

УДК 539.3

КОНЦЕНТРАЦІЯ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ КРИВОЛІНІЙНИХ ОТВОРІВ ТА ВИРІЗІВ З НЕГЛАДКИМИ КОНТУРАМИ

М. П. САВРУК

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Наведено огляд досліджень концентрації напружень у пружних тілах, послаблених криволінійними отворами та вирізами з негладкими контурами. Особливу увагу приділено асимптотичному підходу до вивчення розподілу напружень біля таких концентраторів, коли коефіцієнти інтенсивності напружень у гострих вершинах вирізів знаходять з коефіцієнтів концентрації напружень у закругленій вершині кутового вирізу.

Ключові слова: *механіка руйнування, коефіцієнт інтенсивності напружень, коефіцієнт концентрації напружень, кутовий виріз, гострокутний отвір.*

The survey of studies on stress concentration in elastic bodies weakened by curvilinear holes and notches with unsmooth contours is presented. Special attention is paid to the asymptotic approach to the problems of stress distribution near these stress concentrators, when stress intensity factors at sharp vertices are found from the stress concentration factors at the rounded vertices of V-shaped notches.

Keywords: *fracture mechanics, stress intensity factor, stress concentration factor, V-shaped notch, acute-angled hole.*

Вступ. Проблема концентрації напружень біля отворів – одна з найважливіших у механіці деформівного твердого тіла. Особливо небезпечними концентраторами напружень є тріщини (окремий тип отворів) і гострокутні вирізи та отвори, які у лінійній теорії пружності призводять до особливостей поля напружень у їх вершинах. Для оцінювання міцності елементів конструкцій з такими концентраторами використовують підходи механіки руйнування. На сьогодні найбільш розвинуто методи розв'язування задач концентрації напружень біля гладких криволінійних отворів [1–3], однак розподіл напружень біля концентраторів з негладкими контурами ще мало досліджений. Це можна пояснити великими математичними труднощами, які виникають під час розв'язування крайових задач теорії пружності для областей з негладкими межами [4]. Тому важливого значення набувають наближені методи розв'язування такого класу задач на основі даних для концентрації напружень у вершинах закруглених кутових вирізів. Нижче наведено огляд досліджень концентрації напружень біля гострих та закруглених кутових вирізів у пружних твердих тілах, отриманих методом сингулярних інтегральних рівнянь. При цьому коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) у гострих вершинах кутових вирізів знайдено на основі асимптотичного аналізу поля напружень в околі вершини, закругленої дугою кола малого радіуса. Детальніший огляд цих досліджень можна знайти у довідникових посібниках [5, 6].

Власні функції однорідних сингулярних задач теорії пружності для клина. Розглянемо плоску та антиплоску задачі теорії пружності на власні значення для

пружного клина (двогранного кута), що займає область $S = \{(r, \theta, z); r \geq 0, -\alpha \leq \theta \leq \alpha (2\alpha > \pi), -\infty < z < \infty\}$, де r, θ, z – циліндричні координати з полюсом у вершині клина і полярною віссю вздовж його бісектриси (вісь антиплоскої деформації напрямлена вздовж осі z декартової системи координат (x, y, z))

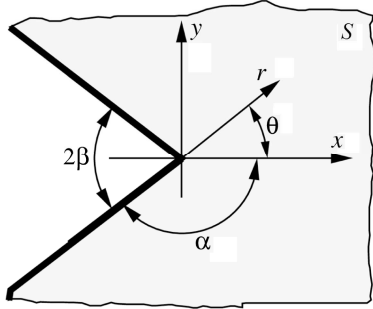


Рис. 1. Пружний клин з кутом розхилу 2α .

Fig. 1. Elastic wedge with a vertex angle 2α .

клинні, мають вигляд [9]

$$\begin{aligned} \Phi_0(z) &= -\frac{\tilde{K}_I^V}{(2\pi z)^{\lambda_I}} \frac{\sin 2\alpha}{(\lambda_I - 2)\sin 2\alpha + \sin 2\lambda_I \alpha} + \frac{i\tilde{K}_{II}^V}{(2\pi z)^{\lambda_{II}}} \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\lambda_{II} \alpha - \lambda_{II} \sin 2\alpha}, \\ \Psi_0(z) &= \frac{\tilde{K}_I^V}{(2\pi z)^{\lambda_I}} \frac{\sin(2\lambda_I \alpha)}{(\lambda_I - 2)\sin 2\alpha + \sin 2\lambda_I \alpha} + \frac{i\tilde{K}_{II}^V}{(2\pi z)^{\lambda_{II}}} \frac{\sin 2\lambda_{II} \alpha}{\sin 2\lambda_{II} \alpha - \lambda_{II} \sin 2\alpha}; \\ F_0(z) &= -\frac{i\tilde{K}_{III}^V}{(2\pi z)^{\lambda_{III}}}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{де} \quad \tilde{K}_I^V = \lim_{r \rightarrow 0} \left[(2\pi r)^{\lambda_I} \sigma_{\theta\theta}(r, 0) \right], \quad \tilde{K}_{II}^V = \lim_{r \rightarrow 0} \left[(2\pi r)^{\lambda_{II}} \tau_{r\theta}(r, 0) \right],$$

$$\tilde{K}_{III}^V = \lim_{r \rightarrow 0} \left[(2\pi r)^{\lambda_{III}} \tau_{z\theta}(r, 0) \right] - \text{КІН у вершині кутового вирізу з кутом розхилу}$$

2β ; показники степеневих особливостей напружень $\lambda_I, \lambda_{II}, \lambda_{III}$ залежать від кута розхилу (рис. 2) і є коренями характеристичних рівнянь

$$(1 - \lambda) \sin 2\alpha + \sin(2\alpha(1 - \lambda)) = 0, \quad (4)$$

$$(1 - \lambda) \sin 2\alpha - \sin(2\alpha(1 - \lambda)) = 0, \quad (5)$$

$$\sin 2\alpha(1 - \lambda) = 0 \quad (6)$$

для плоскої (4), (5) та антиплоскої (6) задач теорії пружності на власні значення для клина з кутом розхилу $2\alpha = 2(\pi - \beta)$ з діапазону $0 < \lambda < 1$ за симетричного (4) і антисиметричного (5) розподілів напружень. Поряд з КІН $\tilde{K}_I^V, \tilde{K}_{II}^V, \tilde{K}_{III}^V$ також використовують дещо інші величини:

$$K_I^V = (2\pi)^{1/2 - \lambda_I} \tilde{K}_I^V, \quad K_{II}^V = (2\pi)^{1/2 - \lambda_{II}} \tilde{K}_{II}^V, \quad K_{III}^V = (2\pi)^{1/2 - \lambda_{III}} \tilde{K}_{III}^V.$$

На основі числових результатів (рис. 2) для показників λ_I, λ_{II} побудовано апроксимувальні залежності від кута β [5, 6], а для параметра λ_{III} відомий точний вираз:

$$\lambda_I \approx 1,247 \cos \beta - 1,312 \cos^2 \beta + 0,8532 \cos^3 \beta - 0,2882 \cos^4 \beta, \quad 0 \leq \beta \leq \pi/2,$$

$$\lambda_{II} \approx 0,5 - 0,3134 \operatorname{tg} \beta - 0,2479 \operatorname{tg}^2 \beta + 0,1937 \operatorname{tg}^3 \beta - 0,0410 \operatorname{tg}^4 \beta, \quad 0 \leq \beta \leq \beta^*,$$

$$\lambda_{III} = 1 - \pi/(2\alpha) = 1 - \pi/(2(\pi - \beta)), \quad 0 \leq \beta \leq \pi/2.$$

Тут кут $\beta^* = 0,8945$ ($51,2733^\circ$) – корінь рівняння $\operatorname{tg} 2\alpha = 2\alpha$, що визначає діапазон зміни кута β ($0 \leq \beta < \beta^*$), в якому напруження у вершині гострого кутового вирізу особливі за антисиметричного розподілу. Максимальна абсолютна похибка цих формул не перевищує 0,001.

Співвідношення (3) визначають сингулярні напруження у пружному клині. Для нескінченного клина ці співвідношення справедливі у всій пружній області, а для обмежених областей з кутовими вирізами вони виступають як асимптотичні залежності, які характеризують поля напружень та переміщень в околі вершини кутового вирізу.

Вивчати розподіл напружень у пружному клині почав Вігарт [10] ще 1907 р. У 1952 р. Вільямс [11] розглянув задачу на власні значення для пружного клина за різними крайовими умовами на його гранях. Як і для тіл з тріщинами, у механіці руйнування тіл з кутовими вирізами розрізняють три типи їх деформування, коли розтягувальне навантаження симетричне відносно бісекторної площини (тип I), зсувне навантаження антисиметричне відносно бісекторної площини і спрямоване перпендикулярно (тип II) або паралельно (тип III) до ребра вирізу. Перші два типи деформування тіла з кутовим вирізом реалізують зусиллями, які діють у площині, перпендикулярній до ребра вирізу. Їх можна досліджувати у межах плоскої задачі теорії пружності. Третій тип деформування, який викликаний силами, паралельними до ребра вирізу, називають поздовжнім зсувом або анти-плоскою деформацією.

Використання власних функцій однорідних сингулярних задач теорії пружності для клина в задачах механіки руйнування тіл з гострими та закругленими кутовими вирізами. У механіці руйнування важливе значення мають дослідження поля напружень і переміщень у твердих тілах з гострими та закругленими дугами малих радіусів кривини кутовими вирізами. У вершинах таких вирізів навіть невеликий рівень навантаження в лінійній теорії пружності зумовлює напруження, які перевищують границю міцності матеріалу, що не дає змоги застосувати класичні критерії до оцінювання здатності елементів конструкцій витримувати навантаження. Розв'язування задач про концентрацію напружень біля кутових вирізів, як крайових задач теорії пружності для областей з негладкими межами, викликає великі математичні труднощі. Тому важливого значення набувають наближені асимптотичні методи розв'язування такого класу задач на основі даних про концентрацію напружень у вершинах закруглених кутових вирізів (не дуже малого радіуса кривини), які можна отримати різними методами. Двовимірні крайові задачі теорії пружності для багатозв'язних областей з гладкою межею ефективно розв'язують методом сингулярних інтегральних рівнянь [8]. Цим підходом можна встановити різного типу асимптотичні залежності між різними параметрами механіки руйнування, коли радіус закруглення кутово-

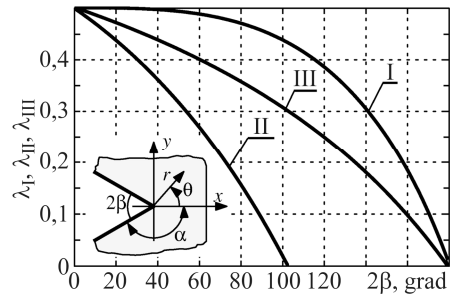


Рис. 2. Залежності показників особливостей напружень $\lambda_I, \lambda_{II}, \lambda_{III}$ від кута розхилу вирізу 2β .

Fig. 2. Dependences of stress exponents $\lambda_I, \lambda_{II}, \lambda_{III}$ on the notch opening angle 2β .

го вирізу прямує до нуля, зокрема між КІН та коефіцієнтами концентрації напружень для гострих та закруглених кутових вирізів, між КІН у вершинах кутового вирізу та тріщини при ньому [5, 6]. Для цього у пружному клині на контурі L , який складається з двох променів, паралельних до граней клина і з'єднаних плавно дугою кола радіуса ρ (рис. 3а), задають вектор нормальних (σ_n^0) та дотичних (τ_{ns}^0, τ_{nz}^0) напружень

$$\sigma_n^0 + i\tau_{ns}^0 = \Phi_0(t) + \overline{\Phi_0(t)} + \frac{dt}{dt} \left[t\overline{\Phi_0'(t)} + \overline{\Psi_0(t)} \right] = -p(t),$$

$$\tau_{nz}^0 = \text{Im} \left[F_0(t) \frac{dt}{ds} \right] = -\tau(t), \quad t \in L,$$
(7)

де s – дугова абсциса, що відповідає точці t .

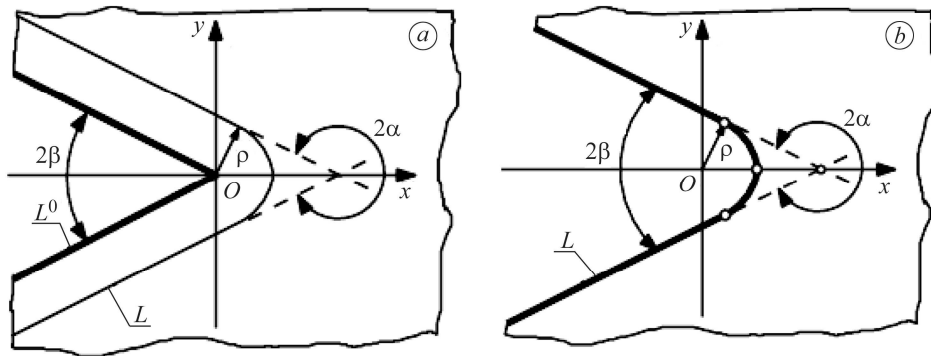


Рис. 3. Гострий (а) та закруглений (б) кутові вирізи у пружній площині.

Fig. 3. Sharp (a) and rounded (b) V-shaped notches in an elastic plane.

Далі потрібно розв'язати плоску та антиплоску задачі для площини з напів-нескінченим кутовим закругленим вирізом з контуром L , на якому задано напруження (7) з протилежним знаком (рис. 3б). Комплексні потенціали напружень візьмемо у вигляді

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{g'(t)}{t-z} dt, \quad \Psi(z) = \Psi_0(z) + \frac{1}{2\pi} \int_L \left[\frac{\overline{g'(t)}}{t-z} dt - \frac{ig'(t)}{(t-z)^2} dt \right],$$

$$F(z) = F_0(z) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\gamma'(t)}{t-z} dt,$$
(8)

що забезпечує відсутність зовнішніх напружень на контурі вирізу та на нескінченності.

Задовольнивши однорідні крайові умови на контурі L , отримаємо сингулярні інтегральні рівняння плоскої та антиплоскої сингулярних задач теорії пружності [12] для площини з кутовим закругленим вирізом, коли асимптотика поля напружень на нескінченності така ж, як і в площині з відповідним гострим вирізом:

$$\frac{1}{\pi} \int_L \left[K(t, t') g'(t) dt + L(t, t') \overline{g'(t)} dt \right] = p(t'), \quad t' \in L,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_L M(t, t') \gamma'(t) dt = \tau(t'), \quad t' \in L.$$
(9)

Ядра $K(t, t')$, $L(t, t')$ і $M(t, t')$ визначають співвідношення

$$K(t, t') = \frac{1}{t-t'} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt'} \left(\ln \frac{t-t'}{t-t'} \right), \quad L(t, t') = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt'} \left(\frac{t-t'}{t-t'} \right), \quad M(t, t') = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{t-t'} \frac{dt'}{ds'} \right].$$

Для забезпечення єдиного розв'язку сингулярних інтегральних рівнянь (9) їх праві частини повинні задовольняти додаткові умови: рівність нулю головного вектора і головного моменту збурених напружень (7), які діють на контурі кутового закругленого вирізу. Їх числовий розв'язок можна отримати аналогічно до інтегрального рівняння для пружної області, обмеженої замкненим контуром [5, 6, 13].

Зауважимо, що такого типу розв'язки крайових задач можна побудувати для багатьох інших областей, контур яких на нескінченності збігається з гранями клина або асимптотично наближається до них, наприклад, у випадку гіперболічного вирізу у пружній площині [5, 6, 13]. У скінченній області біля вершини кутового вирізу гладкий розімкнений контур може бути довільної конфігурації.

Зв'язок між коефіцієнтами інтенсивності та концентрації напружень для гострих та закруглених кутових вирізів. Інтегральні рівняння (9) розв'язано числовим методом для кутового закругленого вирізу. При цьому отримано максимальні напруження на контурі вирізу [14–18]

$$\sigma_s(0) = \frac{\tilde{K}_I^V R_I}{(2\pi\rho)^{\lambda_I}}, \quad \sigma_s(\theta_{\max}) = \frac{\tilde{K}_{II}^V R_{II}}{(2\pi\rho)^{\lambda_{II}}}, \quad \tau_{sz}(0) = \frac{\tilde{K}_{III}^V R_{III}}{(2\pi\rho)^{\lambda_{III}}}. \quad (10)$$

Коефіцієнти впливу закруглення вирізу на максимальні напруження на його контурі (stress-rounding factors) R_I, R_{II}, R_{III} вперше введено Бентхемом [9] для параболічного та гіперболічного вирізів. Для кутового закругленого вирізу залежності коефіцієнтів R_I, R_{III} від його кута розхилу, коли максимальні напруження на контурі вирізу досягаються у його вершині, отримано [14–18] методом сингулярних інтегральних рівнянь [8]. За мішаного навантаження ($\tilde{K}_{II}^V \neq 0$) максимальні напруження на контурі кутового закругленого вирізу досягаються не у вершині вирізу, а на певній віддалі від неї, причому ця віддаль залежить як від його кута розхилу, так і виду напруженого стану. Ця обставина істотно ускладнює знаходження КІН \tilde{K}_{II}^V за контурним напруженням на краю закругленого вирізу. Оскільки градієнт контурного напруження (його похідна за кутовою координатою θ) досягає максимуму у вершині вирізу, де симетрична частина напруження рівна нулю, то отримуємо співвідношення [16, 17]

$$\left. \frac{d\sigma_s}{d\theta} \right|_{\theta=0} = \frac{\tilde{K}_{II}^V R'_{II}}{(2\pi\rho)^{\lambda_{II}}}. \quad (11)$$

Для кутових вирізів у скінченних тілах співвідношення (10) і (11) є асимптотичними розв'язками задачі, коли відношення радіуса ρ до характерного розміру тіла мале. У результаті отримуємо такі граничні рівності:

$$\tilde{K}_I^V = \frac{1}{R_I} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[(2\pi\rho)^{\lambda_I} \sigma_s(0) \right], \quad \tilde{K}_{II}^V = \frac{1}{R'_{II}} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[(2\pi\rho)^{\lambda_{II}} \left. \frac{d\sigma_s}{d\theta} \right|_{\theta=0} \right], \quad (12)$$

$$\tilde{K}_{III}^V = \frac{1}{R_{III}} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[(2\pi\rho)^{\lambda_{III}} \tau_{sz}(0) \right],$$

Для параметрів R_I, R'_{II}, R_{III} побудовано апроксимувальні формули [16–18]

$$R_I = \frac{1 + 28,75\gamma + 98,04\gamma^2 - 102,1\gamma^3 + 47,42\gamma^4 - 8,441\gamma^5}{1 + 20,71\gamma}, \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \beta, \quad 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2};$$

$$R'_{II} = 5,234 \exp(0,137\beta) - 0,051 \exp(3,114\beta), \quad 0 \leq \beta \leq \beta^*;$$

$$R_{III} = \frac{1 + 17,845\gamma + 20,266\gamma^2 - 19,123\gamma^3 + 9,502\gamma^4 - 1,916\gamma^5}{1 + 14,248\gamma}, \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \beta, \quad 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Співвідношення (12) є основними в єдиному підході до розв'язування задач про концентрацію напружень біля гострих та закруглених кутових вирізів [5, 6, 14–23], коли методом сингулярних інтегральних рівнянь (або іншими аналітичними чи числовими методами) знаходять розв'язок задачі для тіла (двовимірного чи просторового) із закругленими кутовими вирізами і за допомогою граничних переходів (12) отримують КІН у гострих вершинах відповідних кутових вирізів. І, навпаки, знаючи КІН у вершині гострого кутового вирізу, можна записати наближені асимптотичні залежності для максимальних напружень на контурі кутового вирізу, закругленого дугою малого радіуса.

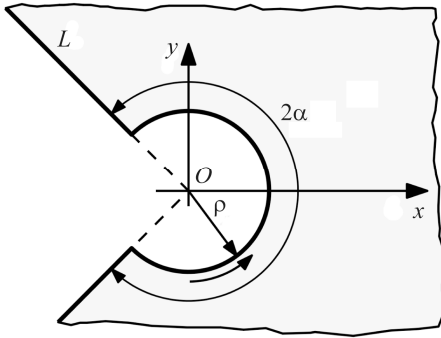


Рис. 4. Клин з круговим вирізом при вершині.

Fig. 4. A wedge with a circular notch at the vertex.

Аналогічний підхід до розв'язування двовимірних задач теорії пружності для областей з негладкими контурами можна поширити на осесиметричні задачі [24] та анізотропні тіла [6, 25].

Круговий виріз при вершині клина. Нехай у клині з кутом розхилу $2\alpha > \pi$ зроблений розвантажувальний круговий виріз радіуса ρ з центром у вершині клина (рис. 4). Грані клина та край вирізу вільні від навантаження, а на нескінченності задана асимптотика поля напружень, яку визначає комплексний потенціал $F_0(z)$ (3). Відомий замкнений аналітичний розв'язок цієї

антиплоскої задачі теорії пружності [26]:

$$\begin{aligned} \tau_{rz} &= \tilde{K}_{III}^V (2\pi r)^{-\lambda_{III}} \sin(1 - \lambda_{III}) \theta [1 - (\rho/r)^{2(1-\lambda_{III})}], \\ \tau_{\theta z} &= \tilde{K}_{III}^V (2\pi r)^{-\lambda_{III}} \cos(1 - \lambda_{III}) \theta [1 + (\rho/r)^{2(1-\lambda_{III})}], \end{aligned} \quad (13)$$

де \tilde{K}_{III}^V – КІН у вершині клина без вирізу ($\rho = 0$). Для $\lambda_{III} = 1/2$ (отвір при вершині тріщини) такий розв'язок отриманий раніше [27, 28].

З формул (13) отримуємо ненульові напруження на контурі вирізу ($r = \rho$) [5, 6, 29]

$$\tau_{\theta z} = 2\tilde{K}_{III}^V (2\pi\rho)^{-\lambda_{III}} \cos(\theta/2). \quad (14)$$

Поклавши в співвідношенні (14) $\lambda_{III} = 1/2$ ($\alpha = \pi$), одержимо відомий результат для розвантажувального отвору у вершині напівнескінченної тріщини [30–32].

Співвідношення (13) і (14) визначають розподіл напружень на контурі кругового отвору, зробленого біля вершини кутового вирізу, через КІН у цій вершині за відсутності отвору ($\rho = 0$). Цей розв'язок можна використовувати як асимптотичний для тіл скінченних розмірів, коли радіус кругового отвору малий порівняно з розмірами кутового вирізу. Для I та II типу навантаження побудований наближений аналітичний розв'язок цієї задачі [27]. Закругливши кутові виступи на контурі L , які не є концентраторами напружень, можна отримати числовий розв'язок задачі за допомогою сингулярних інтегральних рівнянь (9). Зауважимо, що максимальні напруження на контурі розвантажувального отвору у вершині

напівнескінченної тріщини [33] $\sigma_{\max} = 2,991K_I/\sqrt{2\pi\rho}$ практично такі ж, як і для відповідного U-подібного напівнескінченного вирізу.

Крайова тріщина у вершині кутового закругленого вирізу за симетричного навантаження. У механіці руйнування широко застосовують розв'язки задач теорії пружності для пружної площини з напівнескінченими вирізами, з вершини яких виходять тріщини. Такі розв'язки можна використовувати як асимптотичні для відповідних обмежених областей з вирізами та малими тріщинами. Ці моделі використовують для вивчення зародження та поширення тріщин біля концентраторів напружень за втомного навантаження, а також для розроблення критеріїв руйнування тіл з вирізами. Зокрема, таку схему використовують у моделях фіктивної тріщини, коли з вершини вирізу умовно проводять тріщину певної довжини, а далі для дослідження граничної рівноваги чи втомної міцності застосовують підходи механіки руйнування для тіл з тріщинами. Довжину фіктивної тріщини вважають сталою матеріалу (теорія критичних відстаней [34–38]) або знаходять з додаткової умови, коли вважають, що середнє розтягувальне напруження на лінії фіктивної тріщини в суцільному тілі не перевищує границю міцності матеріалу [39, 40]. Таким чином, у критеріальні рівняння входять як характеристики тріщиностійкості матеріалу, так і його границя міцності, що дає змогу оцінити міцність елементів конструкцій, послаблених кутовими вирізами із закругленою вершиною довільного радіуса.

Розглянемо однорідну задачу про визначення КІН у вершині прямолінійної тріщини, що виходить з гострої чи закругленої вершини напівнескінченного вирізу у пружній площині. Нехай контур кутового закругленого вирізу та береги тріщини вільні від напружень, а на нескінченності заданий симетричний напружений стан ($\tilde{K}_{II}^V = 0$), який характеризується потенціалами напружень (3) (див. схему на рис. 5). Методом сингулярних інтегральних рівнянь знайдено КІН у вершині тріщини. При цьому вважали, що контур L у рівнянні (9) складається з контурів вирізу та тріщини [11–13, 41]. Крива $\varepsilon = 0$ на рис. 5b відповідає пружному клину з крайовою тріщиною при вершині. Цей результат добре узгоджується з точними даними, отриманими методом Вінера–Гопфа [42], та зі замкненим наближенням розв'язком задачі [5, 6]

$$K_I = \tilde{K}_{11}(\beta) \tilde{K}_I^V l^{1/2-\lambda_1}, \quad \tilde{K}_{11}(\beta) = \frac{\sqrt{2/c}}{(2\pi)^{\lambda_1}} \frac{\Gamma((1-\lambda_1)/c)}{\Gamma((1-\lambda_1)/c+1/2)}, \quad c = \pi \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{2\alpha^2 - \sin^2 \alpha},$$

де $\Gamma(\lambda)$ – гамма-функція, $\alpha = \pi - \beta$.

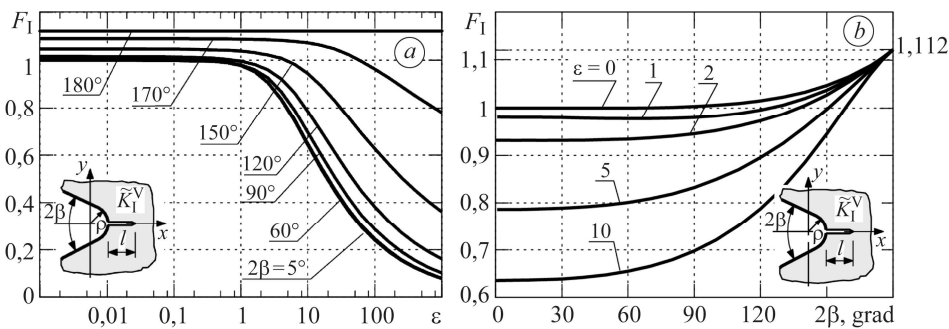


Рис. 5. Залежність відносного КІН у вершині тріщини $F_I = K_I / [\tilde{K}_I^V (\pi l)^{1/2-\lambda_1}]$ від параметра $\varepsilon = \rho/l$ (a) та кута розхилу 2β (b).

Fig. 5. Dependence of relative stress intensity factor (SIF) at the crack tip $F_I = K_I / [\tilde{K}_I^V (\pi l)^{1/2-\lambda_1}]$ on parameter $\varepsilon = \rho/l$ (a) or notch vertex angle 2β (b).

Концентрація напружень біля гострокутних отворів. За I та III типів деформування пружного тіла з гострокутним отвором ($\tilde{K}_{II}^V = 0$) КІН у його вершині можна отримати граничним переходом, використовуючи розв'язок відповідної крайової задачі для пружних областей з гладкими контурами. Зокрема, знайшовши числові значення максимального напруження у закруглених вершинах ромбічного отвору, за формулами (12) отримали КІН $\tilde{K}_I^V = p(2\pi l)^{\lambda_I} F_I^V / \sqrt{2}$ та $\tilde{K}_{III}^V = \tau(2\pi l)^{\lambda_{III}} F_{III}^V / \sqrt{2}$ [13, 41] (рис. 6). Залежності відносного КІН F_I^V від кута 2β (рис. 6a) в окремому випадку квадратного отвору ($2\beta = \pi/2$) практично збігаються з відомими [43–45], отриманими іншими методами. За поздовжнього зсуву знайдені [23] відносні значення КІН F_{III}^V (рис. 6b) добре узгоджуються (відносна похибка не перевищує 0,1%) з точним аналітичним розв'язком [46]

$$F_{III}^V = \sqrt{2} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^{-\lambda_{III}} \left[-B \left(\frac{\alpha}{\pi}, \frac{3}{2} - \frac{\alpha}{\pi} \right) \cos \alpha \right]^{-\lambda_{III}}, \quad \alpha = \pi - \beta,$$

побудованим методом конформних відображень. Тут $B(x, y)$ – бета-функція. За малих значень кутів розхилу вирізів ($0 \leq 2\beta \leq \pi/3$) ці результати також близькі до відповідних розв'язків для лінзоподібного отвору [13, 15, 47, 48].

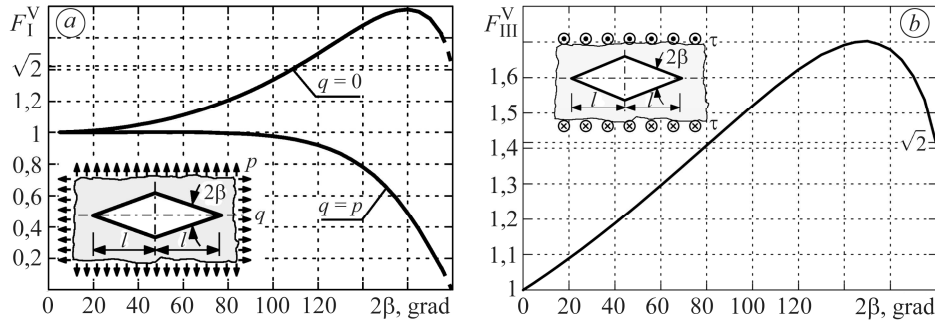


Рис. 6. Залежності відносних КІН F_I^V (a) і F_{III}^V (b) у вершині ромбічного отвору від кута 2β за розтягу та поздовжнього зсуву.

Fig. 6. Dependences of relative SIFs F_I^V (a) and F_{III}^V (b) at the vertex of a rhombic hole on angle 2β for tension and longitudinal shear.

Мішаний тип навантаження ($\tilde{K}_I^V \neq 0$, $\tilde{K}_{II}^V \neq 0$) розглянемо на прикладі одновісного розтягу та поперечного зсуву пружної площини з прямокутним отвором (див. схеми на рис. 7). Знайшовши у закругленій вершині прямокутного отвору контурне напруження σ_s та його похідну за координатою θ , з формул (12) отримаємо КІН $\tilde{F}_I^V = K_I^V b^{1/2-\lambda_I} / p\sqrt{\pi l}$ (a), $\tilde{F}_{II}^V = K_{II}^V b^{1/2-\lambda_{II}} / p\sqrt{\pi l}$ (b), $\tilde{F}_{III}^V = K_{III}^V b^{1/2-\lambda_{III}} / \tau\sqrt{\pi l}$ (c) у гострій кутовій вершині прямокутного отвору (рис. 7) [5, 6].

Зі збільшенням відношення сторін прямокутника l/b відносні КІН \tilde{F}_I^V , \tilde{F}_{II}^V і \tilde{F}_{III}^V асимптотично наближаються до певних граничних значень (рис. 7). Отже, у граничному випадку напівнескінченного прямокутного вирізу (рис. 8) КІН у його вершинах можна подати у вигляді [5, 6]

$$K_I^V = 0,73b^{\lambda_I-1/2}K_I, \quad K_{II}^V = 0,39b^{\lambda_{II}-1/2}K_I, \quad K_{III}^V = 0,95b^{\lambda_{III}-1/2}K_{III}, \quad (15)$$

де K_I і K_{III} – КІН для відповідної прямолінійної тріщини ($b = 0$). Коефіцієнти переходу від прямолінійної тріщини до прямокутного вирізу отримані шляхом екстраполяції.

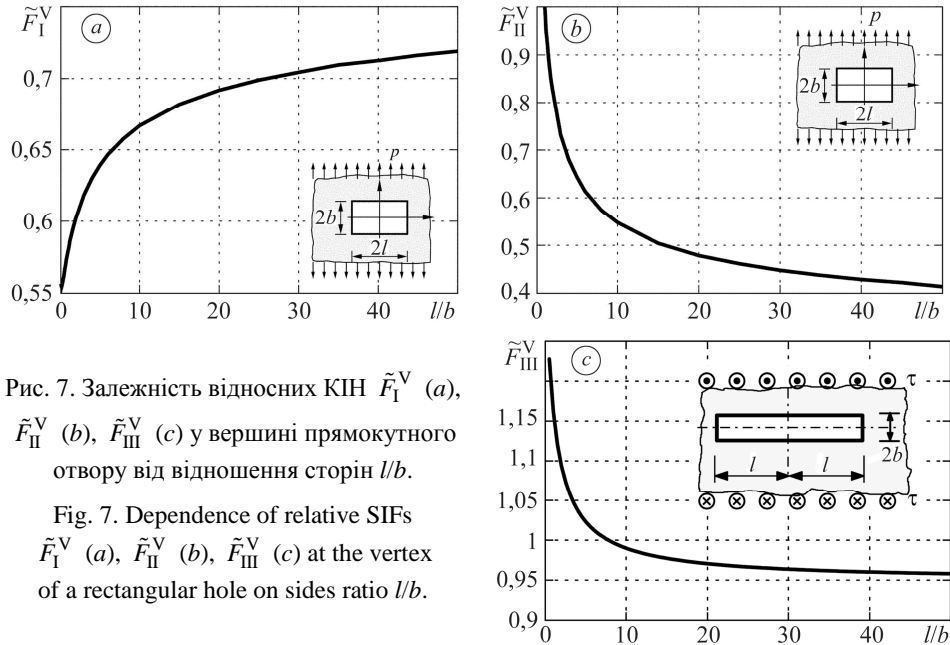


Рис. 7. Залежність відносних КІН \tilde{F}_I^V (a), \tilde{F}_{II}^V (b), \tilde{F}_{III}^V (c) у вершині прямокутного отвору від відношення сторін l/b .
Fig. 7. Dependence of relative SIFs \tilde{F}_I^V (a), \tilde{F}_{II}^V (b), \tilde{F}_{III}^V (c) at the vertex of a rectangular hole on sides ratio l/b .

Таким чином, отримано розв'язки плоскої та антиплоскої сингулярних крайових задач теорії пружності для напівнескінченного прямокутного вирізу у пружній площині (15), коли грані вирізу вільні від зовнішнього навантаження, а на нескінченності задано асимптотику поля напружень, що характеризується КІН K_I і K_{III} у вершині відповідної тріщини. Співвідношення (15) дає загальний зв'язок між КІН у вершинах вузького прямокутного вирізу та КІН K_I і K_{III} у вершині відповідної прямолінійної тріщини. Раніше плоску задачу (I тип деформування) розв'язували наближено методом конформних відображень [49] без врахування особливостей напружень у кутових точках межового контуру. В антиплоскому випадку отримано замкнений аналітичний розв'язок задачі [50]: $K_{III}^V = \sqrt[5]{2\pi/9}b^{\lambda_{III}-1/2}K_{III}$.

ВИСНОВКИ

Зроблено огляд досліджень з розподілу напружень у пружних тілах з гострими та закругленими кутовими вирізами. Наведено основні співвідношення між коефіцієнтами інтенсивності напружень у гострій вершині вирізу та коефіцієнтами концентрації напружень для відповідного закругленого напівнескінченного вирізу. Ці співвідношення для скінченних тіл мають асимптотичний характер,

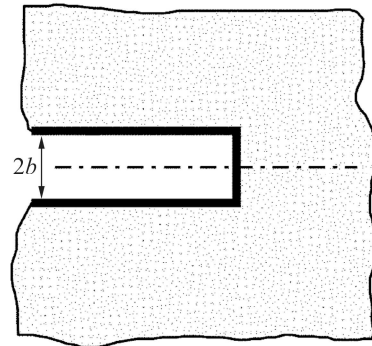


Рис. 8. Напівнескінченний прямокутний виріз у пружній площині.

Fig. 8. A semi-infinite rectangular hole in an elastic plane.

тобто стають точнішими зі зменшенням радіуса закруглення вирізу. Їх можна використовувати для отримання коефіцієнтів інтенсивності напружень у гострій вершині вирізу на основі даних про концентрацію напружень у закругленій вершині відповідного кутового вирізу, що проілюстровано на прикладах прямокутного отвору у пружній площині під дією одновісного розтягу. Подібний асимптотичний підхід використано також для розв'язування однорідної сингулярної задачі теорії пружності для напівнескінченного кутового закругленого вирізу з крайовою тріщиною при вершині.

1. *Neuber H.* Kerbspannungslehre: Theorie der Spannungskonzentration; genaue Berechnung der Festigkeit. – Berlin: Springer, 1985. – 326 s.
2. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
3. *Pilkey W. D. and Pilkey D. F.* Peterson's Stress Concentration Factors. – New York: Wiley, 2008. – 569 p.
4. *Саврук М. П., Осив П. Н., Прокопчук И. В.* Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – К.: Наук. думка, 1989. – 248 с.
5. *Саврук М. П., Казберук А.* Концентрація напружень у твердих тілах з вирізами // Механіка руйнування та міцність матеріалів: Довідн. посіб. / За заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: СПОЛОМ, 2012. – **14**. – 384 с.
6. *Savruk M. P. and Kazberuk A.* Stress Concentration at Notches. – Cham: Springer, 2017. – 516 p.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
8. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
9. *Benthem J. P.* Stresses in the region of rounded corners // *Int. J. Solids Struct.* – 1987. – **23**, № 2. – P. 239–252.
10. *Wieghardt K.* Über das Spalten und Zerreißen elastischer Körper // *Z. Mathematik und Physik.* – 1907. – **55**, № 2. – S. 60–103.
11. *Williams M. L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // *J. Appl. Mech.* – 1952. – **19**. – P. 526–530.
12. *Cherepanov G. P.* Mechanics of Brittle Fracture. – New York: McGraw Hill, 1979. – 950 p.
13. *Kazberuk A.* Dwuwymiarowe zagadnienia mechaniki pękania ciał z krawkami. – Białystok: Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, 2010. – 242 s.
14. *Саврук М. П., Казберук А.* Зв'язок між коефіцієнтами інтенсивності та концентрації напружень для гострих і закруглених кутових вирізів // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2006. – **42**, № 6. – С. 17–26.
(*Savruk M. P. and Kazberuk A.* Relationship between the stress intensity and stress concentration factors for sharp and rounded notches // *Materials Science.* – 2006. – **42**, № 6. – P. 725–738.)
15. *Саврук М. П., Казберук А.* Единый подход к решению задач о концентрации напряжений около острых и закругленных угловых вырезов // *Прикл. механика.* – 2007. – **43**, № 2. – С. 70–87.
(*Savruk M. P. and Kazberuk A.* A unified approach to problems of stress concentration near V-shaped notches with sharp and rounded tip // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, № 2. – P. 182–196.)
16. *Саврук М. П., Казберук А.* Антисиметричний розподіл напружень у пружному тілі з гострим та закругленим кутовим вирізом // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2010. – **46**, № 6. – С. 5–15.
(*Savruk M. P. and Kazberuk A.* Antisymmetric stress distribution in an elastic body with a sharp or a rounded V-shaped notch // *Materials Science.* – 2010. – **46**, № 6. – P. 711–722.)
17. *Саврук М. П., Казберук А.* Розподіл напружень біля кутових вирізів за складного напруженого стану // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2011. – **47**, № 4. – С. 52–61.
(*Savruk M. P. and Kazberuk A.* Distribution of stresses near V-shaped notches in the complex stressed state // *Materials Science.* – 2012. – **47**, № 4. – P. 476–487.)

18. *Саврук М. П., Казберук А., Тарасюк Г.* Розподіл напружень на контурі кутового закругленого вирізу за антиплоскої деформації // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – **47**, № 6. – С.7–14.
(*Savruk M. P., Kazberuk A., and Tarasiuk G.* Distribution of stresses over the contour of a rounded V-shaped notch under antiplane deformation // *Materials Science*. – 2012. – **47**, № 6. – P. 717–725.)
19. *Саврук М. П., Казберук А.* Проблеми механіки руйнування твердих тіл з кутовими вирізами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – **45**, № 2. – С. 23–39.
(*Savruk M. P. and Kazberuk A.* Problems of fracture mechanics of solid bodies with V-shaped notches // *Materials Science*. – 2009. – **45**, № 2. – P. 162–180.)
20. *Savruk M.P. and Kazberuk A.* Two-dimensional fracture mechanics problems for solids with sharp and rounded V-notches // *Int. J. Fract.* – 2010. – **161**, № 1. – P. 79–95.
21. *Savruk M. and Kazberuk A.* Stress concentration problems for elastic domains with V-shaped notches // *Fracture Mechanics of Materials and Structural Integrity / Під заг. ред. В. В. Панасюка.* – Львів: Фіз.-мех. ін-т НАН України, 2009. – С. 75–86.
22. *Savruk M. P., Kazberuk A.* О певных загаднениях механики рєkania ciєl z ostrymi i zaokrєgлонymi karbami V // *Acta Mech. Autom.* – 2010. – **4**, № 3. – P. 113–123.
23. *Саврук М. П., Казберук А., Тарасюк Г.* Концентрація напружень біля отворів у пружній площині за антиплоскої деформації // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2012. – **48**, № 4. – С. 5–13.
(*Savruk M. P., Kazberuk A., and Tarasiuk G.* Stress concentration near holes in the elastic plane subjected to antiplane deformation // *Materials Science*. – 2013. – **48**, № 4. – P. 415–426.)
24. *Кравець В. С., Саврук М. П.* Осесиметрична задача кручення пружного простору з гладкими та гострокутними вирізами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2013. – **49**, № 5. – С. 21–30.
(*Kravets V. S. and Savruk M. P.* Axisymmetric problem of torsion of an elastic space with smooth and acute-angled notches // *Materials Science*. – 2014. – **49**, № 5. – P. 577–588.)
25. *Саврук М. П., Чорненко А. Б.* Плоска задача теорії пружності для квазіортотропного тіла з тріщинами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2015. – **51**, № 3. – С. 17–24.
(*Savruk M. P. and Chornenkyi A. B.* Plane problem of the theory of elasticity for a quasi-orthotropic body with cracks // *Materials Science*. – 2015. – **51**, № 3. – P. 311–321.)
26. *Zappalorto M. and Lazzarin P.* In-plane and out-of-plane stress field solutions for V-notches with end holes // *Int. J. Fract.* – 2011. – **168**. – P. 167–180.
27. *Kullmer G.* Elastic stress fields in the vicinity of a narrow notch with circular root // *Reliability and Structural Integrity of Advanced Materials. Proc. of the 9th Biennial Europ. Conf. on Fracture (ECF 9).* – 1992. – **2**. – P. 905–910.
28. *Kullmer G. and Richard H. A.* Influence of the root radius of crack-like notches on the fracture load of brittle components // *Arch. Appl. Mech.* – 2006. – **76**. – P. 711–723.
29. *Саврук М. П.* Поздовжній зсув пружного клина з тріщинами та вирізами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – **38**, № 5. – С. 57–65.
(*Savruk M. P.* Longitudinal shear of an elastic wedge with cracks and notches // *Materials Science*. – 2002. – **38**, № 5. – P. 672–684.)
30. *Мирсалимов В. М.* Влияние разгружающих отверстий на развитие трещин // *Проблемы прочности.* – 1971. – № 4. – С. 18–19.
31. *Smith E.* The Mode III elastic stress distribution near the root of (a) an intrusion-type notch and (b) a key-hole notch // *Int. J. Eng. Sci.* – 2006. – **44**. – P. 340–344.
32. *Berto F.* Fictitious notch rounding concept applied to V-notches with end holes under mode 3 loading // *Int. J. Fat.* – 2012. – **38**. – P. 188–193.
33. *Chiang C. R.* Stress field around a rounded crack tip // *J. Appl. Mech.* – 1991. – **58**, № 3. – P. 832–836.
34. *Taylor D.* *The Theory of Critical Distances: a new perspective in fracture mechanics.* – Oxford: Elsevier, 1977. – 284 p.
35. *A finite fracture mechanics approach to structures with sharp V-notches / A. Carpinteri, P. Cornetti, N. Pugno, A. Sapore, and D. Taylor // Eng. Fract. Mech.* – 2008. – **75**. – P. 1736–1752.
36. *Taylor D.* The theory of critical distances // *Eng. Fract. Mech.* – 2008. – **75**. – P. 1696–1705.

37. Ayatollahi M. R. and Torabi A. R. Brittle fracture in rounded-tip V-shaped notches // Mater. Design. – 2010. – **31**. – P. 60–67.
38. Ayatollahi M. R. and Torabi A. R. Investigation of mixed mode brittle fracture in rounded-tip V-notched components // Eng. Fract. Mech. – 2010. – **77**, № 16. – P. 3087–3104.
39. Finite fracture mechanics: A coupled stress and energy failure criterion / P. Cornetti, N. Pugno, A. Carpinteri, and D. Taylor // Eng. Fract. Mech. – 2006. – **73**. – P. 2021–2033.
40. Blunt V-notch brittle fracture: An improved finite fracture mechanics approach / A. Sapora, P. Cornetti, A. Carpinteri, and D. Firrao // Adv. Mater. Res. – 2015. – **1105**. – P. 237–244.
41. Kazberuk A. Stress intensity factors for cracks at rounded V-notch vertex // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – **45**, № 5. – С. 61–70.
(Kazberuk A. Stress intensity factors for cracks at rounded V-notch vertex // Materials Science. – 2009. – **45**, № 5. – P. 676–687.)
42. Gallagher D. A crack at the apex of a V-shaped notch // Int. J. Fract. – 1995. – **69**, № 4. – P. R81–R87.
43. Savruk M., Kazberuk A. Współczynniki intensywności naprężeń w wierzchołku rombowego otworu w rozciąganej płaszczyźnie // Acta Mech. Autom. – 2007. – **1**, № 2. – P. 37–40.
44. Noda N. A., Oda K., and Inoue T. Analysis of newly-defined stress intensity factors for angular corners using singular integral equations of the body force method // Int. J. Fract. – 1996. – **76**. – P. 243–261.
45. Кравець В. С. Дослідження напруженого стану нескінченної пластини з квадратним отвором // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій. – Львів: Каменяр, 2002. – **5**. – С. 95–105.
46. Kohno Y. and Ishikawa H. Singularities and stress intensities at the corner point of a polygonal hole and rigid polygonal inclusion under antiplane shear // Int. J. Eng. Sci. – 1995. – **33**, № 11. – P. 1547–1560.
47. Морозов Н. Ф. Математические вопросы теории трещин. – М.: Наука, 1984. – 256 с.
48. Kazberuk A. Koncentracja naprężeń wokół owalnego otworu // Acta Mech. Autom. – 2007. – **1**, № 2. – P. 25–30.
49. Кулиев В. Д. Сингулярная задача теории упругости для полубесконечного прямоугольного выреза // Прикл. математика и механика. – 1980. – **44**, № 5. – С. 952–957.
50. Кривень В. А., Бойко А. Р., Каплун А. В. Розвиток пластичних смуг під час зсувного деформування тіла з вузькою прямокутною щілиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2014. – **50**, № 4. – С. 49–54.
(Kryven V. A., Boiko A. R., and Kaplun A. V. Development of plastic strips in the process of shear deformation of a body with narrow rectangular slot // Materials Science. – 2015. – **50**, № 4. – P. 527–535.)

Одержано 23.09.2020