

УДК 539.3

ДИНАМІЧНІ НАПРУЖЕННЯ В ПРУЖНІЙ МАТРИЦІ З ОДНОПЕРІОДИЧНИМ МАСИВОМ ПОДАТЛИВИХ ДИСКОВИХ ВКЛЮЧЕНЬ

І. Я. ЖБАДИНСЬКИЙ, І. О. БУТРАК

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Розглянуто симетричну задачу гармонічного хвильового навантаження безмежної пружної матриці з однопериодичним масивом дискових податливих включень. За допомогою періодичної функції Гріна її зведено до граничного інтегрального рівняння для функції, яка характеризує стрибок переміщень на одному репрезентативному включенні. Функцію Гріна, що описує взаємодію включень, адаптовано до ефективного обчислення її подання у формі експонентно-збіжних інтегралів Фур'є. Для розв'язування граничного інтегрального рівняння використано метод колокації. Отримано та проаналізовано числові результати для коефіцієнта інтенсивності динамічних напружень відриву в околі точок контуру включення залежно від хвильового числа та відстані між включеннями.

Ключові слова: *тривимірна пружна матриця, дискове включення, гармонічна хвиля, метод граничних інтегральних рівнянь, періодична функція Гріна, коефіцієнт інтенсивності динамічних напружень.*

Вступ. Для теоретичного аналізу поширення пружних хвиль у тілах з множинними тонкостінними або дисковими включеннями доцільно розглядати спрощені моделі пружних середовищ з періодичними дефектами [1]. Такі дослідження мають практичну цінність для опису властивостей фононних кристалів [2, 3] та нанокмпозитних структур [4]. Методом граничних інтегральних рівнянь (ГІР) [5, 6] проаналізовано задачі розсіяння пружних хвиль на множинних тріщинах, вивчено поведінку скінченної кількості тріщин та включень різної форми в полі гармонічних хвиль. Нижче методом ГІР вивчено взаємодію в однопериодичному масиві дискових включень малої жорсткості за падіння на них плоскої поздовжньої хвилі.

Постава задачі. Розглянемо безмежну пружну матрицю, в якій розміщено безмежний однопериодичний масив дискових включень однакового радіуса a та товщини h , що займають області S_n ($n \in \mathbb{Z}$) у площині $x_3 = 0$. Центри включень розташовані на паралельних до осі Ox_1 прямих з періодичною відстанню d (рис. 1). Механічні характеристики матриці визначають густина ρ , модуль зсуву G та коефіцієнт Пуассона ν , а включень – параметри ρ_0 , G_0 , ν_0 відповідно. Перпендикулярно до площини розташування включень набігає плоска поздовжня гармонічна у часі хвиля з амплітудою напружень $\sigma_{33}^{in}(\mathbf{x})$ та циклічною частотою ω . Включення перебувають в умовах ідеального механічного контакту з матрицею, тобто забезпечується неперервність переміщень та напружень за перетину міжфазних поверхонь. Тут і далі загальний експоненціальний множник $\exp(-i\omega t)$, де t – час, $i = \sqrt{-1}$, вилучаємо з розв'язку.

Контактна особа: І. Я. ЖБАДИНСЬКИЙ, e-mail: zhbadynskyi.igor@gmail.com

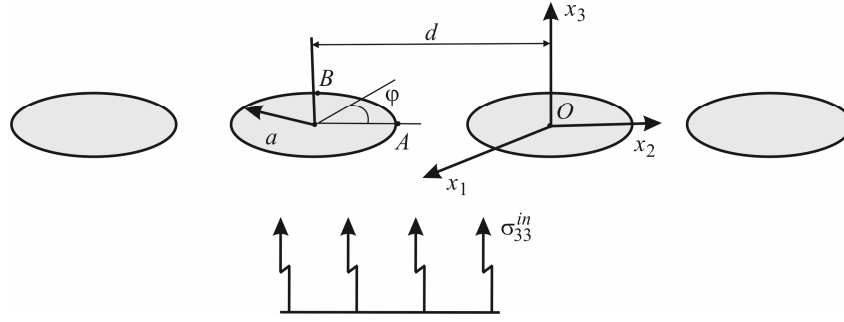


Рис. 1. Схема задачі.

Fig. 1. The problem scheme.

Через симетрію хвильового поля відносно площини дефектів граничні умови в області S_n n -го включення моделюємо лінійною залежністю між нормальними напруженнями σ_{33n} та стрибками нормальних переміщень Δu_{3n} [7] у цій області. Адекватність моделі забезпечують малість товщини включень проти їх діаметра, коли $h = 2\delta_1 a$ ($\delta_1 \ll 1$), довжина збуджувальної хвилі $\omega_2 h \ll 1$ ($\omega_2 = \omega/c_2$, c_2 – швидкість поширення в матриці поперечної хвилі), а також умова податливості матеріалу включень відносно матричного матеріалу, коли $G_0 = \delta_2 G$ ($\delta_2 \ll 1$), де величини δ_1 і δ_2 мають однаковий порядок. За таких припущень [6] маємо:

$$\sigma_{33n}(\mathbf{x}) = \frac{2(1-\nu_0)G_0}{(1-2\nu_0)h} \Delta u_{3n}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

ГІР задачі та його числовий розв’язок. З урахуванням умов періодичності $\Delta u_{3n}(x_1, x_2 + nd) = \Delta u_3(x_1, x_2)$, $n \in \mathbb{Z}$ та крайових на поверхнях включень (1) задачу, використовуючи інтегральні подання напружень [7], зведемо до ГІР з інтегруванням по області розташування лише однієї репрезентативної неоднорідності $S = S_0$ відносно стрибка нормальних переміщень Δu_3 у цій області:

$$\frac{2(1-\nu_0)G_0}{(1-2\nu_0)h} \Delta u_3(\mathbf{x}) + \frac{4G}{\omega_2^2} \iint_S \Delta u(\boldsymbol{\xi}) \left[\sum_{n=-c+1}^{c-1} R(r_n) - L(\mathbf{x}) \right] dS_{\boldsymbol{\xi}} = -\sigma_{33}^{\text{in}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S, \quad (2)$$

де $r_n = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2 - nd)^2}$, гіперсингулярне (коли $n = 0$) ядро або функція Гріна $R(r_n)$ описує взаємодію між актуальним і сусідніми включеннями, розташованими в областях S_n ($-c + 1 \leq n \leq c - 1$)

$$R(r) = \left\{ (9 - 9i\omega_2 r - 4\omega_2^2 r^2 + i\omega_2^3 r^3) \exp(i\omega_2 r) - \left[9 - 9i\omega_1 r + (\omega_2^2 - 5\omega_1^2) r^2 + i\omega_1 (2\omega_1^2 - \omega_2^2) r^3 + \frac{1}{4} (2\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 r^4 \right] \exp(i\omega_1 r) \right\} r^{-5},$$

а ядро $L(x_1, x_2)$ – взаємодію актуального включення з іншими віддаленішими включеннями

$$L(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^2 \sum_{j=1}^2 (\delta_{2j} - \delta_{1j}) \int_0^{\infty} \frac{\tau \exp\left\{-\left[(\delta_{2m} - \delta_{1m})(x_2 - \eta_2) + cd\right] V_j(\tau)\right\}}{V_j(\tau) \left[1 - \exp(-dV_j(\tau))\right]} \Omega_j(x_1 - \eta_1, \tau) d\tau. \quad (3)$$

Тут штрих над знаком суми означає вилучення зі сумування членів з індексами

$$-c+1 \leq n \leq c-1, \quad V_j(\tau) = \sqrt{\tau^2 - k_j^2} \quad (\text{Im} V_j < 0), \quad \Omega_1(r, \tau) = J_0(\tau r) \left(\frac{\omega_2^2}{2} - k_1^2 \right)^2 + \\ + \frac{2\tau J_1(\tau r) \left(\frac{\omega_2^2}{2} - k_1^2 \right) + 3\tau^2 J_2(\tau r)}{r^2}, \quad \Omega_2(r, \tau) = \tau^2 \left(\frac{3J_2(\tau r)}{r^2} - \frac{\omega_2^2 J_1(\tau r)}{\tau r} \right), \quad J_n(\cdot) - \\ \text{функція Бесселя } n\text{-го порядку.}$$

Параметр $c \geq 2$ в ядрі (3) – ціле число. Збільшуючи значення c , можна поліпшити збіжність інтегралів Фур'є у виразі (3). Інтеграли в ядрі $L(x_1, x_2)$ є сингулярними в точках, що є коренями функцій $V_1(\tau)$ та $V_2(\tau)$.

Виділяючи особливості в ядрі $R(r_n)$, рівняння (2) за допомогою інтегралів типу ньютонівського потенціалу можна тотожно перетворити до вигляду

$$\frac{2(1-\nu_0)(1-\nu)\bar{G}}{(1-2\nu_0)h} \Delta u(\mathbf{x}) + \iint_S \frac{\Delta u(\boldsymbol{\eta})}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\eta}|^3} dS_{\boldsymbol{\eta}} + q\omega_2^2 \iint_S \frac{\Delta u(\boldsymbol{\eta})}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\eta}|} dS_{\boldsymbol{\eta}} + \iint_S \Delta u(\boldsymbol{\eta}) \left[\frac{4(1-\nu)}{\omega_2^2} \times \right. \\ \left. \times R(|\mathbf{x}-\boldsymbol{\eta}|) - \frac{1}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\eta}|^3} - \frac{q\omega_2^2}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\eta}|} \right] dS_{\boldsymbol{\eta}} - \frac{4(1-\nu)}{\omega_2^2} \iint_S \Delta u(\boldsymbol{\eta}) \left[\sum_{n=-c+1}^{c-1} (1-\delta_{0n}) \times \right. \\ \left. \times R(\sqrt{(x_1-\eta_1)^2 + (x_2-\eta_2+nd)^2}) + L(\mathbf{x}) \right] dS_{\boldsymbol{\eta}} = -\frac{1-\nu}{G} \sigma_{33}^{\text{in}}, \quad \mathbf{x} \in S. \quad (4)$$

Тут $q = (7-12\nu+8\nu^2)/(8(1-\nu))$, $\bar{G} = G_0/G$; $|\mathbf{x}-\boldsymbol{\eta}| = r_n$; перший та другий інтеграли – гіперсингулярний та слабосингулярний, відповідно, та мають форму своїх статичних аналогів. Згідно з умовою неперервності переміщень в околі включення шукану функцію подамо як добуток:

$$\Delta u_3(\mathbf{x}) = \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2} \alpha(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S, \quad (5)$$

де $\alpha(\mathbf{x})$ – нова невідома функція. Важливо, що, виділивши у зображенні функцію динамічного розкриття квадратного кореня, можна точно обчислити коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) в околі включення за формулою

$$K_I(\varphi) = -\frac{2G\pi\sqrt{\pi a}}{(1-\nu)} \alpha(\mathbf{x}) \Big|_{\substack{x_1 = -a \sin \varphi \\ x_2 = a \cos \varphi}}, \quad \mathbf{x} \in S, \text{ не використовуючи спеціальні гранич-}$$

ні елементи на його фронті.

Для визначення невластних інтегралів в ядрі $L(x_1, x_2)$ застосовуємо техніку регуляризації ГР (4) за допомогою спеціальних регуляризованих інтегралів [7], які обчислюємо аналітично, ураховуючи поведінку підінтегральних виразів в околі особливих точок $\tau = k_j$. Далі методом колокацій отримуємо добре обумовлену систему лінійних алгебричних рівнянь для вузлових значень функції $\alpha(\mathbf{x})$ на сітці граничних елементів, яка покриває область S .

Ефекти динамічної взаємодії включень. Числовий аналіз здійснювали для випадку, коли коефіцієнти Пуассона матриці і включень були рівними $\nu = \nu_0 = 0,3$, а модулі зсуву матриці G та включення G_0 різні ($\bar{G} = G_0/G$). Параметр c , що контролює збіжність в ядрі $L(x_1, x_2)$, становив 3, а для апроксимації півбезмежних інтегралів у рівнянні (4) верхня межа $\tau_{\text{max}} = 16c_2/a$. Зі збільшенням частоти коливань хвильового навантаження амплітуди КІН відриву зростають від статичних значень, коли хвильове число дорівнює нулю, до максимумів з подальшим монотонним спаданням (рис. 2). У всьому розглянутому хвильовому діапазоні КІН для включень менші, ніж для аналогічно розташованих тріщин (рис. 2a). Цю закономірність можна використовувати, щоб зменшити динамічні

напруження в ушкодженому тріщинами пружному тілі, наповнюючи дефекти в'язучим кристалізувальним матеріалом (аналогічні результати за статичного навантаження лягли в основу сучасних ін'єкційних технологій [8]). Значення КІН для одноперіодичного масиву дискових включень більші та їх максимальні значення досягаються швидше, ніж для поодинокого включення (рис. 2b).

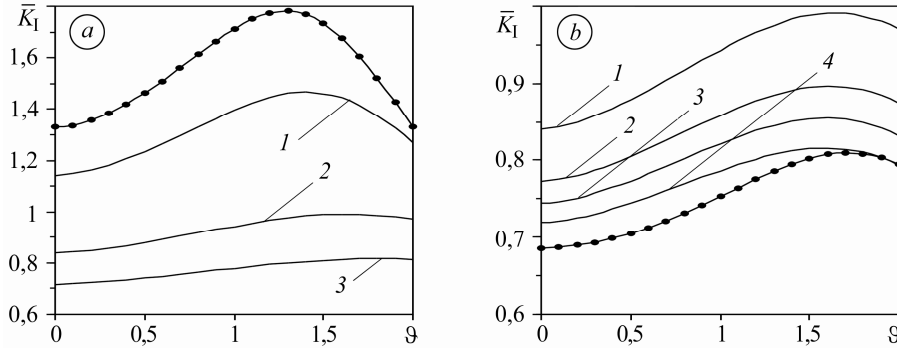


Рис. 2. Залежності відносної амплітуди КІН розриву $\bar{K}_I = K_I / K^{st}$ від нормалізованого хвильового числа $\vartheta = \omega_2 a$ в околі точки включення A , що розташована на осі Ox_2 (рис. 1): a – за фіксованої періодичної відстані $d = 2,1a$ для різних відношень модулів жорсткості

включення та матриці: 1 – $\bar{G} = 0,001$; 2 – 0,005; 3 – 0,01; маркована крива –

одноперіодичний масив дискових тріщин; b – за фіксованого відношення $\bar{G} = 0,005$

для різних відстаней: 1 – $d = 2,1a$; 2 – $2,2a$; 3 – $2,3a$; 4 – $2,5a$; маркована крива –

одне дискове включення в однорідній матриці; $K_I^{st} = 2\sigma_{33}^{in}\sqrt{a/\pi}$ – статичний КІН відриву для тріщини в однорідному тілі з нормальними напруженнями σ_{33}^{in} на її поверхнях.

Fig. 2. Dependences of relative amplitude of the mode-I stress intensity factor (SIF) $\bar{K}_I = K_I / K^{st}$ on dimensionless wave number $\vartheta = \omega_2 a$ in the vicinity of inclusion front point A , located on the Ox_2 axis (Fig. 1); a – for fixed periodic distance $d = 2.1a$

and different ratios of inclusion and matrix stiffness modules: 1 – $\bar{G} = 0.001$; 2 – 0.005;

3 – 0.01; marked curve indicates singleperiodical array of penny-shaped cracks;

b – for fixed ratio $\bar{G} = 0.005$ and different distances: 1 – $d = 2.1a$; 2 – $2.2a$; 3 – $2.3a$; 4 – $2.5a$; marked curve indicates single disc inclusion in homogeneous matrix; $K_I^{st} = 2\sigma_{33}^{in}\sqrt{a/\pi}$ is static

mode-I SIF for the crack in a homogeneous solid with normal stresses σ_{33}^{in} on its surfaces.

Відстежимо ефекти передислокації зон екстремальних динамічних напружень уздовж контурів включення за зміни частот навантаження (рис. 3). За певних відстаней між включеннями $3a < d < 3,5a$ для широкого спектра частот від точки A контуру включення (найближча до сусідніх включень, $\varphi = 0$) до точки B (найвіддаленіша від сусідніх включень, $\varphi = \pi/2$) (див. рис. 1) КІН зменшується (рис. 3a). Однак за високочастотного навантаження маємо протилежну тенденцію його зміни для тієї ж геометрії дефектів (рис. 3b). Зокрема, для періодичних відстаней $2a < d < 3a$ та $3,5a < d < 5a$ КІН у точці A незалежно від розглянутої частоти завжди більші, ніж у точці B . Зменшуючи значення параметра \bar{G} , одержуємо щоразу більші значення \bar{K}_I для будь-якої геометрії включень та частоти хвильового навантаження (рис. 2 і 3). Зі збільшенням відстані між включеннями значення КІН в їх околі такі ж, як для одного включення [7] (рис. 2b) і при $d > 5a$ взаємний вплив у масиві одноперіодичних включень можна знехтувати.

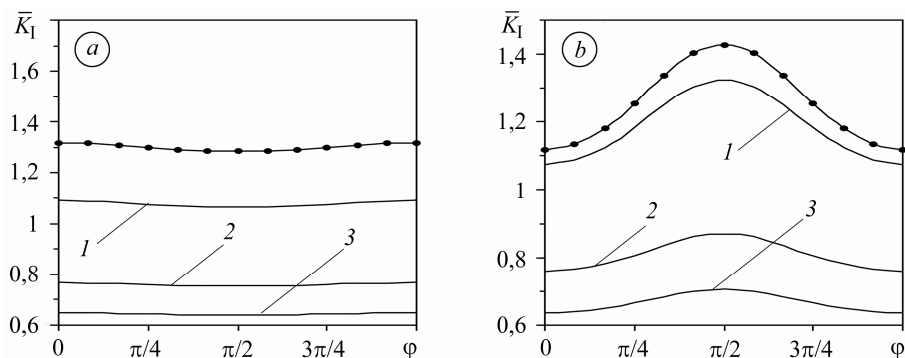


Рис. 3. Залежності відносної амплітуди КІН розриву \bar{K}_I від кутової координати φ (див. рис. 1) для періодичної відстані $d = 3,2a$: 1 – $\bar{G} = 0,001$; 2 – 0,005; 3 – 0,01; марковані криві – одноперіодичний масив дискових тріщин; а – $\vartheta = 1,2$; б – 2,0.

Fig. 3. Dependences of relative amplitude of the mode-I SIF \bar{K}_I on polar angle φ (see Fig. 1) for periodic distance $d = 3.2a$: 1 – $\bar{G} = 0.001$; 2 – 0.005; 3 – 0.01; marked curves indicate singly-periodic array of penny-shaped cracks; a – $\vartheta = 1.2$; b – 2.0.

SUMMARY. The symmetric problem of time-harmonic wave load of the infinite elastic matrix with singly-periodic system of compliant disk inclusions is numerically investigated. The problem is reduced to a boundary integral equation for the inclusion-opening-displacement in a unit cell by means of 3D periodic Green's function which describes inclusion interaction. This function is adopted for the effective calculation by its representation in the form of exponentially-convergent Fourier integrals. A collocation method is used for the solution of the boundary integral equation. Numerical results for the mode-I dynamic stress intensity factor in the inclusion vicinity depending on the wave number and the lattice size are obtained and analyzed.

Keywords: three-dimensional elastic matrix, disk inclusion, harmonic wave, boundary integral equations method, periodic Green's function, dynamic stress intensity factor.

1. Zhang Ch. and Gross D. On wave propagation in elastic solids with cracks. – Southampton: Computational Mechanics Publications, 1998. – 248 p.
2. Two-dimensional phononic crystals: Examples and applications / Y. Pennec, J. O. Vasseur, B. D. Rouhani, L. Dubrzynski, and P. A. Deymier // Surf. Sci. Reports. – 2010. – **65**, № 8. – P. 229–291.
3. Boundary element method for band gap calculation of two-dimensional solid phononic crystals / F.-L. Li, Y.-S. Wang, Ch. Zhang, and G.-L. Yu // Eng. Analysis with Boundary Elements. – 2013. – **37**, № 2. – P. 225–235.
4. Kanaun S. K. and Levin V. M. Self-consistent methods for composites. Vol. 2. Wave propagation in heterogeneous materials. – Heidelberg: Springer, 2008. – 316 p.
5. Mykhas'kiv V. V. Opening-function simulation of the three-dimensional nonstationary interaction of cracks in an elastic body // Int. Appl. Mech. – 2001. – **37**, № 1. – P. 75–84.
6. Mykhas'kiv V. V., Zhabadynskyi I. Ya., and Zhang Ch. On propagation of time-harmonic elastic waves through a double-periodic array of penny-shaped cracks // European J. of Mechanics A/Solids. – 2019. – **73**, № 1. – P. 306–317.
7. Kim G. C., Кунец Я. И., Михаськів В. В. Взаимодействие стационарной волны с тонким дискообразным включением малой жесткости в упругом теле // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2004. – № 5. – С. 82–89.
8. Маруха В. І., Панасюк В. В., Силованюк В. П. Ін'єкційні технології відновлення працездатності пошкоджених конструкцій тривалої експлуатації. – Львів: Сполум, 2009. – 262 с.

Одержано 20.06.2019