_{km}(\epsilon) w_i(\alpha^{(j)q}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r} \right), \quad j = \overline{1, N_1},
\end{aligned}$$

$$M_{n_0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = \gamma_{\tau_0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = 0, \quad w_0^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = \tilde{w}_0^{(j)}, \quad j = \overline{N_1 + N_2 + 1, N_1 + N_2 + N_3},$$

$$\Psi_{km}^{ss}(\alpha^{(j)p}) = \int_{L^{(j)p}} k^{(j)}(\zeta) \Phi_{km}^{ss}(\zeta) d\ell(\zeta), \quad \Theta(\alpha^{(j)p}) = \int_{L^{(j)p}} k^{(j)}(\zeta) d\ell(\zeta), \quad \alpha^{(j)p} \in L^{(j)p},$$

$$\Psi_{in}(\alpha^{(j)p}) = \Lambda_1 \Psi_{km}^{cs}(\alpha^{(j)p}) (\gamma_{1km}^i + \lambda_{1k} w_{km}^i) + \Lambda_2 \Psi_{km}^{sc}(\alpha^{(j)p}) (\gamma_{2km}^i + \lambda_{2m} w_{km}^i),$$

$$\Psi_{km}^{cs}(\alpha^{(j)p}) = n_1(\alpha^{(j)p}) \int_{L^{\epsilon(j)p}} \Phi_{km}^{cs}(\zeta) d\ell(\zeta),$$

$$\Psi_{km}^{sc}(\alpha^{(j)p}) = n_2(\alpha^{(j)p}) \int_{L^{\epsilon(j)p}} \Phi_{km}^{sc}(\zeta) d\ell(\zeta), \quad \alpha^{(j)p} \in L^{\epsilon(j)p}.$$

Власні частоти знаходимо з умови існування нетривіального розв'язку відповідної системи однорідних лінійних алгебричних рівнянь, прирівнюючи визначник системи до нуля. Характеристики напружено-деформованого стану вздовж довільного напрямку з вектором нормалі $\mathbf{n}(\alpha)$ та дотичним $\boldsymbol{\tau}(\alpha)$ можна отримати за дискретними значеннями густин потенціалів простого шару:

$$\begin{cases} w(\alpha, t) \\ \gamma_n(\alpha, t) \\ \gamma_\tau(\alpha, t) \end{cases} = \sum_{j=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(j)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\epsilon) \left[\Omega_{km}^{(U)}(\alpha) \right] \left[E_{km}(\alpha^{(j)r}) \right] \left\{ T^{(j)r} \right\} \sin(\omega t), \alpha^{(j)r} \in L,$$

$$\begin{cases} Q_n(\alpha, t) \\ M_n(\alpha, t) \\ M_\tau(\alpha, t) \end{cases} = \sum_{j=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(j)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\epsilon) \left[\Omega_{km}^{(P)}(\alpha) \right] \left[E_{km}(\alpha^{(j)r}) \right] \left\{ T^{(j)r} \right\} \sin(\omega t), \alpha^{(j)r} \in L.$$

Числові результати. Використовуючи побудовані алгебричні рівняння, можна проаналізувати окремі випадки задачі, коли задані довільні амплітуди $w(\alpha)$, $\gamma_n(\alpha)$, $\gamma_\tau(\alpha)$, $Q_n(\alpha)$, $M_n(\alpha)$, $M_\tau(\alpha)$ на контурах зовнішньої межі і отворів. Також можливі різні мішані крайові умови як на зовнішній межі, так і контурах отворів.

Оцінимо випадок, коли шарнірна оперта ортотропна прямокутна пластина має один підкріпленний круглий отвір і одне кругле жорстко закріплене включення. Тоді область Π доцільно вибрати так, щоб її межа збігалася з зовнішньою межею пластини. Геометричні та фізичні параметри пластини такі: $l_1 = 2$ m, $l_2 = 1$ m, $h = 0,01$ m, $E_1 = 128$ GPa, $E_2 = 11$ GPa, $G_{12} = G_{13} = 4,48$ GPa, $G_{23} = 1,53$ GPa, $\nu_{12} = 0,25$, $\rho = 1500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Крайові умови на контурі отвору: $w_0^{(2)} = -0,005$ m, $\gamma_{0n}^{(2)} = \gamma_{0\tau}^{(2)} = 0$. Радіус та координати центра отвору: $b_1 = 0,2$ m, $\alpha_1^{*(1)} = 0,5$ m, $\alpha_2^{*(1)} = 0,5$ m, а центра включення $b_2 = 0,2$ m, $\alpha_1^{*(2)} = 1,5$ m, $\alpha_2^{*(2)} = 0,5$ m. Сила, яка діє на включення, $P_0^{(1)} = 35000$ N. Маса включення $\tilde{m}^{(1)} = 100$ kg. Параметри апроксимації: $K=100$

$$S^{(1)} = S^{(2)} = 32, \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{b_1 \pi}{S^{(1)}} m, \quad C_{km}(\epsilon) = \mu_{km} \frac{4}{l_1 l_2} \frac{\left(\sin\left(\frac{\lambda_{1k} \epsilon_1}{2}\right) \right)^2 \left(\sin\left(\frac{\lambda_{2m} \epsilon_2}{2}\right) \right)^2}{\left(\frac{\lambda_{1k} \epsilon_1}{2} \right)^2 \left(\frac{\lambda_{2m} \epsilon_2}{2} \right)^2}.$$

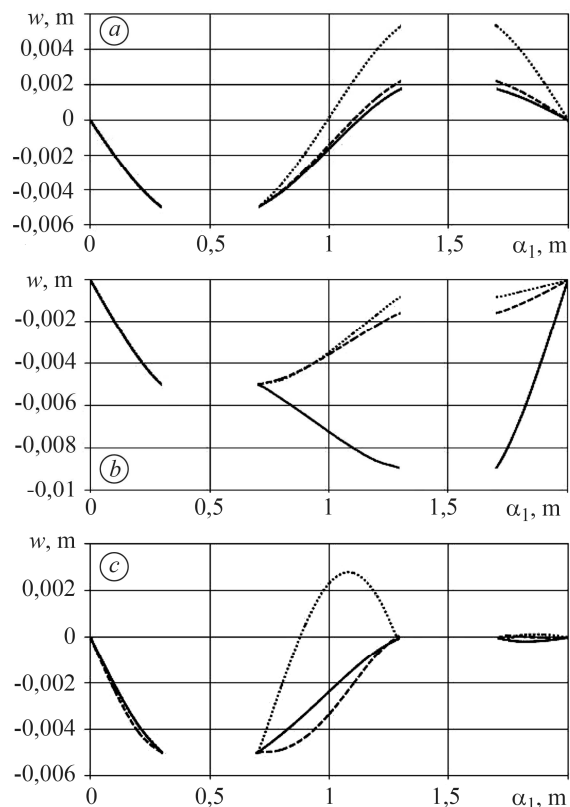
Якщо $k = 0$ чи $m = 0$, для обчислення функції $C_{km}(\epsilon)$ використовуємо границю

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. За параметричного задання контурів отвору та включення враховуємо правило обходу контурів та орієнтацію нормалі.

Виявили (див. рисунок), що амплітуда прогину пластини залежить від частоти коливань. За досить низьких частот зі збільшенням частоти коливань зростають амплітуди прогину пластини та переміщення включення (графік *a*), а за подальшого її збільшення зменшуються (графік *b*). На вищих частотах форма коливань ускладнюється, а амплітуда прогину пластини в околі включення стає дуже близькою до нуля, хоча на інших її ділянках може досягати суттєвих значень (графік *c*). Отже, амплітуди прогину пластини та переміщень включень немонотонно залежать від частоти.

Щоб підтвердити правильність числової схеми, у таблиці наведено основні власні частоти коливань $\bar{\omega} = l^2 \omega \sqrt{2hr/D}$ для ізотропної квадратної шарнірно опертої пластини зі жорстко закріпленим круговим центральним отвором для різних значень його радіуса R та для порівняння – результати досліджень інших авторів. Для розрахунку використаємо такі вхідні дані: $l_1 = l_2 = l = 1$ m, $h = 0,0025$ m, $E_1 = E_2 = E = 210$ GPa, $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu = 0,3$, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $D_1 = D_2 =$

$$= D = \frac{2h^3 E}{3(1-\nu^2)}, \rho = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, K = 70;50;50, S^{(1)} = 20;40;60, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = \frac{R\pi}{S^{(1)}} m.$$



Амплітуда прогину пластини на лінії $\alpha_2 = 0,5$ м для різних частот коливань
 (a: суцільні лінії – $\omega = 5$ Hz, штрихові – 25, пунктирні – 45; b: суцільні лінії – $\omega = 60$ Hz, штрихові – 80, пунктирні – 100; c: суцільні лінії – $\omega = 200$ Hz, штрихові – 300, пунктирні – 400).

Deflection amplitude of the plate on line $\alpha_2 = 0.5$ m for different values of vibration frequency
 (a: solid lines – $\omega = 5$ Hz, dashed – 25, dotted – 45; b: solid lines – $\omega = 60$ Hz, dashed – 80, dotted – 100; c: solid lines – $\omega = 200$ Hz, dashed – 300, dotted – 400).

Основні власні частоти коливань $\bar{\omega} = l^2 \omega \sqrt{\frac{2h\rho}{D}}$ ізотропної квадратної шарнірно опертої пластини зі защемленим круговим центральним отвором для різних значень радіуса

$2R/l$	Одержані результати	З праці [3]	З праці [10]	Отримані методом скінченних елементів [10]
0,1	60,42	60,42	60,32	60,92
0,2	73,23	73,27	73,12	73,85
0,3	88,43	89,64	89,55	90,44

Як бачимо, значення частот досить добре узгоджуються з відомими в літературі.

ВИСНОВКИ

Розглянуто задачу про усталені коливання ортотропної пластини з отворами та абсолютно жорсткими включеннями за різних типів їх з'єднань з пластиною та з різними гармонічними в часі крайовими умовами на зовнішній межі пластини та контурах отворів. Непрямим методом граничних елементів з використанням послідовнісного подання функцій Гріна крайову задачу зведено до системи інтегральних рівнянь та співвідношень для функцій густин потенціалів простого шару та переміщень включень, яку розв'язано методом колокацій. Числову схему

варифіковано для шарнірно опертої прямокутної пластини з одним підкріпленням круглим отвором та одним круглим включенням, жорстко з'єднаним з нею. Виявлено, що динамічний прогин суттєво залежить від частоти коливань і небезпечними для конструкції можуть бути не тільки резонансні частоти.

РЕЗЮМЕ. В рамках уточненої моделі, учитывающей деформацию поперечного сдвига, а также инерционные компоненты, рассмотрена задача об установившихся колебаниях ортотропной пластины с отверстиями и абсолютно жесткими включениями. Включения имеют разные типы соединений с пластиной. Исследовано поступательное движение включений в нормальном к средней поверхности пластины направлении. Рассмотрены разные гармонические во времени крайевые условия как на внешней границе пластины, так и на контурах отверстий. На основе непрямого метода граничных элементов и секвенциального подхода к изображению функций Грина краевую задачу сведено к системе интегральных уравнений и соотношений, которую решено методом коллокаций. Приведены численные результаты для прямоугольной пластины с круглыми отверстием и включением.

Ключевые слова: *колебания, ортотропная пластина, отверстия, включения, непрямо́й метод граничных элементов.*

SUMMARY. In the framework of the refined theory, which takes into account transverse shear deformation and inertial components, the problem on the steady state vibrations of the orthotropic plate with holes and rigid inclusions is considered. Inclusions have different types of connections with the plate. The case of the translational motion of the inclusions along the normal direction to the middle surface of the plate is investigated. Different harmonic in time boundary conditions are considered both on the external boundary of the plate and on the contours of the cutouts. On the basis of the indirect boundary elements method and the sequential approach to representation of Green's functions the boundary value problem is reduced to the system of integral equations and integral relations and is solved by the collocation method. Numerical results for the rectangular plate with circular hole and circular inclusion are presented.

Keywords: *vibrations, orthotropic plate, holes, inclusions, indirect boundary elements method.*

1. *Paramasivam P.* Free vibration of square plates with square openings // *J. of Sound and Vibration.* – 1973. – **30**, № 2. – P. 173–178.
2. *Laura P. A., Romanelli E., and Rossi R. E.* Transverse vibrations of simply supported rectangular plates with rectangular cutouts // *J. of Sound and Vibration.* – 1997. – **202**, № 2. – P. 275–283.
3. *Nagaya K.* Transverse vibration of a rectangular plate with an eccentric circular inner boundary // *Int. J. Solids and Struct.* – 1980. – **16**, № 11. – P. 1007–1016.
4. *Hegarty R. F. and Ariman T.* Elasto-dynamic analysis of rectangular plates with circular holes // *Int. J. Solids and Struct.* – 1975. – **11**, № 7–8. – P. 895–906.
5. *Aksu G. and Ali R.* Determination of dynamic characteristics of rectangular plates with cutouts using a finite difference formulation // *J. of Sound and Vibration.* – 1976. – **44**, № 1. – P. 147–158.
6. *Laura P. A., Romanelli E., and Rossi R. E.* Transverse vibrations of simply supported rectangular plates with two rectangular cutouts // *J. of Sound and Vibration.* – 2003. – **267**, № 4. – P. 967–977.
7. *Rajamani A. and Prabhakaran R.* Dynamic response of composite plates with cut-outs, part I: Simply-supported plates // *J. of Sound and Vibration.* – 1977. – **54**, № 4. – P. 549–564.
8. *Rajamani A. and Prabhakaran R.* Dynamic response of composite plates with cut-outs, part II: Clamped-clamped plates // *J. of Sound and Vibration.* – 1977. – **54**, № 4. – P. 565–576.
9. *Ali R. and Atwal S. J.* Prediction of natural frequencies of vibration of rectangular plates with rectangular cutouts // *Computers and Struct.* – 1980. – **12**, № 6. – P. 819–823.
10. *Torabi K. and Azadi A. R.* Vibration analysis for rectangular plate having a circular central hole with point support by Rayleigh-Ritz method // *J. of Solid Mech.* – 2014. – **6**, № 1. – P. 28–42.
11. *Khurasia H. B. and Rawtani S.* Vibration analysis of circular plates with eccentric hole // *J. of Appl. Mech.* – 1978. – **45**, № 1. – P. 215–217.
12. *Lin W. H.* Free transverse vibrations of uniform circular plates and membranes with eccentric holes // *J. of Sound and Vibration.* – 1982. – **81**, № 3. – P. 425–433.

13. *Laura P. A. A., Masia U., and Avalos D. R.* Small amplitude, transverse vibrations of circular plates elastically restrained against rotation with an eccentric circular perforation with a free edge // *J. of Sound and Vibration*. – 2006. – **292**, № 3–5. – P. 1004–1010.
14. *Laura P. A. A. and Avalos D. R.* Small amplitude, transverse vibrations of circular plates with an eccentric rectangular perforation elastically restrained against rotation and translation on both edges // *J. of Sound and Vibration*. – 2008. – **312**, № 4–5. – P. 906–914.
15. *Cheng L., Li Y. Y., and Yam L. H.* Vibration analysis of annular-like plates // *J. of Sound and Vibration*. – 2003. – **262**, № 5. – P. 1153–1170.
16. *Бурак Я. Й., Рудавський Ю. К., Сухорольський М. А.* Аналітична механіка локально навантажених оболонок. – Львів: Інтеллект-Захід, 2007. – 240 с.
17. *Kurpa L. V., Mazur O. S., and Tkachenko V. V.* Parametric vibrations of multilayer plates of complex shape // *J. of Mathematical Sci.* – 2014. – **203**. – P. 165–184.
18. *Hota S. S. and Pahdi P.* Vibration of plates with arbitrary shapes of cutouts // *J. of Sound and Vibration*. – 2007. – **302**, № 4–5. – P. 1030–1036.
19. *Huang M. and Sakiyama T.* Free vibration of rectangular plates with variously-shaped holes // *J. of Sound and Vibration*. – 1999. – **226**, № 4. – P. 769–786.
20. *Шона Т. В.* Поперечні коливання ортотропної пластини з множиною отворів довільної конфігурації та мішаними крайовими умовами // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2018. – **54**, № 3. – С. 73–80.
(*Shopa T. V.* Transverse vibration of an orthotropic plate with a collection of holes of arbitrary configuration and mixed boundary conditions // *Materials Science*. – 2019. – **54**, № 3. – P. 368–377.)
21. *Шона Т.* До побудови розв'язку задачі про коливання ортотропної пластини з множиною отворів довільної форми та розташування // *Машинознавство*. – 2010. – № 8. – С. 21–25.
22. *Шона Т. В.* Поперечні коливання ортотропної пластини з множиною включень довільної конфігурації з різними типами з'єднань з матрицею // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2019. – **55**, № 1. – С. 89–97.
(*Shopa T. V.* Transverse vibrations of an orthotropic plate with a collection of inclusions of any configuration with different types of connections with the matrix // *Materials Science*. – 2019. – **55**, № 1. – P. 94–104.)
23. *Сухорольський М. А.* Функціональні послідовності та ряди. – Львів: Растр-7, 2010. – 346 с.
24. *Lighthill J.* Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions. – Cambridge: Cambridge University Press, 1958. – 80 p.

Одержано 19.04.2018