

УДК 539.3

ВПЛИВ ЧАСТКОВОГО ЗАПОВНЕННЯ ПРОСВІТІВ СТИСЛИВОЮ РІДИНОЮ НА КОНТАКТ ПРУЖНИХ ТІЛ ІЗ ХВИЛЯСТИМ РЕЛЬЄФОМ

О. П. КОЗАЧОК

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Досліджено контакт двох пружних півплощин (плоска деформація), одна з яких має хвилясту поверхню, за часткового заповнення стисливою рідиною міжповерхневих просвітів. Сформульовану контактну задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння відносно похідної від висоти міжповерхневих просвітів і отримано його аналітичний розв'язок. Проаналізовано контактну поведінку такої системи тіл для двох різних рівнів навантаження: на першому, коли об'єм просвіту більший, ніж рідини, яка не створює тиску на поверхні тіл, і другому, коли навантаження перевищує порогове, за якого рідина заповнює весь просвіт і чинить опір його закриттю.

Ключові слова: *контактна взаємодія, хвилястий рельєф, міжповерхневі просвіти, стислива рідина, контактна податливість тіл.*

Вступ. Текстурування поверхонь [1–3], яке полягає у формуванні на них регулярного рельєфу, використовують, щоб поліпшити функціональні характеристики двокомпонентних з'єднань. Під час контакту між тілами з такими поверхнями виникають періодично розташовані просвіти, які в реальних умовах експлуатації часто заповнюються рідиною чи газом, що тиснуть на спряжені поверхні. Окрім того, рідина, проникаючи під тиском у поверхневі дефекти і тріщини, може зумовити їх поширення [4]. Тому для прогнозування контактної поведінки і міцності тіл з регулярним рельєфом у газорідних середовищах важливо дослідити їх напружено-деформований стан з урахуванням тиску заповнювача просвітів між ними. Огляд публікацій про взаємодію тіл з періодичним рельєфом за відсутності заповнювача просвітів між ними здійснено у працях [5, 6]. Розв'язано [7–18] контактні задачі для тіл з періодично розташованими гладкими поверхневими виїмками чи тіл, поверхня одного з яких хвиляста, з урахуванням повного заповнення міжповерхневих просвітів реальним газом або стисливою чи нестисливою рідиною, яка змочує або не змочує поверхні тіл. Досліджено [19, 20] контакт пружного тіла і текстурованої виїмками жорсткої основи за наявності газорідного заповнювача міжповерхневих просвітів. Вивчено [21] усталений рух штампа з подвійно-періодичним синусоїдальним рельєфом в'язкопружним шаром, який описано моделлю Вінклера, за наявності нестисливої рідини в просвітах між ними. Взаємодію ж двох пружних тіл, поверхня одного з яких хвиляста, за часткового заповнення стисливою рідиною просвітів раніше не досліджували.

Формулювання задачі. Проаналізуємо безфрикційну контактну взаємодію двох пружних півнескінчених тіл D_1 і D_2 із різних матеріалів за умов плоскої деформації. Межа одного з тіл плоска, а іншого – хвиляста вздовж одного напрямку x (рис. 1) і задана періодичною функцією

$$r(x) = -A \cos^2(\pi x/d), \quad x \in [-\infty; \infty]. \quad (1)$$

Амплітуда хвилястої межі A значно менша за період d ($A \ll d$).

Тіла контактують під дією однорідних стискальних напружень p^∞ , заданих на нескінченності. Внаслідок нерівності межі одного з тіл їх контакт неповний і між ними виникають міжповерхневі просвіти змінної висоти $h(x)$ та ширини $2a$, залежної від навантаження. Вважаємо, що вони частково заповнені стисливою рідиною (рис. 2а). Об'єм рідини V_{l0} , що припадає на одиницю довжини просвіту в поздовжньому напрямку, перпендикулярному до площини на рис. 2, і об'єм однієї виїмки в початковому стані за відсутності тиску V_0 зв'язані між собою залежністю

$$V_{l0} = \mu V_0, \quad (2)$$

де μ – коефіцієнт об'ємного заповнення виїмки рідиною ($0 < \mu < 1$).

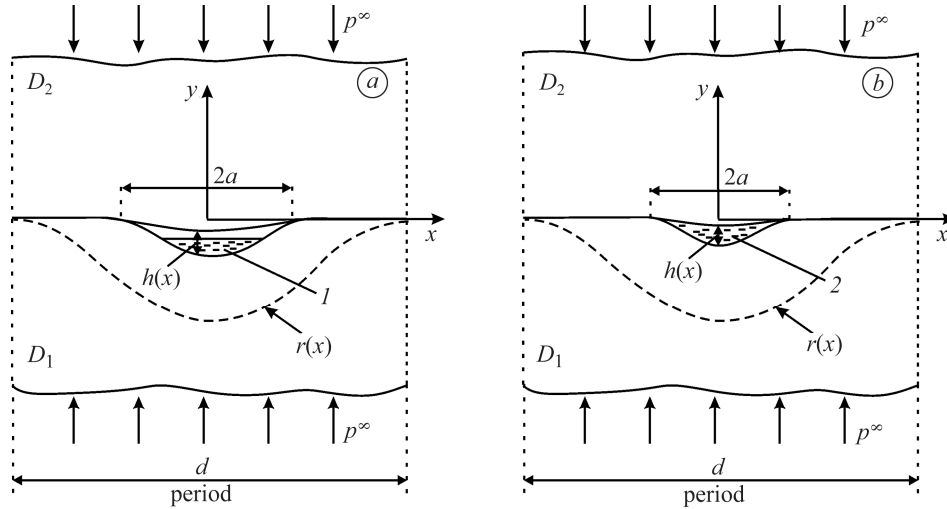


Рис. 2. Контакт тіл на одному періоді $[-d/2, d/2]$ за навантаження $p^\infty < p_{cr}^\infty$ (а) та $p^\infty \geq p_{cr}^\infty$ (б): 1, 2 – рідина.

Fig. 2. Contact between solids within one period $[-d/2, d/2]$ for the load $p^\infty < p_{cr}^\infty$ (a) and $p^\infty \geq p_{cr}^\infty$ (b): 1, 2 – liquid.

Контактна поведінка такої системи тіл суттєво відрізняється для двох рівнів навантаження. Для $p^\infty < p_{cr}^\infty$ об'єм просвіту V_0 більший, ніж рідини V_{l0} (рис. 2а), яка не чинить опору зближенню поверхонь просвітів та їх закриттю. Тоді тиск у рідині не виникає ($p = 0$) і поверхні просвітів вільні від напружень. Тут p_{cr}^∞ – пороговий рівень навантаження, за якого $V_0 = V_{l0}$. Для $p^\infty > p_{cr}^\infty$ об'єм просвіту V_0 дорівнює початковому об'єму рідини V_{l0} (рис. 2б), в якій виникає тиск p , що чинить опір зближенню поверхонь просвітів та їх закриттю. Об'єм рідини V_l , що

перебуває під тиском p , і початковий (за відсутності тиску в ній) пов'язані рівнянням стану стисливої рідини:

$$V_l = V_{l0} \exp(-p/B), \quad (3)$$

де B – модуль об'ємної пружності рідини.

Через мале відхилення хвилястої межі нижнього тіла від площини умови контакту тіл, як це прийнято в теорії контактних задач [13], знесемо на плоску поверхню. Тому контактні-крайові умови задачі запишемо так:

– уздовж просівів $|x - kd| < a$, ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$\tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = 0, \quad \sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^- = \begin{cases} 0, & p^\infty < p_{cr}^\infty; \\ -p, & p^\infty \geq p_{cr}^\infty; \end{cases} \quad (4)$$

– на ділянках контакту $a \leq |x - kd| \leq d/2$, ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$$\tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = 0, \quad \sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^-, \quad \frac{d}{dx}(v^- - v^+) = \frac{d}{dx}r(x), \quad (5)$$

– на нескінченності

$$\sigma_{yy} = -p^\infty, \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (6)$$

Тут і далі σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} – компоненти тензора напружень; v – складова вектора переміщення уздовж осі Oy ; індексами “+” і “-” позначено граничні значення функції за прямування точки до осі Ox у верхній і нижній півплощинах ($y \rightarrow \pm 0$).

Розв'язання задачі. Використовуючи метод функцій міжконтактних просівів [10], розв'язок сформульованої задачі подамо через форму хвилястої межі $r(x)$ і заздалегідь невідому висоту просівів $h(x)$ та, задовольнивши всі контактні-крайові умови (4)–(6), отримаємо сингулярне інтегральне рівняння (СІР) з ядром Коші відносно похідної висоти просівів:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\tilde{h}'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = \frac{K(p^\infty - p)}{2(1 + \xi^2)} - \frac{A\pi(\xi^2 - 1)}{d(1 + \xi^2)^2}, \quad \xi \in [-\alpha, \alpha], \quad (7)$$

де $K = \sum_{n=1}^2 4(1 - \nu_n^2)/E_n$; E_n , ν_n – відповідно модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона

матеріалу півплощини D_n , $n = 1, 2$; $\xi = \operatorname{tg} \pi x/d$, $\alpha = \operatorname{tg} \pi a/d$.

Функція $h(\xi)$ задовольняє умови плавного змикання берегів просівів:

$$h(\pm\alpha) = 0, \quad h'(\pm\alpha) = 0. \quad (8)$$

Враховуючи другу умову (8), шукатимемо обмежений на кінцях відрізка інтегрування розв'язок рівняння (7)

$$\tilde{h}'(\xi) = \frac{h'(\xi)}{d} = -\frac{2A}{d\sqrt{\alpha^2 + 1}} \frac{\xi\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{(1 + \xi^2)^2} - \frac{1}{\pi\sqrt{\alpha^2 + 1}} \left(-\frac{A\pi}{d(\alpha^2 + 1)} - \frac{K(p^\infty - p)}{2} \right) \frac{\xi\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{(1 + \xi^2)}, \quad (9)$$

який існує за накладання додаткової умови на його праву частину [22], з якої одержимо співвідношення

$$K(p^\infty - p) - 2A\pi \left[d(\alpha^2 + 1) \right] = 0. \quad (10)$$

Для навантаження $p^\infty < p_{cr}^\infty$, коли рідина не опирається закриттю просвітів ($p = 0$), інтегруючи функцію (9) з урахуванням першої з умов (8) та співвідношення (10), знаходимо їх висоту:

$$\tilde{h}(\xi) = \frac{h(\xi)}{d} = \frac{A}{d\sqrt{\alpha^2 + 1}} \frac{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{1 + \xi^2} + \frac{A}{d\alpha^2 + 1} \operatorname{arcth} \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \right). \quad (11)$$

З умови (2), використавши вираз (11), отримуємо рівняння для визначення порогової півширини просвітів α_{cr}

$$\frac{\alpha_{cr}^2 - \ln(\alpha_{cr}^2 + 1)}{\alpha_{cr}^2 + 1} - \mu = 0,$$

з якого знаходимо порогове навантаження

$$p_{cr}^\infty = 2\pi A / (1 + \alpha_{cr}^2) / dK.$$

За навантаження $p^\infty \geq p_{cr}^\infty$, визначивши з виразу (10) тиск рідини і підставивши його у формулу (3), дістанемо рівняння для обчислення півширини просвітів α :

$$p^\infty - \frac{2\pi A}{Kd(1 + \alpha^2)} - B \ln \left(\mu \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2 - \ln(\alpha^2 + 1)} \right) = 0.$$

Тиск рідини знаходимо з рівняння (10):

$$p = p^\infty - 2A\pi / [dK(\alpha^2 + 1)].$$

Для інженерних розрахунків контактної взаємодії тіл з регулярним рельєфом важливу роль відіграють такі параметри, як контактні зближення Δv^∞ та податливість k^* контактуючих тіл [10], які виразимо через висоту міжповерхневих просвітів та похідну контактного зближення за зовнішнім навантаженням:

$$\Delta v^\infty = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} (-r(x) - h(x)) dx = A [1 + \ln(\alpha^2 + 1)] / (2\alpha^2 + 2); \quad k^* = \frac{d(\Delta v^\infty)}{d(p^\infty)}.$$

Числові результати. Розраховували для безрозмірних величин: координати $\tilde{x} = x/d$; висоти міжконтактного просвіту $\tilde{h}(\tilde{x}) = h(x)/d$; півширини просвіту $\tilde{a} = a/d$; модуля об'ємної пружності рідини $\tilde{B} = KB$; тиску на нескінченності $\tilde{p}^\infty = Kp^\infty$; тиску рідини $\tilde{p} = Kp$; амплітуди хвилястої межі $\tilde{A} = A/d$; контактного тиску поверхонь тіл $\tilde{P}(\tilde{x})$; контактного зближення тіл $\Delta \tilde{v}^\infty = \Delta v^\infty / d$; контактної податливості тіл $\tilde{k}^* = d(\Delta \tilde{v}^\infty) / d\tilde{p}^\infty$. Числово аналізували для $\tilde{A} = 0,001$ та $\tilde{B} = 0,01$.

За збільшення зовнішнього навантаження ширина просвітів a зменшується (рис. 3а), причому за незначного навантаження ($\tilde{p}^\infty < \tilde{p}_{cr}^\infty$) геометричні розміри просвітів швидко зменшуються за близьким до лінійного законом до моменту, коли їх об'єм стане рівним об'єму рідини. Для великих навантажень ($\tilde{p}^\infty \geq \tilde{p}_{cr}^\infty$) геометричні характеристики спадають значно повільніше: що більший коефіцієнт об'ємного заповнення виїмки рідиною, то ширші просвіти.

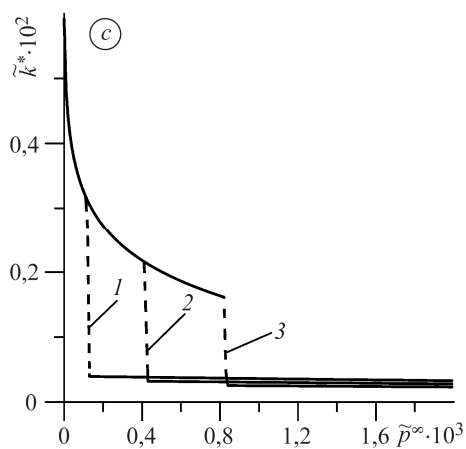
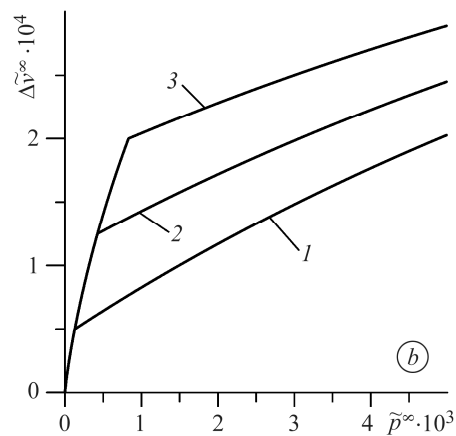
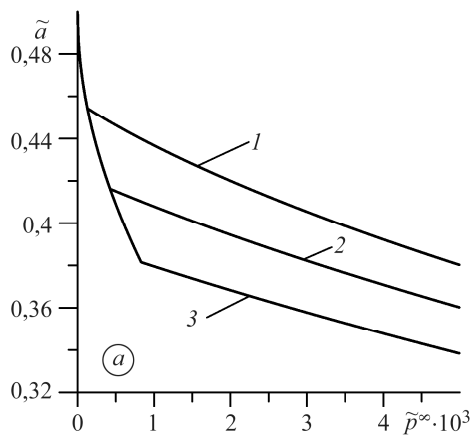


Рис. 3. Залежність відносних півширини просвітів \tilde{a} (a) і контактної податливості \tilde{k}^* (c) тіл від навантаження \tilde{p}^∞ за різних коефіцієнтів об'ємного заповнення виїмки рідиною: 1 – $\mu = 0,9$; 2 – $0,75$; 3 – $0,6$.

Fig. 3. Dependence of the gaps half-width \tilde{a} (a), average normal displacement $\Delta \tilde{v}^\infty$ (b) and contact compliance \tilde{k}^* (c) of the bodies on load \tilde{p}^∞ for different the coefficient of volumetric filling of the recess with liquid: 1 – $\mu = 0.9$; 2 – 0.75 ; 3 – 0.6 .

Контактне зближення $\Delta \tilde{v}^\infty$ збільшується із підвищенням зовнішнього навантаження (рис. 3b): за малих значень воно швидко зростає, а за великих – його ріст сповільнюється. Що більший коефіцієнт об'ємного заповнення виїмки рідиною, то менше контактне зближення тіл.

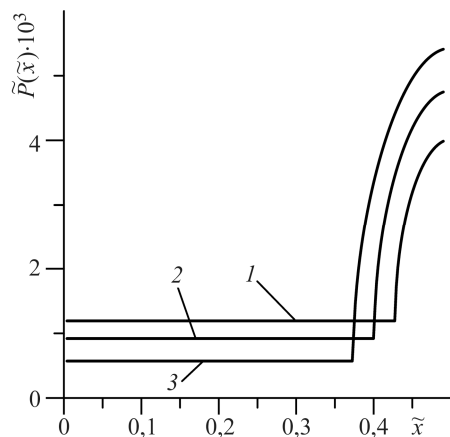


Рис. 4. Контактний тиск поверхонь тіл $\tilde{P}(\tilde{x})$ за зовнішнього навантаження $\tilde{p}^\infty = 0,0015$ та різних коефіцієнтів об'ємного заповнення виїмки рідиною: 1 – $\mu = 0,9$; 2 – $0,75$; 3 – $0,6$.

Fig. 4. Contact pressure of the bodies surfaces $\tilde{P}(\tilde{x})$ for the external load $\tilde{p}^\infty = 0.0015$ and different coefficients of volumetric filling of the recess with liquid: 1 – $\mu = 0.9$; 2 – 0.75 ; 3 – 0.6 .

З підвищенням зовнішнього тиску контактна податливість тіл \tilde{k}^* монотонно знижується (рис. 3c). За початкового навантаження вона спадає нелінійно, перед другим рівнем стрибкоподібно, коли $\tilde{p}^\infty = \tilde{p}_{cr}^\infty$, а на другому рівні залежність контактної податливості тіл від значень \tilde{p}^∞ на графіку описує практично горизонтальна лінія.

Горизонтальні ділянки на рис. 4 відповідають тиску рідини в просвіті. З віддаленням від нього він різко зростає, набуваючи максимуму в точках $\tilde{x} = \pm 0,5$, де висота виступів хвилястої межі максимальна. Що менше рідини в початковий момент контакту тіл, то більший перепад між тиском рідини та тиском в точці, в якій висота виступів хвилястої межі максимальна.

ВИСНОВКИ

Досліджено контакт двох пружних ізотропних півплощин (плоска деформація), поверхня одного з яких плоска, а іншого – хвиляста. Внаслідок нерівності однієї межі контакт тіл неповний і між ними виникають просвіти, що частково заповнені стисливою рідиною. Сформульовану контактну задачу зведено до системи рівнянь: СІР з ядром Коші відносно похідної від висоти міжконтактних просвітів та двох трансцендентних рівнянь для визначення ширини просвітів і тиску рідини. Розв'язок СІР побудовано в замкнутому вигляді й проаналізовано контактну поведінку пружних тіл, трансформацію просвітів між ними за збільшення прикладеного навантаження. З'ясовано, що ця поведінка якісно відрізняється для двох рівнів навантаження. Допоки об'єм кожного із просвітів залишатиметься більшим за початковий об'єм рідини, їх висота та ширина різко зменшуються з ростом навантаження. Це зменшення значно сповільнюється після того, як навантаження перевищить порогове значення, за якого об'єм просвіту стає рівним об'єму рідини. Встановлено, що менше рідини в початковий момент контакту тіл, то більший перепад між тиском рідини та тиском у точці, де досягається максимальна висота виступів хвилястої межі.

РЕЗЮМЕ. Исследован контакт двух упругих полуплоскостей (плоская деформация), одно из которых имеет волнистую поверхность, при частичном заполнении сжимаемой жидкостью межповерхностных зазоров. Сформулированная контактная задача сведена к сингулярному интегральному уравнению относительно производной от высоты межповерхностных зазоров, которое решено аналитически. Проанализировано контактное поведение такой системы для двух различных уровней нагрузки: на первом, когда объем зазоров больше, чем жидкости, которая не создает давления на поверхности тел, и втором, когда нагрузка превышает пороговое значение, при котором жидкость заполняет весь зазор и сопротивляется его закрытию.

Ключевые слова: *контактное взаимодействие, волнистый рельеф, межповерхностные зазоры, сжимаемая жидкость, контактная податливость тел.*

SUMMARY. The contact of two elastic half-planes (plane deformation), one of which has a wavy surface, with partial filling of the compressible liquid of the interface gaps, is investigated. The formulated contact problem is reduced to a singular integral equation relative to the height of the interfacial gaps, which is obtained analytically. The contact behavior of such a system is analyzed for two different levels of loading: the first, when the volume of the gap is greater than the volume of liquid, that does not create pressure on the bodies surface, and the second, when the load exceeds the threshold value, at which the liquid completely fills the gap and is resistant to its closure.

Keywords: *contact interaction, wavy interface, interface gaps, compressible liquid, contact compliance of bodies.*

1. *Etsion I.* State of the art in laser surface texturing // ASME J. Tribol. – 2005. – **127**, № 1. – P. 248–253.
2. *Stepien P.* Deterministic and stochastic components of regular surface texture generated by a special grinding process // Wear. – 2011. – **271**, № 3–4. – P. 514–518.
3. *Schreck S. and Zum Gahr K.-H.* Laser-assisted structuring of ceramic and steel surfaces for improving tribological properties // Appl. Surface Sci. – 2005. – **247**, № 1–4. – P. 616–622.
4. *Datsyshyn O. P. and Panasyuk V. V.* Pitting of the rolling bodies contact surface // Wear. – 2001. – **251**, № 1–2. – P. 1347–1355.
5. *Block J. M. and Keer L. M.* Periodic contact problems in plane elasticity // J. Mech. Mater. Struct. – 2008. – **3**, № 7. – P. 1207–1237.

6. *Goryacheva I. G. and Martynyak R. M.* Contact problems for textured surfaces involving frictional effects // Proc. Inst. Mech. Eng., Part J: J. Eng. Tribol. – 2014. – **228**, № 7. – P. 707–716.
7. *Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.* Взаимодействие упругих тел с периодическим рельефом при наличии жидкостных мостиков в межконтактных зазорах // Теорет. и прикл. механика. – 2013. – Вып. 7 (53). – С. 45–52.
8. *Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.* Взаємодія двох пружних тіл за наявності між ними періодично розташованих зазорів, заповнених реальним газом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58**, № 1. – С. 103–111.
(*Kozachok O. P., Slobodian B. S., Martynyak R. M.* Interaction of two elastic bodies in the presence of periodically located gaps filled with a real gas // J. Math. Sci. – 2017. – **222**, № 2. – P. 131–142.)
9. *Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.* Контакт пружних тіл за наявності газу та незмочувальної рідини у періодичних міжповерхневих просвітах // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2015. – № 6. – С. 50–57.
(*Kozachok O. P., Slobodian B. S., Martynyak R. M.* Contact of elastic bodies in the presence of gas and incompressible liquid in periodic interface gaps // Materials Science. – 2016. – **51**, № 6. – P. 804–813.)
10. *Козачок О. П., Мартиняк Р. М., Слободян Б. С.* Взаємодія тіл з регулярним рельєфом за наявності міжконтактного середовища. – Львів: Растр-7, 2018. – 200 с.
11. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1949. – 270 с.
12. *Козачок О. П.* Контактна взаємодія тіл з хвилястим рельєфом з урахуванням стисливої міжконтактної рідини // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2017. – Вип. 26. – С. 45–54.
13. *Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.* Вплив міжповерхневих рідинних містків на контакту взаємодію тіл з хвилястим рельєфом // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2016. – Вип. 24. – С. 34–46.
14. *Kozachok O. P. and Martynyak R. M.* Contact problem for wavy surfaces in the presence of an incompressible liquid and a gas in interface gaps // Mathematics and Mech. of Solids. – 2019. – **24**, № 11. – P. 3381–3393.
15. *Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.* Контакт двох пружних тіл із хвилястим рельєфом за наявності газу у просвітах // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2018. – **54**, № 2. – С. 57–63.
(*Kozachok O. P., Slobodian B. S., Martynyak R. M.* Contact of two elastic bodies with wavy topography in the presence of gases in gaps // Materials Science. – 2018. – **54**, № 2. – P. 194–201.)
16. *Кузнецов Е. А.* О контакте шероховатых тел при наличии сжимаемой смазки // Прикл. механика. – 1988. – **24**, № 12. – С. 85–94.
17. *Carbone G. and Mangialardi L.* Adhesion and friction of an elastic half-space in contact with a slightly wavy rigid surface // J. Mech. Physics of Solids – 2004. – **52**, № 6. – P. 1267–1287.
18. *Xu Y., Rostami A., and Jackson R. L.* Elastic contact between a geometrically anisotropic bisinusoidal surface and a rigid base // J. Tribology. – 2015. – **137**, № 2. – 021402 (8 p.).
19. *Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.* Контакт пружного тіла і жорсткої основи з періодичною системою квазіеліптичних виїмок, частково заповнених рідиною, яка змочує поверхні тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60**, № 1. – С. 132–140.
(*Kozachok O. P., Slobodian B. S., Martynyak R. M.* Contact between an elastic body and a rigid base with periodic array of quasielliptic grooves partially filled with liquid wetting the surfaces of the bodies // J. Math. Sci. – 2019. – **240**, № 2. – P. 162–172.)
20. *Козачок О. П.* Вплив стисливої міжконтактної рідини на взаємодію пружного тіла і текстурованої прямокутними виїмками жорсткої основи // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2018. – **54**, № 3. – С. 62–67.
(*Kozachok O. P.* Influence of compressible intercontact liquid on the interaction of an elastic body with a rigid base textured by rectangular grooves // Mater. Sci. – 2018. – **54**, № 3. – P. 354–360.)
21. *Горячова И. Г., Шпенёв А. Г.* Моделирование скольжения штампа с регулярным рельефом подошвы по вязкоупругому основанию при наличии жидкой смазки // Прикл. механика и математика. – 2012. – **76**, вып. 5. – С. 754–763.
22. *Мухелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 514 с.

Одержано 19.08.2019