

УДК 539.3

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ОРТОТРОПНОЇ ПЛОЩИНИ З ДВОЛАНКОВОЮ ЛАМАНОЮ ТРІЩИНОЮ ЗА АНТИПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

М. П. САВРУК, Л. Й. ОНИШКО, О. І. КВАСНЮК, Н. М. БІДА

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Методом сингулярних інтегральних рівнянь отримано розв'язок антипоскої задачі механіки руйнування для ортотропної площини з дволанковою ламаною тріщиною з урахуванням особливості напружень у кутовій вершині тріщини. Для цього застосовано раніше розроблений єдиний підхід до розв'язування задач про концентрацію напружень в ізотропних тілах з гострими та закругленими вирізами.

Ключові слова: теорія пружності, ортотропія, коефіцієнт інтенсивності напружень, дволанкова ламана тріщина, антипоска деформація, метод сингулярних інтегральних рівнянь.

Вступ. Під час розв'язування сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) крайових задач анізотропного тіла теорії пружності для негладких криволінійних тріщин за врахування особливостей у кутових точках виникають математичні труднощі, які спонукають до використання наближених методів. Розроблений наближений єдиний підхід для двовимірних задач теорії пружності та механіки руйнування для ізотропних тіл з гострими та закругленими кутовими вирізами [1–4] нижче застосовано до розв'язування антипоскої задачі теорії пружності для ортотропного тіла. Розв'язок задачі про зсув на нескінченності ортотропного простору з вільною від навантажень дволанковою ламаною тріщиною знайшли граничним переходом з розв'язку задачі для відповідної згладженої тріщини, спрямувавши радіус закруглення у вершині зламу до нуля.

Формулювання задачі. Спочатку розглянемо ортотропну площину в декартовій системі координат xOy з ламаною тріщиною, згладженою у вершині зламу, контур якої складається з двох рівних прямолінійних відрізків, що утворюють між собою кут 2β , з'єднаних дугою кола радіусом ρ . Центр кола лежить на осі Ox у точці $x = l(\cos\beta - \epsilon)/\sin\beta$, де $\epsilon = \rho/l$ – відносний радіус кривини у закругленій кутовій вершині тріщини, $2l$ – повна довжина тріщини, $2a$ – відстань між вершинами тріщини. Вершини тріщини A, B розташовані на осі Oy симетрично відносно осі Ox (рис. 1).

На нескінченності тіло перебуває під дією зсуву напруженнями $\tau_{yz}^{\infty} = \tau$, а береги гладкої криволінійної тріщини вільні від зовнішніх зусиль:

$$\tau_{nz}^{*\pm}(t) = 0, \quad t \in L, \quad (1)$$

де $\tau_{nz}^{*}(t)$ – нормальна компонента вектора напружень на контурі тріщини.

Задачу розв'язуємо методом СІР [1–4]. Напружений стан у тілі описують співвідношення [5–7]

$$\tau_{xz}^{*}(x, y) = -\operatorname{Re}[\mu_3 \Phi_3^{*}(z_3)], \quad \tau_{yz}^{*}(x, y) = \operatorname{Re}[\Phi_3^{*}(z_3)].$$

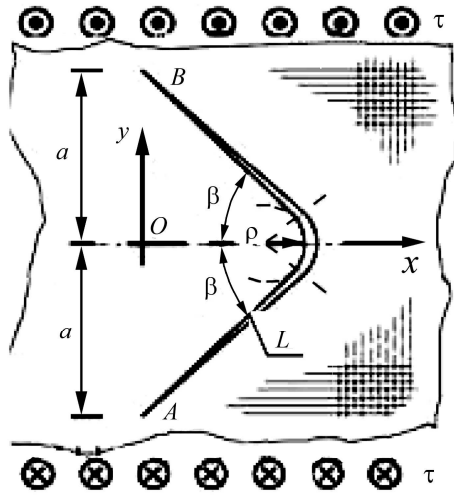


Рис. 1. Дволанкова тріщина, згладжена у вершині зламу.

Fig. 1. A two-sectional rounded V-shaped crack.

Тут $\Phi_3^*(z_3)$ – аналітична функція комплексної змінної $z_3 = x + \mu_3 y$, де μ_3 – комплекснозначний корінь характеристичного рівняння

$$a_{55}\mu^2 - 2a_{45}\mu + a_{44} = 0,$$

яке для ортотропного тіла має два спряжені уявні корені:

$$\mu_3 = i\gamma_3, \bar{\mu}_3 = -i\gamma_3.$$

Пружні сталі матеріалу a_{44}, a_{45}, a_{55} можна виразити через його технічні характеристики (модулі зсуву) G_{xz}, G_{yz} :

$$a_{44} = 1/G_{yz}, \quad a_{45} = 0, \quad a_{55} = 1/G_{xz},$$

$$\gamma_3 = \sqrt{G_{xz}/G_{yz}}. \quad (2)$$

Функцію $\Phi_3^*(z_3)$ шукатимемо у

вигляді суперпозиції [2]

$$\Phi_3^*(z_3) = \tau + \Phi_3(z_3), \quad (3)$$

де перший доданок описує однорідний напружений стан суцільного тіла, а другий – визначає збурений стан, викликаний тріщиною L .

Для цього використаємо крайову задачу для ортотропної площини з дволанковою тріщиною, згладженою у вершині зламу, на берегах якої виконуються умови [2]

$$\tau_{nz}^+ = \tau_{nz}^- = -\tau \operatorname{Re}[dt_3 / ds] = \tau(t), \quad t_3 \in L_3, \quad t \in L, \quad (4)$$

де верхні індекси позначають граничні значення нормальної компоненти напружень за підходу до контуру L зліва (+) або справа (-),

$$\tau(t) = \frac{\tau}{2} \operatorname{Re}[(1 + \gamma_3)dt / ds + (1 - \gamma_3)d\bar{t} / ds]. \quad (5)$$

Тут L_3 – контур у допоміжній площині комплексної змінної z_3 , що відповідає контуру тріщини L у площині z ($z = x + iy$); s – дугова абсциса точки $t \in L$.

Функцію $\Phi_3(z_3)$ шукаємо в інтегральній формі [5]:

$$\Phi_3(z_3) = \frac{1}{\pi} \int_{L_3} \frac{\phi_3'(t_3) dt_3}{t_3 - z_3}, \quad t_3 \in L_3, \quad (6)$$

де $\phi_3'(t_3)$ – невідома функція.

Задовольняючи за допомогою потенціалів (6) крайові умови (4), запишемо СІР крайової задачі

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_3} K(t_3, t_3') \phi_3'(t_3) dt_3 = \tau(t_3'), \quad t_3' \in L_3, \quad (7)$$

де ядро та права частина мають вигляд

$$K(t_3, t'_3) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{t_3 - t'_3} \frac{dt'_3}{ds'_3} \right], \quad \tau(t'_3) = \tau \operatorname{Re} \left[\frac{dt'_3}{ds'_3} \right]. \quad (8)$$

Тут s'_3 – дугова абсциса точки t'_3 .

Рівняння (7) має єдиний розв'язок за додаткової умови однозначності переміщень за обходу контуру L :

$$\int_{L_3} \phi'_3(t_3) dt_3 = 0. \quad (9)$$

Для його зведення до канонічного вигляду скористаємося параметричним рівнянням контуру тріщини L :

$$t = l\omega(\xi) = l \begin{cases} (\xi + \xi_0) \cos \beta + \varepsilon \sin \beta + i[(\xi + \xi_0) \sin \beta - \varepsilon \cos \beta], & -1 < \xi < -\xi_0, \\ \varepsilon \cos(\xi / \varepsilon) + i\varepsilon \sin(\xi / \varepsilon), & -\xi_0 \leq \xi \leq \xi_0, \\ -(\xi - \xi_0) \cos \beta + \varepsilon \sin \beta + i[(\xi - \xi_0) \sin \beta + \varepsilon \cos \beta], & \xi_0 < \xi < 1, \end{cases} \quad (10)$$

де $\xi_0 = 1 / (1 + \tilde{\theta})$ – значення параметра ξ , що відповідає точці переходу колової ділянки контуру тріщини в прямолінійну; $\tilde{\theta}$ – відношення довжини прямолінійних ділянок тріщини до довжини колової.

Параметричні рівняння контурів L_3 та L зв'язані співвідношенням [1]

$$t_3 = l\omega_3(\xi) = [(1 + \gamma_3)t + (1 - \gamma_3)\bar{t}] / 2, \quad t \in L, \quad (11)$$

де змінну t визначає рівність (10).

Інтегральне рівняння (7) та умова (9) у безрозмірній формі матимуть вигляд

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 M(\xi, \eta) \phi'_3(\xi) d\xi = \tau(\eta), & -1 \leq \eta \leq 1, \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \phi'_3(\xi) d\xi = 0, \end{cases} \quad (12)$$

де

$$\begin{aligned} M(\xi, \eta) &= l\tilde{K}(l\omega_3(\xi), l\omega_3(\eta)), \quad t'_3 = l\omega_3(\eta), \\ \phi'_3(\xi) &= \frac{1}{\tau} \phi'_3(l\omega_3(\xi)) \omega'_3(\xi), \quad \tau(\eta) = \frac{1}{\tau} \tau(l\omega_3(\eta)). \end{aligned}$$

Невідому густину $\phi'_3(\xi)$ шукаємо в класі функцій, що мають інтегровну особливість на кінцях інтервалу інтегрування:

$$\phi'_3(\xi) = u_3(\xi) / \sqrt{1 - \xi^2}. \quad (13)$$

Застосувавши до розв'язування СІР (7) квадратурний метод [2, 8], прийдемо до системи лінійних алгебричних рівнянь для визначення невідомої функції $u_3(\xi)$:

$$\begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_3(\xi_k) \operatorname{Re} \left\{ \omega'_3(\xi_k) / [\omega_3(\xi_k) - \omega_3(\eta_m)] \right\} = -\operatorname{Re} [\omega'_3(\eta_m)], \\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_3(\xi_k) = 0, \end{cases} \quad (14)$$

де

$$\xi_k = \cos(\pi(2k-1)/2n), k=1, \dots, n; \quad \eta_m = \cos(\pi m/n), m=1, \dots, n-1. \quad (15)$$

Дотичні напруження на контурі згладженої ламаної тріщини знайдемо зі співвідношення [2]

$$\tau_{sz}^* = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\tau + \Phi_3^-(t_3)}{2i} \left[(1 + \gamma_3) \frac{dt}{ds} - (1 - \gamma_3) \frac{d\bar{t}}{ds} \right] \right\}, \quad t \in L, \quad t_3 \in L_3, \quad (16)$$

де $dt/ds = \omega'(t)/|\omega'(t)|$.

Записавши граничне значення потенціалу $\Phi_3^-(t_3)$ за використання формул Сохоцького–Племеля [5]

$$\Phi_3^-(t_3') = -i\phi_3'(t_3') + \frac{1}{\pi} \int_{L_3} \frac{\phi_3'(t_3) dt_3}{t_3 - t_3'},$$

отримаємо співвідношення для знаходження напружень на контурі тріщини:

$$\tau_{sz}^*(\eta) = -\frac{\tau}{2} \operatorname{Re} \left\{ \left[i + \frac{u_3(\eta)}{\omega_3'(\eta)\sqrt{1-\eta^2}} - \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 \frac{u_3(\xi) d\xi}{\sqrt{1-\xi^2} (\omega_3(\xi) - \omega_3(\eta))} \right] \Gamma(\eta) \right\}, \quad (17)$$

де $\Gamma(\eta) = [(1 + \gamma_3)\omega'(\eta) - (1 - \gamma_3)\overline{\omega'(\eta)}] / |\omega'(\eta)|$.

Застосувавши квадратурну формулу [2] для зовнішніх вузлів η_m (15)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u_3(\xi) d\xi}{\sqrt{1-\xi^2} (\omega_3(\xi) - \omega_3(\eta_m))} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{u_3(\xi_k)}{\omega_3(\xi_k) - \omega_3(\eta_m)},$$

отримаємо дискретний аналог співвідношення (17) для визначення розподілу дотичних напружень на краю згладженої дволанкової тріщини:

$$\tau_{sz}^*(\eta_m) = -\frac{\tau}{2} \operatorname{Re} \left\{ \left[i + \frac{u_3(\eta_m)}{\omega_3'(\eta_m)\sqrt{1-\eta_m^2}} - \frac{1}{\pi i} \sum_{k=1}^n \frac{u_3(\xi_k)}{\omega_3(\xi_k) - \omega_3(\eta_m)} \right] \Gamma(\eta_m) \right\}. \quad (18)$$

Скориставшись формулою (18), можна знайти коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) \tilde{K}_{III}^V у гострій кутовій вершині ламаної тріщини за допомогою граничного переходу [2]

$$\tilde{K}_{III}^V = \left\{ \lim_{\rho \rightarrow 0^-} \left[(2\pi\rho)^{\lambda_{III}} \tau_{sz}^*(0) \right] \right\} / R_{III}(\beta), \quad (19)$$

де порядок особливості поля напружень у кутовій вершині $\lambda_{III} = (\delta - \pi)/\beta$ є найменшим додатним коренем характеристичного рівняння

$$\sin(\delta - \lambda\beta_1) = 0.$$

Тут $\cos \delta = b/\sqrt{b^2 + c^2}$, $b = \cos^2 \alpha - \gamma_3^2 \sin^2 \alpha$, $c = \gamma_3 \sin 2\alpha$, $\alpha = \pi - \beta$, $\beta_1 = 2\operatorname{arctg}(\gamma_3 \operatorname{tg} \alpha)$.

Величину $R_{III}(\beta)$ називають коефіцієнтом впливу закруглення кутового вирізу на напруження у його вершині (stress rounding factor) [1, 2], який залежить не тільки від кута розхилу 2β , а також від форми контуру та пружних сталих орто-тропного матеріалу [9, 10].

КІН у початковій (A) та кінцевій (B) вершинах ламаної тріщини отримаємо за формулами [8]

$$K_{III}(A) = \sqrt{\pi l} u_3(-1) / \sqrt{|\omega'_3(-1)|}, \quad K_{III}(B) = -\sqrt{\pi l} u_3(1) / \sqrt{|\omega'_3(1)|}, \quad (20)$$

де значення $u_3(\pm 1)$ знаходимо з розв'язку системи алгебричних рівнянь (14).

Числові результати. КІН у вершинах згладженої ламаної тріщини та дотичні напруження у закругленій кутовій вершині визначено для малих відносних радіусів кривини ϵ . Спрямувавши параметр ϵ до нуля, знайдемо КІН у гострій кутовій вершині ламаної тріщини. Розрахували безрозмірний КІН $F_{III}(A) = K_{III}(A) / \tau \sqrt{\pi l}$ (рис. 2a) у вершині A та в кутовій точці $F_{III}^V = \sqrt{2} \tilde{K}_{III}^V / \tau (2\pi l)^{\lambda_{III}}$ (рис. 2b) для різних кутів розхилу тріщини 2β . Обчислення виконали для кількох значень параметра ортотропії γ_3 ($\gamma_3 = 1$ – для ізотропного матеріалу) та склопластика 27-63С [11] (значення $\gamma_3 = 0,74$ відповідає тріщині, вершина зламу якої знаходиться на осі Ox , а $\gamma_3 = 1,34$, – коли вона розташована на осі Oy). Для кута $\beta = 0$ тріщина вироджується у горизонтальну прямолінійну довжиною l , причому відносні КІН F_{III}^V та $F_{III}(A)$ (рис. 2) не залежать від значень γ_3 . Коли ж кут $\beta = \pi/2$, отримаємо прямолінійну тріщину довжиною $2l$ без особливості у кутовій точці ($\lambda_{III} = 0$). У цьому випадку КІН набувають значень $F_{III}^V = \sqrt{2}$ та $F_{III}(A) = 0$. За допомогою методу конформного відображення знайшли аналітичну формулу розрахунку КІН для аналогічної задачі про ламану тріщину в ізотропному тілі [12–14]:

$$K_{III}(A) = (\tau/2) \sqrt{\pi l} (1 - 2\beta/\pi) (\beta/\pi)^{-\beta/\pi} (1 - \beta/\pi)^{\beta/\pi - 1}. \quad (21)$$

Відносне відхилення між числовими результатами, одержаними за формулами (20) (для ізотропного матеріалу) та (21), не перевищує 0,1% для всіх кутів β .

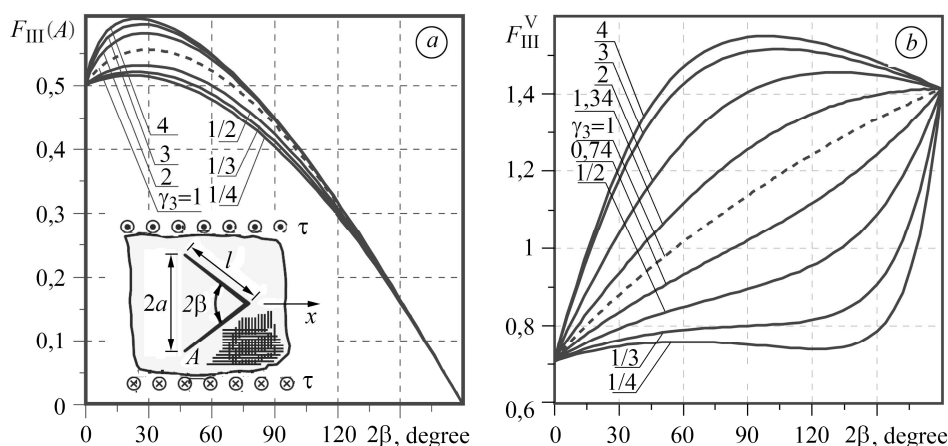


Рис. 2. Залежність відносних КІН $F_{III}(A)$ (a) і F_{III}^V (b) від кута розхилу ламаної тріщини 2β для матеріалів з різними значеннями параметра ортотропії γ_3 та ізотропного матеріалу (штрихова лінія).

Fig. 2. Dependence of dimensionless stress intensity factor (SIF) $F_{III}(A)$ (a) and F_{III}^V (b) at the tips of a V-shaped crack for materials with various values of parameter of orthotropy γ_3 and for isotropic material (dashed line).

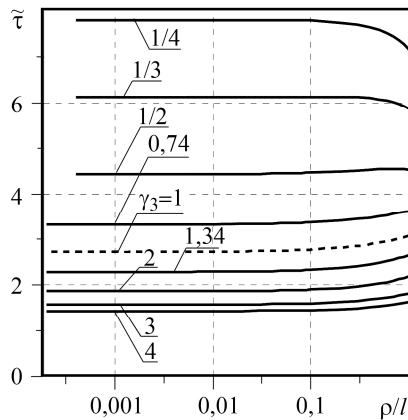


Рис. 3. Fig. 3.

Рис. 3. Залежність відносного напруження $\tilde{\tau} = \tau_{sz}^*(0)\epsilon^{\lambda_{III}} / \tau$ від величини $\epsilon = \rho/l$ в закругленій вершині ламаної тріщини для різних значень параметра ортотропії γ_3 ($2\beta = \pi/3$).

Fig. 3. Dependence of dimensionless stress $\tilde{\tau} = \tau_{sz}^*(0)\epsilon^{\lambda_{III}} / \tau$ on the relative curvature radius $\epsilon = \rho/l$ at a rounded vertex of a V-shaped crack for various values of parameter of orthotropy γ_3 ($2\beta = \pi/3$).

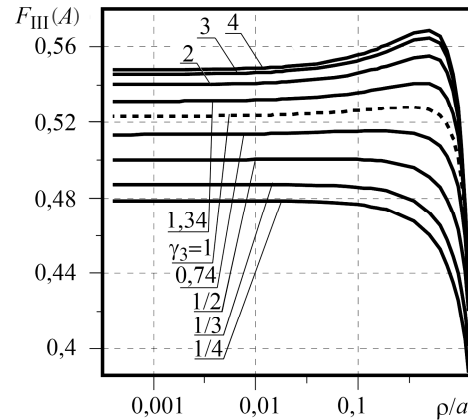


Рис. 4. Fig. 4.

Рис. 4. Залежність відносного КІН $F_{III}(A)$ у вершині A ламаної тріщини від відносного радіуса закруглення ρ/a у кутовій точці для різних значень параметра ортотропії γ_3 ($2\beta = \pi/3$).

Fig. 4. Dependence of relative SIF $F_{III}(A)$ at the tip A of a V-shaped crack on the relative rounding radius ρ/a at an angular point for various values of parameter of orthotropy γ_3 ($2\beta = \pi/3$).

Коли параметр ϵ наближається до нуля, відносні напруження $\tilde{\tau}$ (рис. 3) прямують до асимптотичних значень, що відповідають ламаній тріщині. Зі співвідношення (19) знаходимо КІН у гострій кутовій вершині ламаної тріщини. Виявили (рис. 4), що для $\rho/a < 0,01$ криві виходять на сталі значення, а отже, можна вважати, що відносні КІН $F_{III}(A)$ у вершині A дволанкової ламаної тріщини не залежать від малих відносних радіусів закруглення.

ВИСНОВКИ

На основі залежності між коефіцієнтами інтенсивності та концентрації напружень у гострій та закругленій вершинах напівнескінченного кутового вирізу в ортотропній площині граничним переходом отримано коефіцієнти інтенсивності напружень у кутовій вершині дволанкової ламаної тріщини за антиплоскої деформації. Досліджено вплив кута розхилу ламаної тріщини, ортотропії матеріалу, радіуса закруглення кутової вершини тріщини та її орієнтації відносно головних осей ортотропії на відносні КІН у кінцевих та кутовій вершинах тріщини. Виявлено, що на КІН суттєво впливає не тільки кут розхилу ламаної тріщини 2β та параметр ортотропії матеріалу γ_3 , але й орієнтація тріщини вздовж осей ортотропії з більшим ($\gamma_3 > 1$) або меншим ($\gamma_3 < 1$) модулями зсуву.

РЕЗЮМЕ. Методом сингулярных интегральных уравнений получено решение антиплоской задачи механики разрушения для ортотропной плоскости с двухзвенной ламаной трещиной с учетом особенности напряжений в угловой ее вершине. Для этого использован разработанный ранее единый подход к решению задач о концентрации напряжений в изотропных телах с острыми и закругленными вырезами.

Ключевые слова: теория упругости, ортотропия, коэффициент интенсивности напряжений, двухзвенная ломаная трещина, антиплоская деформация, метод сингулярных интегральных уравнений.

SUMMARY. Solution of the antiplane problem of fracture mechanics for orthotropic plane with a two-sectional kinked crack with account of the stress peculiarities at the angular crack tip was obtained by the singular integral equation method. The previously developed unified approach to solving the problems about stress concentration in isotropic bodies with sharp or rounded V-shaped notches was used for this purpose.

Keywords: elasticity theory, orthotropy, stress intensity factor, two-sectional kinked crack, antiplanar deformation, singular integral equation method.

1. Саврук М. П., Казберук А. Концентрація напружень у твердих тілах з вирізами // Механіка руйнування та міцність матеріалів: Довідн. посіб. / За заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: Сполом, 2012. – Т. 14. – 384 с.
2. Savruk M. P. and Kazberuk A. Stress Concentration at Notches. – Cham: Springer, 2017. – 516 p.
3. Саврук М. П., Казберук А., Тарасюк Г. Розподіл напружень на контурі кутового закругленого вирізу за антиплоскої деформації // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – 47, № 6. – С. 7–14.
(Savruk M. P., Kazberuk A., and Tarasiuk G. Distribution of stresses over the contour of a rounded V-shaped notch under antiplane deformation // Materials Science. – 2012. – 47, № 6. – P. 7–14.)
4. Казберук А., Саврук М. П. Розподіл напружень біля кутових вирізів в ортотропній площині за симетричного навантаження // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2016. – 52, № 1. – С. 61–68.
(Kazberuk A. and Savruk M. P. Distribution of stresses near v-notches in an orthotropic plane under symmetric loads // Materials Science. – 2016. – 52, № 1. – P. 62–71.)
5. Лехницький С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
6. Ting T. C. T. Anisotropic Elasticity. Theory and Applications. – Oxford: Oxford University Press, 1996. – 588 p.
7. Саврук М. П., Казберук А., Онишко Л. Й. Вплив анізотропії матеріалу на розподіл напружень біля параболічного вирізу // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2015. – 51, № 6. – С. 24–33.
(Savruk M. P., Kazberuk A., and Onyshko L. I. Influence of the anisotropy of materials on the distribution of stresses near parabolic notches // Materials Science. – 2016. – 51, № 6. – P. 773–784.)
8. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К: Наук. думка, 1981. – 324 с.
9. Саврук М. П., Онишко Л. Й., Квашнюк О. І. Розподіл напружень біля кутових вирізів в ортотропній пружній площині за антиплоскої деформації // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2019. – 55, № 3. – С. 7–16.
(Savruk M. P., Onyshko L. Y., and Kvasnyuk O. I. Distribution of stresses near angular notches on an orthotropic elastic plane under conditions of antiplane deformation // Materials Science. – 2019. – 55, № 3. – P. 299–310.)
10. Kazberuk A., Savruk M. P., and Seweryn A. Stress intensity factors at corner points of chevron crack in orthotropic plate // Proc. of VIIIth Int. Symposium on Mechanics of Materials and Structures. – Bialystok, 2015. – P. 84–84.
11. Серенсен С. В., Зайцев Г. П. Несущая способность тонкостенных конструкций из армированных пластиков с дефектами. – К.: Наук. думка, 1982. – 296 с.
12. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами // Механика разрушения и прочность материалов / Справ. пос. под ред. В. В. Панасюка. – К: Наук. думка, 1988. – 620 с.
13. Smith E. Crack bifurcation in brittle solids // J. Mech. and Phys. Solids. – 1968. – 16, № 5. – P. 329–336.
14. Smith E. The extension of two parallel non-coplanar cracks by an applied stress // Int. J. Eng. Sci. – 1971. – 9, № 7. – P. 631–638.

Одержано 20.06.2019