

УДК 539.375

## КРУГОВИЙ ДИСК З РАДІАЛЬНОЮ ВНУТРІШНЬОЮ ТРІЩИНОЮ ПІД ДІЄЮ МОДЕЛЬНОГО КОНТАКТНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

О. П. ДАЦИШИН, І. А. РУДАВСЬКА

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Розв'язано плоску задачу теорії пружності для кругового диска з довільно розташованою внутрішньою радіальною тріщиною під дією модельного контактної навантаження, яке враховує сили тертя проковзування між тілами кочення. Рівновагу диска підтримують зосереджені сили і момент, прикладені в його центрі. Задачу зведено до сингулярного інтегрального рівняння, яке розв'язано числово методом механічних квадратур. Визначено коефіцієнти інтенсивності напружень залежно від розташування тріщини та ділянки контакту на контурі диска, а також від сили тертя проковзування між тілами кочення. Результати узгоджуються з відомими в літературі.

**Ключові слова:** *круговий диск, радіальна тріщина, модельне контактне навантаження, тертя проковзування, коефіцієнти інтенсивності напружень.*

The plane problem of elasticity theory for a circular disk with an arbitrarily located internal radial crack under model contact load that considers the forces of sliding friction between rolling bodies is solved. Equilibrium of the disk is supported by concentrated forces and a moment applied to the disk center. The problem is reduced to a singular integral equation which is solved numerically by the method of mechanical quadratures. The stress intensity factors are determined depending on the crack location and the contact zone on the disk contour as well as on the force of sliding friction between rolling bodies. The results agree well with known in the literature.

**Keywords:** *circular disk, radial crack, model contact load, sliding friction, stress intensity factors.*

**Вступ.** Основною робочою частиною багатьох сучасних машин і механізмів є пари кочення: системи колесо-рейка, кулькові і роликові підшипники, валки вальцювальних станів, різні зубчасті зчеплення тощо. Їх ресурс найчастіше вичерпується в результаті зародження і розвитку тріщин (див., наприклад, [1, 2]), що призводить до аварійних ситуацій.

Розв'язки задач про напружено-деформований стан кругового диска, послабленого розрізами (тріщинами), під дією контактної навантаження важливі як фундаментальні в межах задач математичної теорії тріщин, так і як прикладні, зокрема для прогнозування міцності і довговічності елементів трибоспрямижень і, зокрема, тіл кочення. Часто у таких тілах кочення, як залізничні колеса, зароджуються і розвиваються радіальні тріщини (рис. 1) [3].



Рис. 1. Радіальна тріщина в залізничному колесі [3].

Fig. 1. A radial crack in a railway wheel [3].

У літературі відомі коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) для диска з прямолінійною центральною тріщиною різної довжини за його стиску вздовж діаметра протилежно напрямленими зосередженими силами. Ці результати отримані аналітично [4] та числово методом сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) [5]. За заданих нормального переміщення та дотичної компоненти поверхневих сил на ободі диска (мішані крайові умови) вивчено його гранично-рівноважний стан з використанням критерію критичного розкриття тріщини для зон передруйнування [6]. Для диска з центральною тріщиною, на ободі якого діють діаметрально протилежні зосереджені сили або рівномірно розподілений тиск, у явному вигляді знайдено КІН за ваговою функцією [7].

Нижче методом СІР розв'язано плоску задачу теорії пружності для кругового диска з довільно розташованою внутрішньою радіальною тріщиною, на ділянці ободу якого однонапрямлено переміщається модельне контактне навантаження, зокрема: рівномірно розподілений нормальний тиск і дотичні зусилля, що моделюють сили тертя між тілами кочення. Контактне навантаження зрівноважене зосередженими силами та моментом, прикладеними у центрі диска. Задачу зведено до СІР, яке розв'язано методом механічних квадратур. Отримано числові значення КІН залежно від розташування і довжини тріщини, а також розміщення ділянки контакту на ободі диска і коефіцієнта тертя проковзування в контакті між тілами кочення.

**Формулювання задачі.** Розглянемо пружний ізотропний круговий диск радіуса  $R$ , обмежений контуром  $L_0$ , з центром у початку основної прямокутної системи координат  $xOy$  (рис. 2). Диск послаблений внутрішньою радіальною тріщиною завдовжки  $2l$  уздовж контуру  $L$ , віднесеною до локальної системи координат  $x_1O_1y_1$ . Вісь  $O_1x_1$  цієї системи збігається з віссю  $Ox$ , а її початок  $O_1$  є на віддалі  $r_0$  від початку основної системи  $xOy$  і центра диска  $O$ . У центрі диска також розташуємо полюс полярної системи координат  $r, \varphi$ .

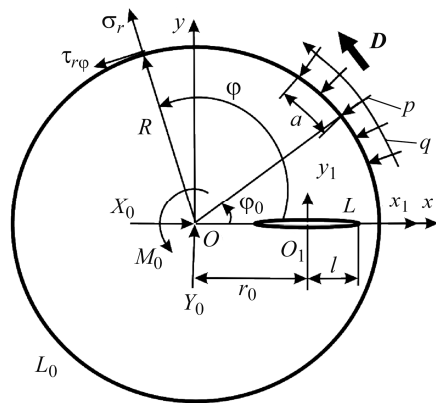


Рис. 2. Загальна схема задачі.  
 $D$  – напрямок переміщення контактної навантаження.

Fig. 2. General scheme of the problem.  
 $D$  – direction of contact load motion.

На межі диска діє модельне контактне навантаження, а в центрі прикладено зосереджені сили  $X_0, Y_0$  та момент  $M_0$ , які забезпечують умови його рівноваги. Розглядаємо такі випадки (значення параметрів) навантаження, коли береги тріщини не контактують (виконується умова  $K_I^\pm > 0$ ). Вважаємо також, що береги тріщини вільні від навантаження.

Таким чином, крайові умови задачі

мають вигляд

$$N(t_0) + iT(t_0) = \sigma_r(t_0) + i\tau_{r\varphi}(t_0) = p(-1 + if), \quad t_1 \leq t_0 \leq t_2, \quad (1)$$

$$N(t_0) + iT(t_0) = 0, \quad t_2 \leq t_0 \leq t_3, \quad t_0 \in L_0, \quad (2)$$

$$t_0 = t_0(\varphi) = R \cdot e^{i\varphi}, \quad t_1 = R \cdot e^{i\varphi_1}, \quad t_2 = R \cdot e^{i\varphi_2}, \quad t_3 = R \cdot e^{i(2\pi + \varphi_1)}, \quad (3)$$

$$N^\pm(t) + iT^\pm(t) = 0, \quad t \in L, \quad (4)$$

де  $N$  і  $T$  – нормальна і дотична компоненти зусиль на контурі диска і берегах тріщини в системі позначень Мусхелішвілі [8]; верхні індекси вказують на граничні

значення відповідних величин на контурі тріщини  $L$  за підходу до нього зліва (+) або справа (-). Як модельне контактне навантаження вибрали рівномірно розподілений нормальний тиск інтенсивністю  $p$  та дотичні зусилля  $q$ , пов'язані між собою законом Кулона  $q = fp$  через коефіцієнт тертя проковзування  $f$ ;  $\varphi_1, \varphi_2$  – кутові межі ділянки контакту;  $2a = R(\varphi_2 - \varphi_1)$  – довжина ділянки контакту,  $\varphi_0 = (\varphi_2 + \varphi_1)/2$  – кут, що відповідає її середині (рис. 2).

Умови рівноваги диска для цієї задачі на основі крайових умов (1)–(4) матимуть вигляд

$$X_0 + iY_0 = \int_{L_0} p(-1 + if) dt_0, \quad M_0 = \int_{L_0} R p f dt_0. \quad (5)$$

Дослідимо КІН для радіальної внутрішньої тріщини в диску під дією зусиль (1)–(4) залежно від розташування тріщини та ділянки контакту, довжини тріщини, а також коефіцієнта тертя.

Скориставшись крайовими умовами задачі (1)–(4), з допомогою комплексних потенціалів Колосова–Мусхелішвілі для диска з криволінійними тріщинами [9] для однієї тріщини отримаємо СІР задачі:

$$\frac{1}{\pi} \int_L \left[ K(t, \tau) g'(t) dt + L(t, \tau) \overline{g'(t)} d\bar{t} \right] = p(\tau), \quad \tau \in L, \quad (6)$$

де  $g'(t)$  – шукана функція, яка є похідною від розривів переміщень берегів тріщини.

Оскільки береги тріщини не навантажені, то права частина СІР (6) матиме вигляд

$$p(\tau) = - \left\{ \Phi_0(T') + \overline{\Phi_0(T')} + e^{-2i\alpha} \frac{d\bar{\tau}}{d\tau} \left[ T' \overline{\Phi_0'(T')} + \overline{\Psi_0(T')} \right] \right\}; \quad (7)$$

тут функції  $\Phi_0(T')$  і  $\Psi_0(T')$  – комплексні потенціали Мусхелішвілі [8] для кругового диска без тріщини, підданого дії зусиль (1)–(3), (5).

Ядра рівняння (6) визначають за результатами праці [10] і описують співвідношеннями

$$K(t, \tau) = f_1(T, T') + \overline{f_2(T, T')} + e^{-2i\alpha} \frac{d\bar{\tau}}{d\tau} \left[ T' \overline{g_2(T, T')} + \overline{h_2(T, T')} \right]; \quad (8)$$

$$L(t, \tau) = f_2(T, T') + \overline{f_1(T, T')} + e^{-2i\alpha} \frac{d\bar{\tau}}{d\tau} \left[ T' \overline{g_1(T, T')} + \overline{h_1(T, T')} \right], \quad (9)$$

де

$$f_1(T, T') = \frac{e^{i\alpha}}{2} \left[ \frac{1}{T - T'} + \frac{\bar{T}}{T'\bar{T} - R^2} \right]; \quad f_2(T, T') = \frac{e^{-i\alpha}}{2} \frac{T'(T\bar{T} - R^2)(T'\bar{T} - 2R^2)}{R^2(T'\bar{T} - R^2)^2}; \quad (10)$$

$$h_1(T, T') = \frac{e^{i\alpha}}{2} \left[ \frac{\bar{T}^3}{(T'\bar{T} - R^2)^2} - \frac{\bar{T}}{(T - T')^2} \right]; \quad (11)$$

$$h_2(T, T') = \frac{e^{-i\alpha}}{2} \left[ \frac{1}{T - T'} + \frac{\bar{T}}{T'\bar{T} - R^2} + \frac{\bar{T}(T'\bar{T} - 3R^2)(T\bar{T} - R^2)}{(T'\bar{T} - R^2)^3} \right];$$

$$g_1(T, T') = \frac{e^{i\alpha}}{2} \left[ \frac{1}{(T - T')^2} - \frac{\bar{T}^2}{(T'\bar{T} - R^2)^2} \right]; \quad g_2(T, T') = e^{-i\alpha} \frac{(T\bar{T} - R^2)R^2}{(T'\bar{T} - R^2)^3}; \quad (12)$$

$$T = te^{i\alpha} + z_0^0; T' = \tau e^{i\alpha} + z_0^0; \quad (13)$$

$\alpha$  – кут нахилу осі  $O_1x_1$  до  $Ox$ ;  $z_0$  – комплексна координата точки  $O_1$  в основній системі координат. Для радіальної тріщини  $\alpha = 0$ ,  $z_0 = r_0$ .

Комплексні потенціали для правої частини СІР (7) визначаємо подібно, як у праці [11]:

$$\Phi_0(T') = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\sigma_r(t_0) + i\tau_{r\varphi}(t_0)}{t_0 - T'} dt_0 + \frac{X_0 - iY_0}{\pi R^2(1+\kappa)} T' - \frac{X_0 + iY_0}{2\pi(1+\kappa)} \frac{1}{T'} + \frac{iM_0}{2\pi R^2} - \frac{1}{4\pi i} \int_{L_0} \frac{\sigma_r(t_0)}{t_0} dt_0, \quad (14)$$

$$\Psi_0(T') = -\frac{R^2}{2\pi i T'} \int_{L_0} \frac{\sigma'_r(t_0) + i\tau'_{r\varphi}(t_0)}{t_0 - T'_n} dt_0 + \frac{R^2}{\pi T'^2} \int_{L_0} \frac{\tau_{r\varphi}(t_0)}{t_0 - T'} dt_0 + \frac{iM_0}{2\pi T'^2} - \frac{1}{T'} \frac{(X_0 - iY_0)}{2\pi(1+\kappa)} - \frac{R^2}{2\pi i T'} \int_{L_0} \frac{\sigma_r(t_0) + i\tau_{r\varphi}(t_0)}{(t_0 - T')^2} dt_0 + \frac{R^2}{4\pi i T'} \int_{L_0} \frac{\sigma'_r(t_0)}{t_0} dt_0. \quad (15)$$

Зауважимо, що вирази (14) і (15), отримані для функцій  $\Phi_0(T')$  і  $\Psi_0(T')$ , дещо відрізняються від відомих [11].

Знайдемо також похідну від функції  $\Phi_0(T')$  на основі співвідношення (14):

$$\Phi'_0(T') = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{(\sigma_r(t_0) + i\tau_{r\varphi}(t_0))'}{(t_0 - T')} dt_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} \frac{\sigma_r(t_0) + i\tau_{r\varphi}(t_0)}{(t_0 - T')^2} dt_0 + \frac{X_0 - iY_0}{\pi R^2(1+\kappa)} + \frac{X_0 + iY_0}{2\pi(1+\kappa)} \frac{1}{T'^2} - \frac{1}{4\pi i} \int_{L_0} \frac{\sigma'_r(t_0)}{t_0} dt_0. \quad (16)$$

У співвідношеннях (14)–(16) для узагальненого плоского напруженого стану (тонка пластина)  $\kappa = (3 - \mu)/(1 + \mu)$ , де  $\mu$  – коефіцієнт Пуассона. Необхідні інтеграли обчислюємо [8] як звичайні, без особливостей типу Коші, враховуючи крайові умови (1)–(3) та умови рівноваги (5).

Зосереджені сили та момент знаходимо з умов (5), беручи до уваги позначення (3):

$$X_0 = Rp(\sin \varphi - f \cos \varphi) \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2}, \quad (17)$$

$$Y_0 = Rp(-\cos \varphi - f \sin \varphi) \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2}, \quad (18)$$

$$M_0 = -R^2 pf \varphi \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2}. \quad (19)$$

Для однозначності розв'язку СІР (6) необхідна додаткова умова

$$\int_L g'(t) dt = 0, \quad (20)$$

якою забезпечуємо однозначність переміщень за обходу контуру тріщини  $L$ .

Запишемо СІР (6) в нормалізованому вигляді. Для цього перейдемо до безрозмірних змінних

$$t = l\omega(\xi) = l\xi, \quad \tau = l\eta, \quad t, \tau \in L, \quad |\xi| \leq 1, \quad |\eta| \leq 1 \quad (21)$$

в СІР (6) та в додатковій умові (20) й отримуємо систему двох СІР у нормалізованій формі, щоб визначити похідну від розриву переміщень на берегах тріщини  $g'(\omega(\xi))$ ,  $|\xi| \leq 1$ . Ці рівняння розв'язуємо числово методом механічних квадратур Гаусса–Чебишова [9, 10], а звідси знаходимо КІН  $K_I$  і  $K_{II}$  [9, 10]:

$$K_I^\pm - iK_{II}^\pm = (F_I^\pm - iF_{II}^\pm) p\sqrt{\pi R}, \text{ де } F_I^\pm - iF_{II}^\pm = \mp \sqrt{|\omega'(\pm 1)|} \frac{u(\pm 1)}{\omega'(\pm 1)}. \quad (22)$$

Тут верхні знаки віднесено до правої вершини тріщини, а нижні – до лівої. Шукана функція

$$u(\xi) = g'(l\omega(\xi))\omega'(\xi)\sqrt{1-\xi^2}/p \quad (23)$$

є розв'язком системи алгебричних рівнянь, до якої зведено СІР (6) і співвідношення (20).

Припускаючи, що локальне руйнування в обидвох вершинах тріщини відбувається за механізмом нормального розриву ( $\sigma_\theta$ -критерій), за яким тріщина розвивається в напрямі, де колові нормальні напруження  $\sigma_\theta$  максимальні, для визначення КІН  $K_{I\theta}$  мішаного типу використовуємо формулу

$$K_{I\theta} = \cos^3\left(\frac{\theta_*}{2}\right) \left[ K_I - 3\operatorname{tg}\left(\frac{\theta_*}{2}\right) K_{II} \right], \quad (24)$$

де кут початкового поширення тріщини

$$\theta_* = 2\operatorname{arctg}\left(\left(K_I - \sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2}\right)/4K_{II}\right). \quad (25)$$

**Числові результати.** Дослідимо КІН  $K_I^\pm$ ,  $K_{II}^\pm$  та  $K_{I\theta}^\pm$  в обох вершинах радіальної тріщини залежно від кута  $\varphi_0$ , який фіксує положення середини ділянки контакту на контурі диска, відносної віддалі середини тріщини від центра диска  $r_0/R$  та коефіцієнта тертя проковзування  $f$ .

Довжину ділянки контакту вибираємо розміром  $2a = 0,013$  м, що характерно для пари кочення колесо-рейка і відповідає розхилу її кута  $1,62^\circ$ . Ділянку контакту (контактне навантаження) переміщали проти годинникової стрілки з кроком  $2^\circ$ , а в окремих випадках – з кроком  $0,1^\circ$  у межах  $\varphi_0 = -\pi/2 \dots \pi/2$ . Розраховували для таких двох відносних довжин тріщини:  $l/R = 0,01$  і  $0,1$ . Для залізничного колеса радіусом  $R = 0,46$  м це відповідає довжинам тріщини  $2l = 0,92$  і  $9,2$  см. Коефіцієнту тертя надавали значення  $f = 0$  і  $0,3$ . Відносну віддаль центра тріщини від центра диска змінювали в межах  $r_0/R = 0,05 \dots 0,98$ .

У вищеописаних діапазонах зміни параметрів  $\varphi_0$ ,  $r_0/R$  і  $f$  насамперед шукаємо такі їх конфігурації, за яких тріщина в обох вершинах буде розкрита ( $K_I^\pm > 0$ ) і досягаються максимальні значення КІН  $K_{I\theta}$ , тобто конфігурації, найсприятливіші для поширення радіальної тріщини за механізмом нормального розриву.

За фіксованих положень тріщини на радіусі диска встановлюємо такі кути розміщення контактного навантаження ( $\varphi_0 = \varphi_0^*$ ), за яких досягаються максимальні значення КІН. Для кожного розташування тріщини ( $r_0/R$ ) максимальні значення нормованих КІН  $\tilde{F}_I^\pm$ ,  $\tilde{F}_{II}^\pm$ ,  $\tilde{F}_{I\theta}^\pm$  з відповідними кутами розміщення ділянки контакту  $\varphi_0^*$  наведено у таблиці для коефіцієнта тертя  $f = 0$  і  $0,3$ .

За даними таблиці побудували залежності нормованих максимальних за кутом  $\varphi_0$  значень КІН  $\tilde{F} = F(\varphi_0^*, r_0/R) = \max F(\varphi_0, r_0/R)$  від відносної віддалі середини тріщини до центра диска  $r_0/R$  (рис. 3).

**Максимальні нормовані КІН і відповідні кути орієнтації осі навантаження  $\Phi_0^*$   
(у градусах) залежно від розташування середини тріщини**

$f = 0; l/R = 0,01$												
$r_0/R$	$\tilde{F}_I^+ \cdot 10^2$	$\Phi_0^*$	$ \tilde{F}_{II}^+  \cdot 10^2$	$ \Phi_0^* $	$\tilde{F}_{I0}^+ \cdot 10^2$	$ \Phi_0^* $	$\tilde{F}_I^- \cdot 10^2$	$\Phi_0^*$	$\tilde{F}_{II}^- \cdot 10^2$	$ \Phi_0^* $	$\tilde{F}_{I0}^- \cdot 10^2$	$ \Phi_0^* $
0,05	0,3387	0	0,3275	64	0,4359	42	0,4028	0	0,3871	66	0,5163	44
0,10	0,2045	0	0,2080	52	0,2708	34	0,2195	0	0,2205	52	0,2889	36
0,20	0,1398	0	0,1557	38	0,1961	28	0,1429	0	0,1574	38	0,1994	28
0,30	0,1233	0	0,1467	30	0,1816	24	0,1242	0	0,1462	30	0,1821	24
0,40	0,1193	0	0,1510	24	0,1846	20	0,1195	0	0,1495	24	0,1839	20
0,50	0,1204	0	0,1628	18	0,1982	16	0,1201	0	0,1600	18	0,1965	16
0,60	0,1239	0	0,1887	14	0,2230	12	0,1235	0	0,1842	14	0,2199	12
0,70	0,1287	0	0,2297	9,2	0,2666	8,7	0,1282	0	0,2211	9,2	0,2609	9,0
0,80	0,1337	0	0,3016	4,8	0,3504	4,8	0,1333	0	0,2809	4,8	0,3345	4,8
0,90	0,1283	0	0,4469	1,5	0,5208	1,5	0,1311	0	0,3771	1,5	0,4572	1,5
$f = 0,3; l/R = 0,01$												
$r_0/R$	$\tilde{F}_I^+ \cdot 10^2$	$\Phi_0^*$	$\tilde{F}_{II}^+ \cdot 10^2$	$\Phi_0^*$	$\tilde{F}_{I0}^+ \cdot 10^2$	$\Phi_0^*$	$\tilde{F}_I^- \cdot 10^2$	$\Phi_0^*$	$\tilde{F}_{II}^- \cdot 10^2$	$\Phi_0^*$	$\tilde{F}_{I0}^- \cdot 10^2$	$\Phi_0^*$
0,05	0,3440	6	4,9638	-54	5,7738	-38	0,4102	8	7,3227	-54	8,5086	-38
0,10	0,2062	6	1,4721	-46	1,7202	-34	0,2215	4	1,7600	-46	2,0561	-34
0,20	0,1403	2	0,4987	-34	0,5865	-28	0,1434	2	0,5342	-34	0,6292	-28
0,30	0,1235	2	0,3125	-28	0,3668	-24	0,1244	2	0,3218	-28	0,3789	-24
0,40	0,1194	0	0,2536	-22	0,2982	-20	0,1195	0	0,2557	-22	0,3022	-20
0,50	0,1204	0	0,2347	-16	0,2804	-16	0,1201	0	0,2330	-16	0,2808	-16
0,60	0,1239	0	0,2457	-12	0,2909	-12	0,1235	0	0,2407	-12	0,2883	-12
0,70	0,1288	0,1	0,2847	-8,4	0,3296	-8,4	0,1283	0,1	0,2744	-8,4	0,3228	-8,4
0,80	0,1337	0	0,3533	-4,5	0,4092	-4,5	0,1333	0	0,3294	-4,5	0,3902	-4,5
0,90	0,1284	0	0,4856	-1,4	0,5672	-1,4	0,1312	0	0,4109	-1,4	0,4981	-1,4

Криві на рис. 3 свідчать, що максимальні значення КІН  $\tilde{F}_I^\pm, \tilde{F}_{II}^\pm, \tilde{F}_{I0}^\pm$  у разі збільшуються з наближенням тріщини до центра диска (за малих  $r_0/R$ ), де діють зрівноважувальні зосереджені сили і момент, проти їх значень для тріщини, розташованої на середині радіуса диска. Так само інтенсивно збільшуються максимуми КІН  $\tilde{F}_{II}^\pm$  і  $\tilde{F}_{I0}^\pm$  з наближенням тріщини до краю диска (за великих  $r_0/R$ ), особливо за наявності дотичних зусиль (тертя) на ділянці контакту. Значення КІН  $\tilde{F}_I^\pm$  з віддаленням тріщини від центра диска мало змінюються (залишаються стабільними) як зі зміною розташування тріщини вздовж радіуса диска, так і з ростом коефіцієнта тертя  $f$  у контакті.

Якщо тріщина знаходиться близько до центра диска, КІН  $\tilde{F}_I^-$  для лівої (ближньої до центра диска) вершини більші, ніж КІН  $\tilde{F}_I^+$  для правої. З її віддаленням від центра починають переважати максимальні значення КІН у правій вершині ( $\tilde{F}_I^+ > \tilde{F}_I^-$ ), тобто проявляється вплив краю диска.

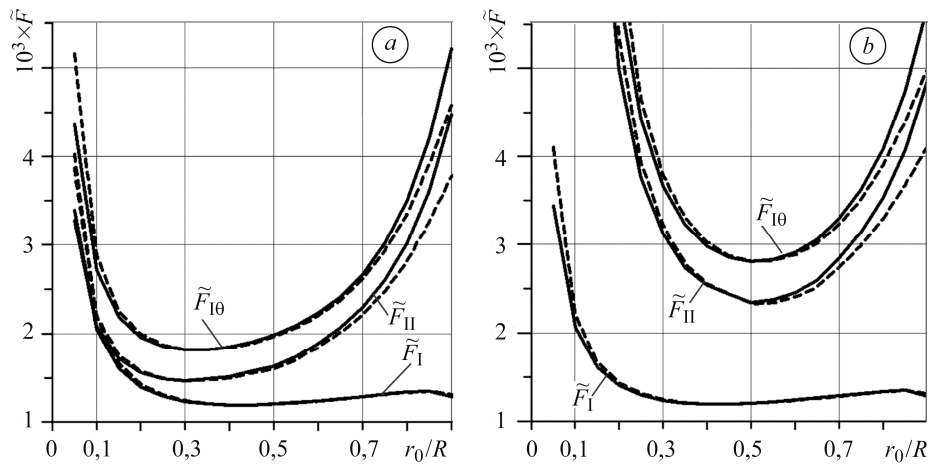


Рис. 3. Нормовані максимальні КІН  $\tilde{F}_I^\pm, \tilde{F}_{II}^\pm, \tilde{F}_{10}^\pm$  залежно від параметра  $r_0/R$ : суцільні криві – права вершина тріщини (+), штрихові – ліва (-);  $l/R = 0,01$ ;  $a - f = 0, b - 0,3$ .

Fig. 3. Normalized maximal SIF  $\tilde{F}_I^\pm, \tilde{F}_{II}^\pm, \tilde{F}_{10}^\pm$  vs.  $r_0/R$ : solid lines represent the right crack tip (+), dashed lines – the left one (-); normalized crack length  $l/R = 0.01$ ;  $a - f = 0, b - 0.3$ .

КІН суттєво залежать від розташування контактної навантаження (параметра  $\varphi_0$ ), а також напрямку дотичних зусиль на контурі диска (рис. 4–7). За відсутності зовнішніх дотичних зусиль ( $f = 0$ ) криві залежностей  $F_I^\pm(\varphi_0, r_0/R)$  для правої і лівої вершин симетричні відносно лінії тріщини (див. таблицю і рис. 4 і 6), а їх максимальні додатні значення  $\tilde{F}_I^\pm(\varphi_0^*, r_0/R)$  досягаються, коли вісь контактної навантаження збігається з лінією тріщини ( $\varphi_0 = \varphi_0^* = 0$ ). Утворюється центральна, відносно до лінії тріщини, зона її розкриття  $\Delta\varphi_0$  (береги тріщини не контактують по всій довжині), яка є тим більша, що ближче тріщина розташована до центра диска. І, навпаки, суттєво звужується з наближенням тріщини до краю диска (див. таблицю і рис. 4 і 6). Зауважимо, що саме у розкритих тріщинах може відбуватися руйнування за механізмом нормального розриву\*.

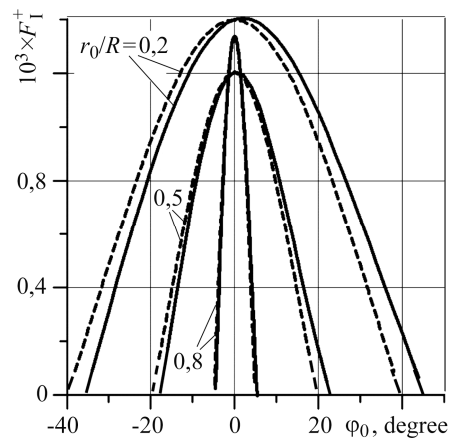


Рис. 4. Центральні зони розкриття для тріщини відносної довжини  $l/R = 0,01$ : суцільні криві –  $f = 0,3$ ; штрихові – 0.

Fig. 4. Crack opening central zones. Crack relative length  $l/R = 0.01$ : solid lines –  $f = 0.3$ ; dashed – 0.

З появою і збільшенням тертя в контакті залежності  $F_I^\pm(\varphi_0, r_0/R)$  змінюються мало. Це справедливо для переважної більшості розташувань тріщини на радіусі диска, тобто, коли  $0,05 \leq r_0/R \leq 0,8$  за обраних значень відносної довжини тріщини  $l/R = 0,01$  та  $0,1$  (див. таблицю і рис. 4 і 6). Загалом вплив тертя на КІН

\* У співвідношеннях (24), (25) для КІН  $K_{10}$  при  $K_I = 0$  (береги тріщини можуть контактувати) допускають появу кута  $\theta_*$  ( $\theta_* \approx 70^\circ$ ) початкового відхилення тріщини, під яким вона може розвиватись за механізмом розриву.

$F_1$  найвідчутніший на кінцях центральної зони розкриття тріщини  $\Delta\phi_0$ , тобто, коли вісь середини ділянки контакту утворює найбільші кути з лінією тріщини. При цьому КІН  $F_1$  зменшується, якщо за обраного напрямку переміщення модельного навантаження (див. рис. 2) сили тертя (дотичні зусилля) спрямовані до лінії тріщини, і зростає у протилежному випадку. Максимальні КІН  $F_1$  досягаються, коли вісь ділянки контакту збігається з лінією тріщини або мало відхиляється від неї.

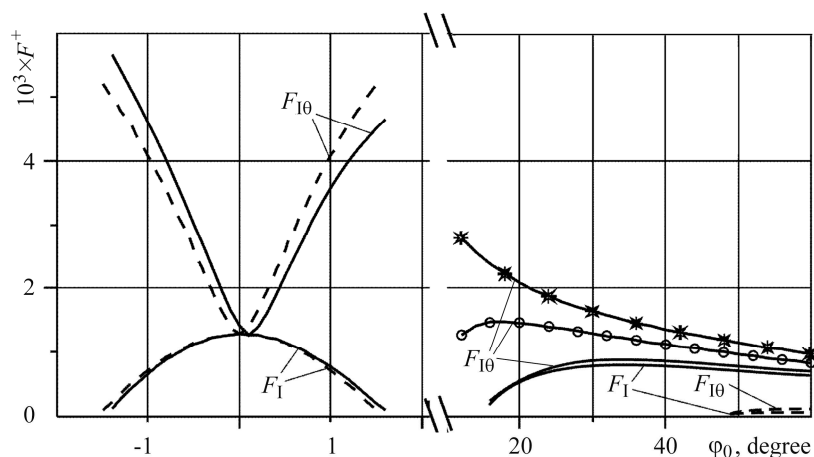


Рис. 5. Центральна та бічні зони розкриття тріщини за її малої віддалі від межі диска:  
 $\circ$  –  $r_0/R = 0,95$ ,  $*$  –  $0,98$ ; суцільні криві –  $f = 0,3$ ; штрихові –  $0$ ;  $l/R = 0,01$ .

Fig. 5. Central and side zones of the crack opening. The crack is closely located to the disk edge:  
 $\circ$  –  $r_0/R = 0.95$ ,  $*$  –  $0.98$ ; solid lines –  $f = 0.3$ ; dashed –  $0$ ;  $l/R = 0.01$ .

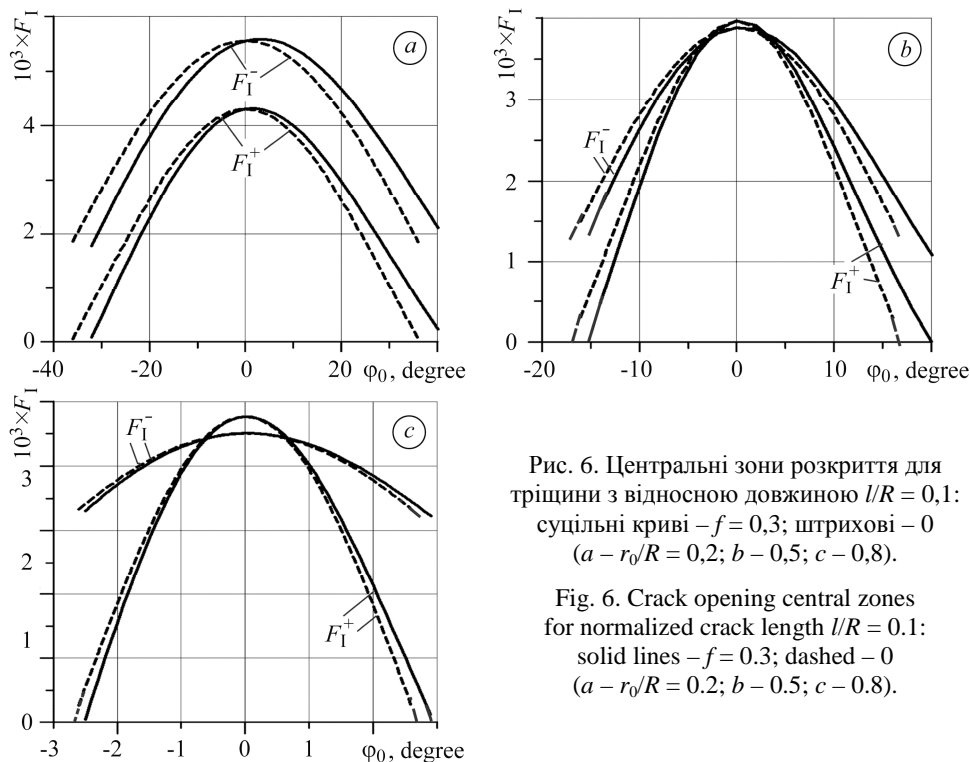


Рис. 6. Центральні зони розкриття для тріщини з відносною довжиною  $l/R = 0,1$ : суцільні криві –  $f = 0,3$ ; штрихові –  $0$  ( $a - r_0/R = 0,2$ ;  $b - 0,5$ ;  $c - 0,8$ ).

Fig. 6. Crack opening central zones for normalized crack length  $l/R = 0.1$ : solid lines –  $f = 0.3$ ; dashed –  $0$  ( $a - r_0/R = 0.2$ ;  $b - 0.5$ ;  $c - 0.8$ ).



Однак ситуація якісно і кількісно змінюється зі суттєвим наближенням тріщини до краю диска, зокрема, коли  $r_0/R > 0,8$ . Якщо контактне навантаження, переміщаючись уздовж межі диска в заданому напрямі, минає лінію тріщини (див. рис. 2), а дотичні зусилля спрямовані від неї, то на деякій віддалі розташування навантаження від цієї лінії з'являється ще одна (бічна) зона розкриття ( $F_1 > 0$ ) тріщини  $\Delta\varphi_0$  (рис. 5). Зауважимо, що з наближенням тріщини до краю диска значення КІН  $\tilde{F}_1^+(\varphi_0^* > 0)$  для цієї бічної зони можуть бути вищі, ніж для центральної ( $\varphi_0^* = 0$ ), яка поступово зникає. У результаті приходимо до задачі про півплощину з внутрішньою підповерхневою тріщиною, коли вздовж її межі переміщається модельне контактне навантаження (рівномірно розподілені нормальні та дотичні зусилля). Отримані результати добре корелюють з відомими [12–14], якщо вздовж межі півплощини з внутрішньою перпендикулярною тріщиною переміщається еліптичне контактне навантаження. Додамо, що на рис. 6 добре видно еволюцію КІН  $F_1$  у правій та лівій вершинах тріщини та зміну їх ролей, спричинену зміною розташування тріщини вздовж радіуса диска.

На рис. 7 подано залежності КІН  $F_{II}^\pm(\varphi_0, r_0/R)$  та  $F_{I0}^\pm(\varphi_0, r_0/R)$  від кута  $\varphi_0$  розташування осі (середини) контактного навантаження в межах зон розкриття тріщини при  $l/R = 0,1$ . Як бачимо, за відсутності сил тертя в контакті ( $f = 0$ ) графіки КІН  $F_{I0}^\pm$  симетричні відносно лінії тріщини ( $\varphi_0 = 0$ ), а КІН  $F_{II}^\pm$  – асиметричні. На рис. 7а чітко продемонстровано домінуючий вплив зрівноважувальних чинників  $X_0, Y_0, M_0$  на ці КІН, а на рис. 7с – вплив на них межі диска. Рис. 7b ілюструє перехідний процес та суттєве (на порядок) зменшення КІН, коли центр тріщини розташований на середині радіуса диска.

Зі збільшенням тертя в контакті КІН наростають, особливо максимальні значення  $\tilde{F}$  на кінцях зон розкриття. Рис. 7 доповнює рис. 3, розкриваючи його дещо завуальовану суть про вплив кута  $\varphi_0$  на максимуми  $F_{II}^\pm$  і  $F_{I0}^\pm$ . Вони свідчать, що кінці зон розкриття є точками реалізації максимумів КІН  $F_{II}^\pm$  і  $F_{I0}^\pm$ , тобто вони є точками, коли  $\varphi_0 = \varphi_0^*$  для кожного фіксованого значення  $r_0/R$ .

На основі кривих на рис. 6 і 7, а також результатів таблиці можна зробити висновок, що зі збільшенням довжини радіальної тріщини від  $l/R = 0,01$  до 0,1 (на порядок) максимальні значення КІН суттєво зростають (у рази), а зони розкриття лише незначно зменшуються і найбільше залежать від розташування центра тріщини на радіусі диска.

Дані в таблиці, а також на рис. 3–7 свідчать, що найсприятливіші ситуації (конфігурації параметрів задачі) для розвитку радіальної тріщини за механізмом нормального розриву, тобто коли досягаються максимальні значення КІН  $K_{I0}$ , реалізуються тоді, коли вона розташована близько до центра диска (малі  $r_0/R$ ), контактне навантаження – на краю центральної зони її розкриття, а сили тертя спрямовані в бік лінії тріщини (рис. 7). Додамо, що центральні зони розкриття тріщини за відповідних малих  $r_0/R$  є найбільшими: наприклад, при  $r_0/R = 0,2$  кут зони розкриття  $\Delta\varphi_0 \approx 80^\circ$ . За наближення тріщини до межі диска КІН  $F_{I0}^\pm$  збільшуються, особливо  $F_{I0}^+$  у ближній до межі диска вершині (рис. 7с), однак, тут маємо дуже малі центральні зони розкриття, зокрема при  $r_0/R = 0,8$  кут  $\Delta\varphi_0 \approx 5^\circ$ . За дуже близького розташування тріщини до межі диска ( $r_0/R \geq 0,9$ ; рис. 5), коли контактне навантаження діє на початку бічної зони її розкриття, а дотичні зусил-

ля спрямовані від лінії тріщини (рис. 5), також виникають сприятливі умови для розвитку радіальної тріщини за механізмом нормального розриву.

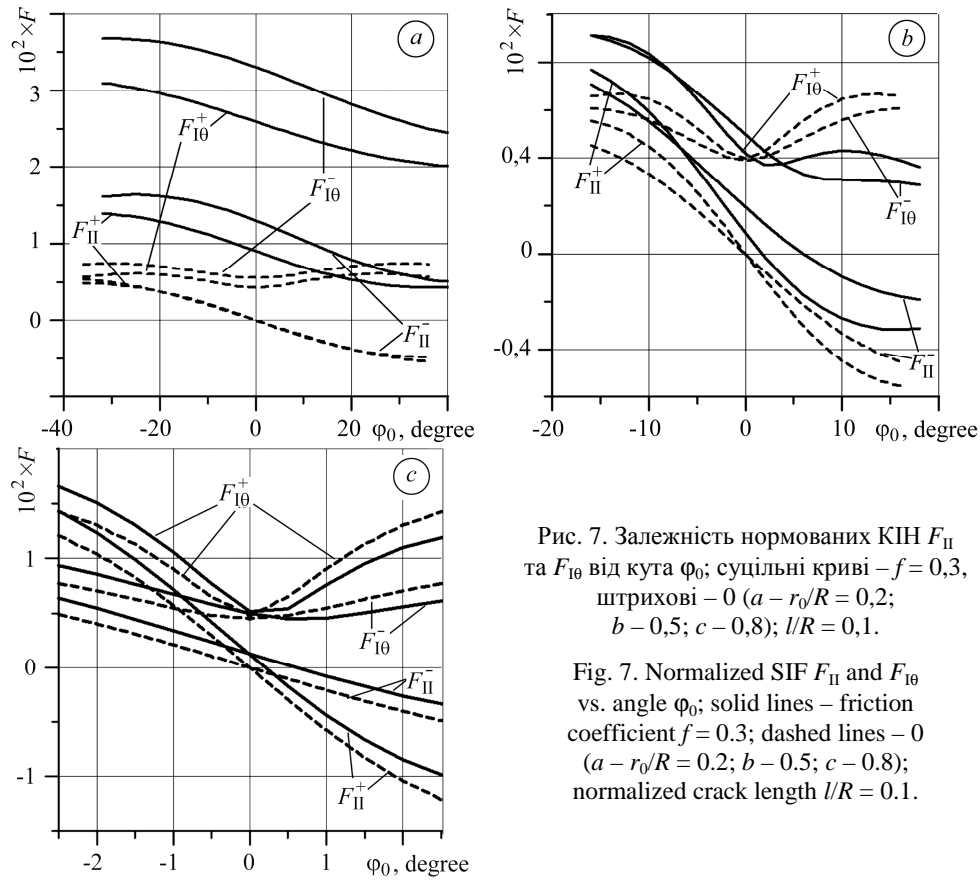


Рис. 7. Залежність нормованих КІН  $F_{II}$  та  $F_{I0}$  від кута  $\varphi_0$ ; суцільні криві –  $f = 0,3$ , штрихові –  $0$  ( $a - r_0/R = 0,2$ ;  $b - 0,5$ ;  $c - 0,8$ );  $l/R = 0,1$ .

Fig. 7. Normalized SIF  $F_{II}$  and  $F_{I0}$  vs. angle  $\varphi_0$ ; solid lines – friction coefficient  $f = 0.3$ ; dashed lines –  $0$  ( $a - r_0/R = 0.2$ ;  $b - 0.5$ ;  $c - 0.8$ ); normalized crack length  $l/R = 0.1$ .

Отримані результати порівнювали з відомими, зокрема, про стискання диска з центральною тріщиною двома протилежно напрямленими зосередженими силами [4, 6] (максимальна різниця між результатами для КІН  $K_I$  складає 0,3%) та для півплощини з внутрішньою перпендикулярною тріщиною під дією еліптично розподіленого нормального тиску і дотичних зусиль на ділянці межі півплощини [12–14].

### ВИСНОВКИ

Розв'язано плоску задачу теорії пружності для кругового диска з радіальною тріщиною, вздовж ободу якого однонапрямлено переміщуються рівномірно розподілені нормальний тиск і дотичні зусилля (модельне контактне навантаження), а в центрі диска прикладені зрівноважувальні зосереджена сила і момент. Числові дані (коефіцієнти інтенсивності напружень) отримано для випадків, коли параметри диска і навантаження є близькі до параметрів пари кочення колесо-рейка.

Що ближче тріщина розташована до центра диска (малі  $r_0/R$ ), то більший діапазон розташувань контактного навантаження на його контурі ( $\Delta\varphi_0$ ), за яких тріщина повністю розкрита, тобто  $K_I^+ > 0$ . Цей діапазон мало залежить від коефіцієнта тертя проковзування  $f$  (рис. 4 і 6). З його збільшенням КІН  $K_I$  змінюються мало, але суттєво зростають КІН  $K_{II}$  і  $K_{I0}$ . Це найбільше проявляється, коли контактне навантаження знаходиться на кінцях зони розкриття  $\Delta\varphi_0$  (рис. 6 і 7). Загалом, максимуми  $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{I0}$  інтенсивно збільшуються з наближенням тріщини до центра диска, а максимуми  $K_{II}$  і  $K_{I0}$  – менше з її наближенням до межі диска (див.

рис. 3). Максимальні значення  $K_I$  досягаються, коли вісь ділянки контакту збігається з лінією тріщини або мало відхиляється від неї.

Найсприятливіші ситуації (конфігурації параметрів задачі  $r_0/R$ ,  $\varphi_0$ ,  $f$ ) для розвитку радіальної тріщини за механізмом нормального розриву, тобто коли досягаються максимальні значення КІН  $K_{I0}$ , реалізуються за таких умов: тріщина розташована близько до центра диска, а контактне навантаження діє на краю центральної зони її розкриття з дотичними зусиллями, спрямованими в бік лінії тріщини (рис. 7a); тріщина розташована дуже близько до межі диска, контактне навантаження діє на початку бічної зони її розкриття, а дотичні зусилля спрямовані від лінії тріщини (див. рис. 5).

З наближенням тріщини до межі диска у граничному випадку отримано числові результати для півплощини з внутрішньою перпендикулярною тріщиною під дією рівномірно розподілених тиску і дотичних зусиль на ділянці межі півплощини (див. рис. 5). Результати добре корелюють з відомими в літературі [12–14].

1. *Инструкция по осмотру, освидетельствованию, ремонту и формированию вагонных колесных пар.* ЦВ/3429. – М.: Транспорт, 1977. – 88 с.
2. *Zerbst U., Madler K., and Hintze H. Fracture mechanics in railway applications – an overview // Eng. Fract. Mech. – 2005. – 72, № 2. – P. 163–194.*
3. *Классификатор неисправностей вагонных колесных пар и их элементов.* 1.20.001–2007. – М.: ОАО “РЖД”, 2007.
4. *Обоснование допускаемых отклонений от формы и схемы нагружения дискового образца для определения трещиностойкости сверхтвердых материалов / С. Я. Ярема, Г. С. Иваницкая, А. Л. Майстренко, Л. Н. Девин // Сверхтвердые материалы. – 1982. – № 1. – С. 27–32.*
5. *Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин.* – К.: Наук. думка, 1989. – 248 с.
6. *Mirsalimov V. M. and Kalantarly N. M. Cracking in a circular disk under mixed boundary conditions // Acta Mech. – 2015. – 226. – P. 1897–1907.*
7. *Dong Sh., Wang Y., and Xia Y. Stress intensity factors for central cracked circular disk subjected to compression // Eng. Fract. Mech. – 2004. – 71. – P. 1135–1148.*
8. *Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.* – М.: Наука, 1966. – 708 с.
9. *Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами.* – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
10. *Саврук М. П., Казберук А. Концентрація напружень у твердих тілах з вирізами // Механіка руйнування та міцність матеріалів: Довідн. посіб. / За заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: Сполом, 2012. – 14. – 384 с.*
11. *Панасюк В. В., Теплий М. Й. Деякі контактні задачі теорії пружності.* – К.: Наук. думка, 1975. – 196 с.
12. *Даццишин О. П., Копилець М. М. Розвиток підповерхневої тріщини при коченні за умов сухого тертя // Машинознавство. – 2002. – № 8. – С. 17–23.*
13. *Даццишин О. П., Панасюк В. В. Контактна довговічність і руйнування елементів конструкцій за циклічного навантаження.* – К.: Наук. думка, 2018. – 288 с.
14. *Datsyshyn O. P. and Panasyuk V. V. Structural integrity assessment of engineering components under cyclic contact. – Cham: Springer, 2020. – 328 p.*

Одержано 22.07.2020