

УДК 539.3

## ОПТИМІЗАЦІЯ ФОРМ ОТВОРІВ У КВАЗІОРТОТРОПНІЙ ПЛАСТИНІ ЗА ДВОВІСНОГО РОЗТЯГУ

М. П. САВРУК, В. С. КРАВЕЦЬ, А. Б. ЧОРНЕНЬКИЙ

*Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів*

На основі розв'язків плоских задач теорії пружності квазіортотропного тіла з криволінійним отвором побудовано аналітико-числовий алгоритм визначення оптимальної форми отвору (з мінімальною концентрацією напружень) для двовісного розтягу пластини. Прямі задачі теорії пружності для квазіортотропних пластин з гладкими отворами розв'язано методом сингулярних інтегральних рівнянь. Розв'язки обернених задач з невідомими формами отворів зведено до мінімізації багатопараметричного функціонала середньоквадратичних відхилень розтягувальних напружень вздовж контурів отворів від заданих їх значень. Знайдено форми оптимальних отворів у квазіортотропній пластині за різних розтягувальних напружень на нескінченності у напрямках осей ортотропії.

**Ключові слова:** *квазіортотропний матеріал, плоский напружений стан, оптимальні отвори, концентрації напружень, сингулярні інтегральні рівняння.*

Based on the solutions of the plane problems of the theory of elasticity for a quasi-orthotropic body with a curvilinear hole, an analytical-numerical algorithm for determining the optimal shape of the hole (with a minimum stress concentration) for biaxial plate tension is constructed. The direct problems of the theory of elasticity for quasi-orthotropic plates with smooth holes are solved by the method of singular integral equations. The solutions of the inverse problems with unknown shapes of the holes are reduced to minimizing the multiparametric functional of the standard deviations of tensile stresses along the contours of the holes from their given values. The shapes of optimal holes in a quasi-orthotropic plate for different tensile stresses at infinity in the directions of orthotropy axes are found.

**Keywords:** *quasi-orthotropic material, plane stress state, optimal holes, stress concentration, singular integral equations.*

**Вступ.** Задачі оптимізації форм різного роду елементів конструкцій належать до обернених задач теорії пружності з невідомими межами і їх зводять до мінімізації т. зв. функціоналів якості, побудова яких ґрунтується на розв'язках відповідних прямих задач. Низку задач для таких отворів у пружній ізотропній площині розв'язано різними методами [1–5]. Відповідні задачі оптимізації форм отворів для анізотропних тіл (різного роду композитних матеріалів) значно складніші, оскільки напружений стан таких тіл суттєво залежить як від способу навантаження, так і від орієнтації самих отворів відносно осей анізотропії матеріалу. Деякі розв'язки таких задач отримано для анізотропних пластин [4, 6].

Нижче розглянуто задачу оптимізації форми отвору в квазіортотропній пластині за двовісного розтягу на нескінченності. Для прямих задач плоскої теорії пружності для квазіортотропних тіл з отворами використано ефективні розв'язки, отримані методом сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) [7–10]. Розв'язки обернених задач для областей з невідомими межами побудовано на основі відомої методики [5]. Для мінімізації багатопараметричного функціонала середньоквадратичних відхилень розтягувальних напружень, які діють на контурі отвору

*Контактна особа:* В. С. КРАВЕЦЬ, e-mail: v.kravets@nas.gov.ua

у тангенціальному напрямі, від заданих значень застосовано квазіньютонівський метод з використанням скінченно-різницевого першого похідних [11].

**Формулювання оберненої задачі з невідомою межею пружного тіла.** Розглянемо задачу теорії пружності для нескінченної квазіортотропної пластини з гладким отвором, на контурі  $L$  якого задані напруження

$$N^*(t) + iT^*(t) = p^*(t), \quad t \in L, \quad (1)$$

де  $N^*(t)$  і  $T^*(t)$  – нормальна та дотична компоненти вектора напружень, прикладених до контуру отвору із зовнішньою нормаллю  $n$  (рис. 1). За додатний прийнято напрям обходу контуру  $L$ , за якого область тіла  $S^+$  залишається зліва. На нескінченності пластини розтягується напруженнями  $\sigma_x^\infty = q$  і  $\sigma_y^\infty = p$ . Напрямки осей  $x$  і  $y$  декартової системи координат вибрано вздовж головних осей ортотропії. Тут квазіортотропний матеріал – окремий клас виведених ортотропних матеріалів, для яких корені характеристичного рівняння кратні і суто уявні  $\mu_1 = \mu_2 = i\gamma$  [7, 10]. Для плоского напруженого стану  $\gamma = \sqrt[4]{E_x/E_y}$  – основний параметр ортотропії, а модуль зсуву виражається через інші сталі залежністю  $G = E_x / [2(\sqrt{E_x/E_y} + \nu_{xy})]$ , де  $E_x, E_y$  – модулі пружності вздовж осей  $x$  і  $y$ ,  $\nu_{xy}$  – коефіцієнт Пуассона. Для ізотропного матеріалу параметр  $\gamma = 1$ .

Необхідно знайти форму криволінійного отвору  $L_0$ , у всіх точках якого нормальні напруження в напрямі дотичної  $\sigma_s^*(t)$  набували б сталих значень

$$\sigma_s^*(t) = c = \text{const}, \quad t \in L_0. \quad (2)$$

Такі отвори називатимемо оптимальними. За довільного навантаження контуру отвору (1) стали  $c$  треба знаходити з розв'язку задачі. Для вільних отворів ( $p^*(t) = 0$ ) у ізотропних пластинках під дією вищезаданого двовісного навантаження ця стала відома [2, 5]:  $c = p + q$ .

Для однозначності розв'язку оберненої задачі з невідомою межею тіла необхідно задати додаткові умови. Для пластини з одним отвором достатньо задати один параметр, наприклад, його діаметр чи площу. Крім того, не завжди існують розв'язки таких задач. Надалі розглядатимемо лише такі навантаження, для яких оптимальні форми отворів існують.

**Пряма задача.** Першу основну задачу плоскої теорії пружності для нескінченного квазіортотропного тіла з гладким отвором розв'язуватимемо методом СІР [10]. Застосуємо метод суперпозиції, шукаючи комплексні потенціали напружень для квазіортотропного тіла у вигляді  $\Phi_1^*(z_1) = \Phi_1^0(z_1) + \Phi_1(z_1)$ ,  $\Psi_1^*(z_1) = \Psi_1^0(z_1) + \Psi_1(z_1)$ , де  $\Phi_1^0(z_1) = (p + \gamma^{-2}q)/4$ ,  $\Psi_1^0(z_1) = (p - \gamma^{-2}q)/2$  – задані функції, що описують однорідний напружено-деформований стан у суцільній квазіортотропній пластині без отворів, а потенціали  $\Phi_1(z_1)$  і  $\Psi_1(z_1)$  визначають

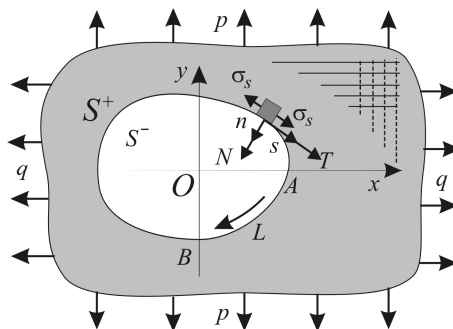


Рис. 1. Пружна квазіортотропна пластинка з гладким криволінійним отвором.

Fig. 1. An elastic quasi-orthotropic plate with a smooth curvilinear hole.

збурений напружений стан, зумовлений отворами [9, 10]. Комплексні потенціали напружень  $\Phi_1(z_1)$  та  $\Psi_1(z_1)$  і самі інтегральні рівняння для такої задачі мають аналогічний вигляд, як і для ізотропного матеріалу [5], однак записані у математичній площині  $z_1 = x + i\gamma y$  (тут і надалі індекс "1" позначає запис відповідних величин у площині  $z_1$ , зокрема, точці  $t_1 \in L_1$  відповідає точка  $t \in L$  у площині  $z = x + iy$  [8–10]). Крайову умову (1) для збуреного напруженого стану запишемо в площині  $z_1$  у вигляді

$$\left[ (i/\gamma)X_n - Y_n \right] \frac{ds}{dt_1} = \tilde{P}(t) = \tilde{P}_1(t_1) = \frac{1}{2\gamma} \left[ (1 + \gamma)p(t) - (1 - \gamma)\overline{p(t)} \frac{d\bar{t}}{dt} \right] \frac{dt}{dt_1}, \quad t \in L, \quad (3)$$

де  $X_n$  і  $Y_n$  – декартові компоненти вектора напружень, що діють зі сторони зовнішньої нормалі  $n$  на криволінійному контурі  $L$ ;

$$p(t) = p^*(t) - \{p + q + (p - q)\overline{dt}/dt\} / 2.$$

Знайшовши граничні значення комплексних потенціалів при  $z_1 \rightarrow t_1 \in L_1$  і задовольнивши з їх допомогою крайову умову (3), отримуємо СІР

$$\int_{L_1} [K(\tau_1, t_1)g'_1(\tau_1)d\tau_1 + L(\tau_1, t_1)\overline{g'_1(\tau_1)}d\bar{\tau}_1] - \frac{M_1}{2i\bar{t}_1^2} \frac{d\bar{t}_1}{dt_1} + \frac{a_1}{l} \frac{ds_1}{dt_1} = \pi\tilde{P}_1(t_1). \quad (4)$$

Тут  $K(\tau_1, t_1) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\tau_1 - t_1} + \frac{1}{\bar{\tau}_1 - \bar{t}_1} \frac{d\bar{t}_1}{dt_1} \right]$ ;  $L(\tau_1, t_1) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\bar{\tau}_1 - \bar{t}_1} - \frac{\tau_1 - t_1}{(\bar{\tau}_1 - \bar{t}_1)^2} \frac{d\bar{t}_1}{dt_1} \right]$ ,  $g'_1(t_1)$  –

шукана комплексна неперервна функція на контурі  $L_1$ ;  $s_1$  – дугова абсциса, що відповідає точці  $t_1$ ,  $l$  – довільний параметр задачі розмірності довжини;

$M_1 = i \int_{L_1} [g'_1(t_1)\bar{t}_1 dt_1 - \overline{g'_1(t_1)t_1} d\bar{t}_1]$ ,  $a_1 = \int_{L_1} g'_1(t_1) dt_1$  – нульові доданки, які забезпечують

єдиність розв'язку СІР за довільної правої частини  $\tilde{P}_1(t_1)$  (3) [9, 10]. Числовий розв'язок СІР знаходимо методом квадратур.

Коли контур отвору вільний від навантажень ( $p^*(t) = 0$ ), то контурні напруження визначаємо з виразу

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \text{Re}\{2(1 + \gamma^2)ig'_1(t_1) + (1 - \gamma^2)i[\overline{g'_1(t_1)} - g'_1(t_1)]d\bar{t}_1 / dt_1\} = \\ &= -2\text{Im}\{g'_1(t_1)\} \left[ (1 + \gamma^2) - (1 - \gamma^2)\text{Re}\{d\bar{t}_1 / dt_1\} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Тут і надалі  $\sigma_s \equiv \sigma_s^*(t)$ ,  $t \in L$  – нормальні напруження на контурі отвору у тангенціальному напрямі (рис. 1).

**Аналітичний розв'язок для еліптичного отвору в квазіортотропній пластині.** Щоб отримати аналітичний розв'язок для напружень  $\sigma_s$  за двовісного розтягу на нескінченності  $\sigma_x^\infty = q$ ,  $\sigma_y^\infty = p$  квазіортотропної пластини з вільним ( $p^*(t) = 0$ ) еліптичним отвором

$$t = \omega(\xi) = a\{\cos(\xi) - i\varepsilon\sin(\xi)\}, \quad \varepsilon = b/a, \quad \xi \in [0; 2\pi] \quad (6)$$

(див. схему на рис. 2а), використаємо відомий [10, 12] розв'язок за вертикального розтягу такої пластини

$$\sigma_s(p, \xi) = \frac{\gamma^2(\sin^2 \xi + \varepsilon^2 \cos^2 \xi)(\varepsilon^2 \gamma^2 \cos^2 \xi + 2\varepsilon\gamma \cos^2 \xi - \sin^2 \xi)}{(\sin^2 \xi + \varepsilon^2 \gamma^2 \cos^2 \xi)^2} p. \quad (7)$$

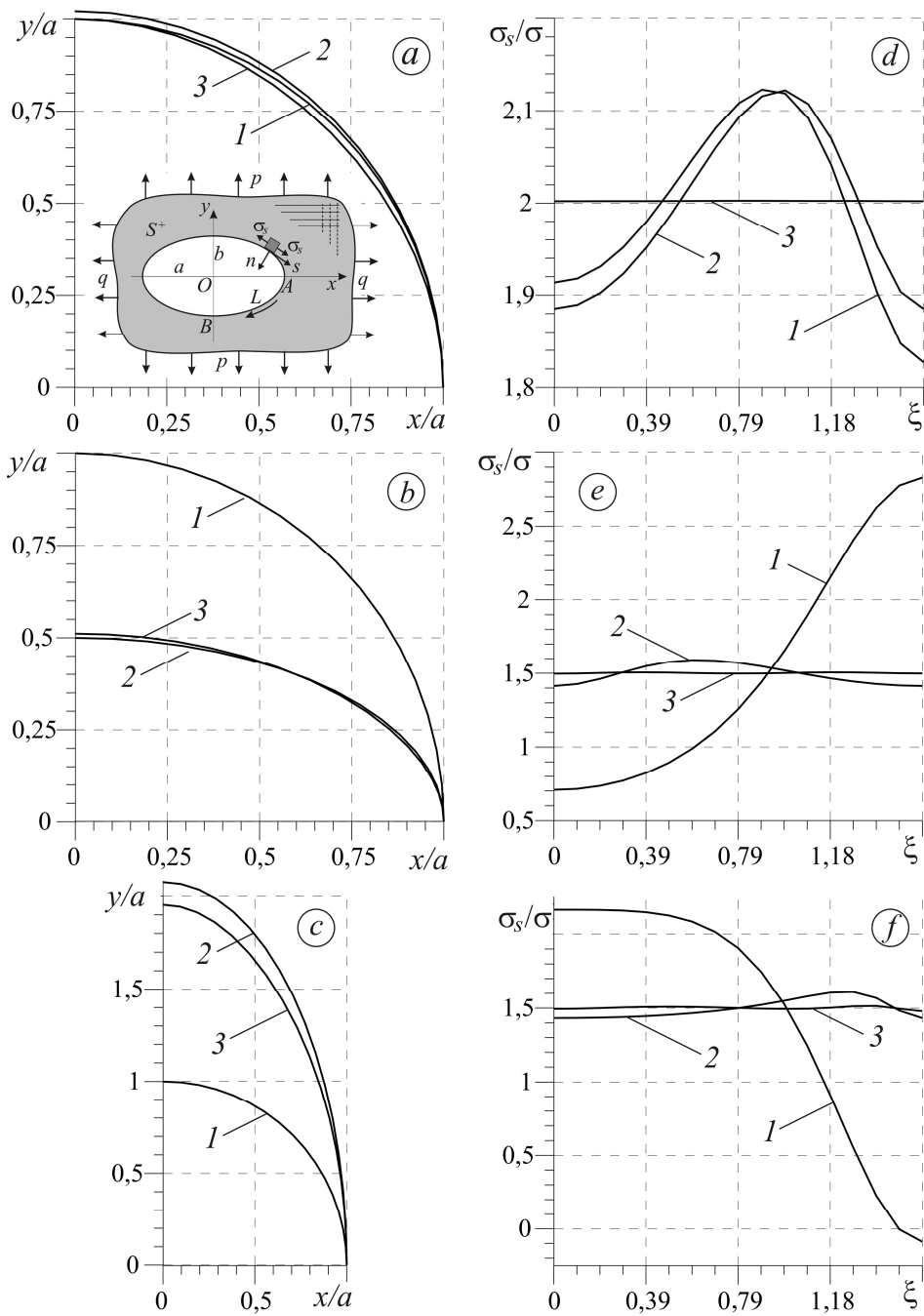


Рис. 2. Форми отворів у I квадранті (a–c) та відповідні їм розподіли напружень  $\sigma_s/\sigma$  (d–f) для параметра ортотропії  $\gamma = 1,4$  за навантажень  $p = q = \sigma$  (a, d);  $p = 0,5\sigma$ ,  $q = \sigma$  (b, e);  $p = \sigma$ ,  $q = 0,5\sigma$  (c, f): 1 – коло; 2 – оптимальний з множини еліпсів; 3 – оптимальний отвір.

Fig. 2. Shapes of the holes in the first quadrant (a–c) and the corresponding stress distributions  $\sigma_s/\sigma$  (d–f) for the orthotropy parameter  $\gamma = 1.4$  for loads  $p = q = \sigma$  (a, d);  $p = 0.5\sigma$ ,  $q = \sigma$  (b, e);  $p = \sigma$ ,  $q = 0.5\sigma$  (c, f): 1 – circle; 2 – optimal of the multiplicity of ellipses; 3 – optimal hole.

Зробивши у виразі (7) заміну  $p \rightarrow q$ ,  $\gamma \rightarrow 1/\gamma$ ,  $\varepsilon \rightarrow 1/\varepsilon$ ,  $\xi \rightarrow \xi + \pi/2$ , для горизонтального розтягу  $\sigma_x^\infty = q$  отримаємо:

$$\sigma_s(q, \xi) = \frac{(\cos^2 \xi + (1/\varepsilon)^2 \sin^2 \xi)((1/\varepsilon\gamma)^2 \sin^2 \xi + (2/\varepsilon\gamma) \sin^2 \xi - \cos^2 \xi) / \gamma^2}{(\cos^2 \xi + (1/\varepsilon\gamma)^2 \sin^2 \xi)^2} q. \quad (8)$$

Додавши вирази (7) і (8), матимемо контурні напруження  $\sigma_s(t)$  для еліптичного отвору за двовісного розтягу квазіортотропної пластини напруженнями  $q$  і  $p$  вздовж  $x, y$ -осей координат

$$\sigma_s(\xi) = \sigma_s(p, \xi) + \sigma_s(q, \xi), \quad \xi \in [0; 2\pi]. \quad (9)$$

Знайдемо таке співвідношення  $\varepsilon_0 = b_0/a$  півосей еліпса (6), для якого напруження (9) в осьових точках  $A = \omega(0)$ ,  $B = \omega(\pi/2)$  однакові:  $\sigma_s(A) = \sigma_s(B)$ . З цієї умови на основі виразів (7)–(9) одержимо:

$$1 + 2/(\gamma\varepsilon_0) - \tilde{\varepsilon}/\gamma^2 = (1 + 2\gamma\varepsilon_0)\tilde{\varepsilon} - \gamma^2; \quad \varepsilon_0 = \left( \sqrt{c_2^2 + 8c_1/\gamma - c_2} \right) / (2c_1), \quad (10)$$

де  $\tilde{\varepsilon} = q/p$ ,  $c_1 = 2\gamma\tilde{\varepsilon}$ ,  $c_2 = (\gamma^2 + 1)(\tilde{\varepsilon}/\gamma^2 - 1)$ . Такі еліпси (оптимальні з множини еліпсів) можуть слугувати першим наближенням для пошуку оптимальних отворів у квазіортотропній пластині. Для ізотропної пластини ( $\gamma = 1$ ) отримаємо відомий результат  $\varepsilon_0 = b_0/a = p/q$  [1–3, 5] з однаковими напруженнями  $\sigma_s(\xi) = p + q$  по всьому контуру еліптичного отвору.

**Числова оптимізація форм отворів.** Розв'язавши числово СІР (4) для деякого початково заданого (еліптичного (6) або колового) контуру  $L$ , знайдемо напруження (9) у  $n$  вузлових точках  $\omega(\xi_j)$ ;  $\xi_j = 2\pi(j-1)/n$ ;  $j = \overline{1, n}$ . Розглянемо функціонал середньоквадратичного відносного відхилення цих напружень від усередненого значення [5]

$$F[\mathbf{P}] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left\{ \left( \sigma_s[\omega(\mathbf{P}, \xi_j)] - \tilde{\sigma}_s \right) / \tilde{\sigma}_s \right\}^2, \quad \tilde{\sigma}_s = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sigma_s(\xi_j), \quad (11)$$

де  $\mathbf{P} = (P_1, P_2, \dots, P_M)$  набір параметрів задачі оптимізації, за допомогою яких визначатимемо  $M$ -параметричне рівняння контуру  $L$

$$t = \omega(\mathbf{P}, \xi) = x(\mathbf{P}, \xi) - iy(\mathbf{P}, \xi); \quad \xi \in [0; 2\pi]. \quad (12)$$

Мінімізуючи функціонал (11) за параметрами  $P_m$  ( $m = \overline{1, M}$ ), знайдемо такі їх значення  $P_m^0$  (параметри оптимальної форми контуру), за яких напруження  $\sigma_s(\xi)$  вирівнюються по всьому контуру, тобто виконується функціональна умова  $F[\mathbf{P}^0] < \Delta$ , де  $\Delta$  – задане допустиме відхилення відносних контурних напружень від усереднених на шуканому контурі. Для мінімізації багатопараметричного функціонала (11) застосовано квазіньютонівський метод з використанням скінченно-різницевих перших похідних [11].

Алгоритм розрахунку оптимальних форм отворів у квазіортотропній пластині проілюстровано для двох значень основного параметра ортотропії  $\gamma = \sqrt[4]{E_x/E_y} = 1,4$  (рис. 2) та  $\gamma = 2,6$  (рис. 3), де співвідношення  $E_x/E_y$  взяті з характеристик ортотропних матеріалів E-Glass/Ероху ( $E_x = 41,4$  GPa;  $E_y = 10,3$  GPa;  $G_{xy} = 4,27$  GPa;  $\nu_{xy} = 0,28$ ) та Graphite/Ероху ( $E_x = 294$  GPa;  $E_y = 6,34$  GPa;  $G_{xy} = 4,9$  GPa;  $\nu_{xy} = 0,23$ ) [13]. Розглянуто три випадки двовісного розтягу пластини на нескінченності напруженнями  $\sigma_x^\infty = q$  і  $\sigma_y^\infty = p$ :  $p = q = \sigma$  (рис. 2a, d; 3a, d);  $p = 0,5\sigma$ ,  $q = \sigma$  (рис. 2b, e; 3b, e) і  $p = \sigma$ ,  $q = 0,5\sigma$  (рис. 2c, f; 3c, f), де  $\sigma$  – загальний параметр навантажен-

ня. Для параметра ортотропії  $\gamma = 1,4$  оптимальний контур шукаємо у вигляді (12) за допомогою тригонометричних рядів з  $M = 5$  параметрами

$$\begin{aligned} x(\mathbf{P}, \xi) / a &= P_1 \cos(\xi) + P_2 \cos(3\xi) + (1 - P_1 - P_2) \cos(5\xi); \\ y(\mathbf{P}, \xi) / a &= P_3 \sin(\xi) + P_4 \sin(3\xi) + P_5 \sin(5\xi); \quad \xi \in [0; 2\pi], \end{aligned} \quad (13)$$

де враховано  $x, y$ -симетрію задачі та фіксацію контуру у точці  $A$  ( $x(\xi = 0) = a$ ).

Знайдено розподіли напружень (9) на стартових колових отворах (рис. 2d-f; 3d-f, криві 1), на оптимальних з множини еліпсів (з параметрами, для яких  $\sigma_s(A) = \sigma_s(B)$ ) (криві 2) та на знайдених оптимальних отворах (12), (13) (криві 3). Обчислено параметри оптимальних отворів та максимальні відносні відхилення  $\delta$  (%) напружень  $\sigma_s(\xi_j)$  від усереднених  $\bar{\sigma}_s$  ( $\delta = \max |(\sigma_s(\xi_j) - \bar{\sigma}_s) / \bar{\sigma}_s| 100\%$ ) на них та відповідні  $\delta_0$  (%) – на оптимальних з множини еліпсів (табл. 1).

**Таблиця 1. Параметри оптимальних отворів ( $M = 5; \gamma = 1,4$ ) та максимальні відносні відхилення контурних напружень від усереднених**

$\gamma = 1,4$	$P_1^0$	$P_2^0$	$P_3^0$	$P_4^0$	$P_5^0$	$\delta, \%$	$\delta_0, \%$	$\epsilon_0 = b_0/a$
$p = q = \sigma$	0,989	0,016	0,991	-0,014	-0,005	0,12	6,12	1,021
$p = \sigma/2, q = \sigma$	0,993	0,023	0,506	-0,015	-0,010	0,52	6,07	0,500
$p = \sigma, q = \sigma/2$	0,986	0,021	1,952	-0,011	-0,007	0,82	7,30	2,074

Для квазіортотропної пластини з більшим параметром  $\gamma$  діапазон значень контурних напружень  $\sigma_s$  значно ширший і для задовільної мінімізації функціонала (11) оптимальний контур необхідно шукати за більшої кількості параметрів  $P_m$ . Для параметра  $\gamma = 2,6$  (рис. 3) пошук здійснено за аналогічними розкладами з  $M = 9$  параметрами  $P_m$  (табл. 2)

$$\begin{aligned} x(\mathbf{P}, \xi) / a &= P_1 \cos(\xi) + P_2 \cos(3\xi) + P_3 \cos(5\xi) + P_4 \cos(7\xi) + \\ &+ (1 - P_1 - P_2 - P_3 - P_4) \cos(9\xi); \\ y(\mathbf{P}, \xi) / a &= P_5 \sin(\xi) + P_6 \sin(3\xi) + P_7 \sin(5\xi) + P_8 \sin(7\xi) + P_9 \sin(9\xi); \quad \xi \in [0; 2\pi]. \end{aligned}$$

Для параметра ортотропії  $\gamma = 1$  (ізотропного матеріалу) отримуємо відомі [1–3, 5] еліптичні контури отворів зі співвідношенням півосей  $b/a = p/q$ .

**Таблиця 2. Параметри оптимальних отворів  $P_m = P_m^0$  ( $m = \overline{1,9}$ ) та максимальні відносні відхилення контурних напружень від усереднених ( $\gamma = 2,6$ )**

$\gamma = 2,6$	$P_1 / P_5$	$P_2 / P_6$	$P_3 / P_7$	$P_4 / P_8$	$P_9$	$\delta, \%$	$\delta_0, \%$	$\epsilon_0 = b_0/a$
$p = q = \sigma$	$\frac{1,030}{0,820}$	$\frac{0,037}{-0,205}$	$\frac{-0,079}{-0,040}$	$\frac{0,011}{0,018}$	-0,001	5,22	56,9	1,383
$p = \sigma/2, q = \sigma$	$\frac{0,908}{0,557}$	$\frac{0,084}{-0,014}$	$\frac{0,039}{-0,024}$	$\frac{-0,021}{-0,024}$	-0,003	5,23	40,8	0,643
$p = \sigma, q = \sigma/2$	$\frac{0,951}{1,524}$	$\frac{0,028}{-0,082}$	$\frac{-0,027}{0,093}$	$\frac{0,051}{0,033}$	-0,022	4,49	69,6	2,875

Розподіли напружень  $\sigma_s$  (9) по колових та еліптичних отворах за двовісного розтягу квазіортотропних пластин якісно різняться від аналогічних для ортотропних [6, 14]. Зокрема, для всестороннього розтягу ( $p = q$ ) квазіортотропної пластини з коловим отвором максимальні напруження  $\sigma_s$  отримано у діапазоні значень параметра  $\xi \in (\pi/4; \pi/3)$  (рис. 2d, 3d), коли для ортотропних пластин вони мак-

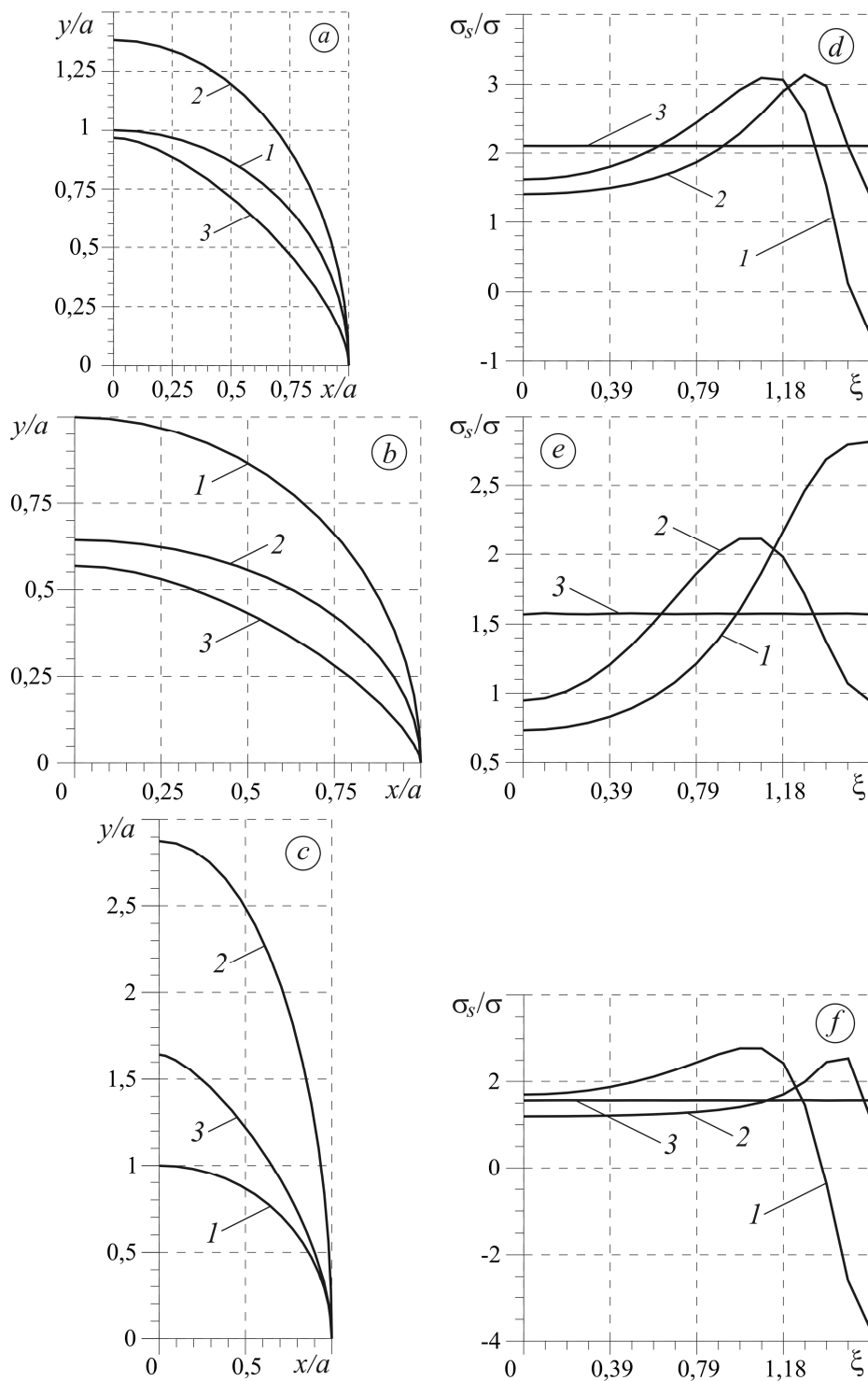


Рис. 3. Форми отворів у I квадранті (a-c) та відповідні їм розподіли напружень  $\sigma_s/\sigma$  (d-f) для параметра ортотропії  $\gamma = 2.6$  за навантажень  $p = q = \sigma$  (a, d);  $p = 0.5\sigma, q = \sigma$  (b, e);  $p = \sigma, q = 0.5\sigma$  (c, f): 1 – коло; 2 – оптимальний з множини еліпсів; 3 – оптимальний отвір.

Fig. 3. Shapes of the holes in the first quadrant (a-c) and the corresponding stress distributions  $\sigma_s/\sigma$  (d-f) for the orthotropy parameter  $\gamma = 2.6$  for loads  $p = q = \sigma$  (a, d);  $p = 0.5\sigma, q = \sigma$  (b, e);  $p = \sigma, q = 0.5\sigma$  (c, f): 1 – circle; 2 – optimal of the multiplicity of ellipses; 3 – optimal hole.

симальні в осьових точках ( $\xi = 0$ ;  $\xi = \pi/2$ ) [6, 14]. Внаслідок різних розподілів напружень  $\sigma_x$  у квазіортотропних і ортотропних пластинах форми оптимальних отворів у них теж різні (за однакових двовісних навантажень). З ростом параметра  $\gamma$  оптимальні отвори стискаються у міжосьовому діапазоні ( $\pi/8 < \xi < 3\pi/8$ ) для квазіортотропних пластин (рис. 3d, e, f, криві 3) і навпаки – розтягаються для ортотропних [6].

### ВИСНОВКИ

Запропоновано методику визначення оптимальних контурів отворів у квазіортотропних пластинах, яка ґрунтується на числовому розв'язуванні сингулярних інтегральних рівнянь. Обернені задачі теорії пружності для квазіортотропного тіла з невідомою межею зведено до мінімізації багатопараметричного функціонала середньоквадратичних відхилень нормальних напружень від заданих сталих. Для цього використано ефективні розв'язки відповідних прямих задач для плоского квазіортотропного тіла з гладким отвором. Знайдено оптимальні форми отворів для трьох випадків двовісного розтягу пластин з різними параметрами ортотропії. На відміну від ізотропних тіл незначні зміни форми отвору в квазіортотропній пластині призводять до суттєвих змін у розподілах контурних напружень.

1. Черепанов Г. П. Обратные задачи плоской теории упругости // Прикл. математика и механика. – 1974. – **38**, № 6. – С. 963–979.
2. Космодамианский А. С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. – К.: Вищ. шк., 1975. – 228 с.
3. Вигдергауз С. Б. Интегральное уравнение обратной задачи плоской теории упругости // Прикл. математика и механика. – 1976. – **40**, № 3. – С. 566–569.
4. Мирсалимов В. М. Неоднородные упругопластические задачи. – М.: Наука, 1987. – 256 с.
5. Саврук М. П., Кравець В. С. Застосування методу сингулярних інтегральних рівнянь для визначення контурів рівномісних отворів у пластинах // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – **38**, № 1. – С. 31–40.  
(Savruk M. P. and Kravets' V. S. Application of the method of singular integral equations to the determination of the contours of equistrong holes in plates // Materials Science. – 2002. – **38**, № 1. – P. 34–46.)
6. Божидарнік В. В., Максимович О. В. Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами. – Луцьк: ЛДТУ, 2003. – 226 с.
7. Hasebe N. and Sato M. Stress analysis of quasi-orthotropic elastic plane // Int. J. Solids Struct. – 2013. – **50**. – P. 209–216.
8. Kazberuk A., Savruk M. P., and Chornenkyi A. B. Stress distribution at sharp and rounded V-notches in quasi-orthotropic plane // Int. J. Solids Struct. – 2016. – **85**. – P. 134–143.
9. Саврук М. П., Казберук А., Чорненький А. Б. Періодична система близько розташованих отворів у квазіортотропній площині // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2018. – **54**, № 5. – С. 48–55.  
(Savruk M. P., Kazberuk A., and Chornenkyi A. B. Periodic system of closely located holes in a quasiorthotropic plane // Materials Science. – 2019. – **54**, № 5. – P. 656–665.)
10. Savruk M. P. and Kazberuk A. Stress Concentration at Notches. – Cham: Springer, 2017. – 516 p.
11. Dennis J. E. and Schnabel R. B. Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations. – New Jersey: Englewood Cliffs, 1983. – 378 p.
12. Казберук А., Саврук М. П., Чорненький А. Б. Концентрація напружень біля еліптичного отвору чи параболічного вирізу у квазіортотропній площині // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2016. – **52**, № 3. – С. 7–14.  
(Kazberuk A., Savruk M. P., and Chornenkyi A. B. Stress concentration near an elliptic hole or a parabolic notch in a quasiorthotropic plane // Materials Science. – 2016. – **52**, № 3. – P. 656–665.)
13. Esp V. and Chan W. S. Two parameter approximation to the orthotropic stress concentration factor. – Long Beach: SAMPE, 2008. – 10 p.
14. Лехницький С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.

Одержано 27.01.2021