

УДК 539.3

ВПЛИВ ЗСУВНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ФОРМИ ОПТИМАЛЬНИХ ОТВОРІВ У КВАЗІОРТОТРОПНІЙ ПЛАСТИНІ

М. П. САВРУК, В. С. КРАВЕЦЬ, А. Б. ЧОРНЕНЬКИЙ

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Розроблено аналітико-числовий алгоритм визначення оптимальної форми гладкого отвору (з мінімальною концентрацією напружень) у квазіортотропній пластині за її двовісного розтягу та зсуву на нескінченності. Розв'язано обернені задачі теорії пружності для квазіортотропного тіла з невідомою межею. Використано ефективні розв'язки відповідних прямих задач, отриманих методом сингулярних інтегральних рівнянь. Розв'язування оберненої задачі з невідомою формою отвору зведено до мінімізації багатопараметричного функціонала середньоквадратичних відхилень розтягувальних напружень уздовж контуру отвору від усереднених їх значень. Знайдено форми оптимальних отворів у квазіортотропній пластині для різних двовісних розтягів та зсувів на нескінченності та рівня її ортотропії.

Ключові слова: *квазіортотропна пластина, розтягальне та зсувне навантаження, оптимальні отвори, концентрації напружень, сингулярні інтегральні рівняння.*

An analytical-numerical algorithm for determining the optimal shape of a smooth hole (with a minimum stress concentration) in a quasi-orthotropic plate under biaxial tension and shear at infinity has been developed. Inverse problems of the theory of elasticity for a quasi-orthotropic body with an unknown boundary are solved. Effective solutions of the corresponding direct problems obtained by the method of singular integral equations are used. Solving the inverse problem with an unknown hole shape is reduced to minimization of multiparametric functional of the standard deviations of the tensile stresses along the hole contour from their averaged values. The shapes of optimal holes in a quasi-orthotropic plate for different biaxial tension and shear loading at infinity and the level of its orthotropy are found.

Keywords: *quasi-orthotropic plate, tension and shear loading, optimal holes, stress concentration, singular integral equations.*

Вступ. Визначаючи оптимальні форми елементів конструкцій (які знаходяться під заданим навантаженням) та різноманітні конструктивні отвори у них, розв'язують обернені задачі теорії пружності для областей з невідомими межами, мінімізуючи різного роду функціонали якості (відхилення контурних напружень від номінальних, зміна міцності конструкції або приріст енергії, привнесений отворами у задане однорідне поле напружень). Побудова обернених задач ґрунтується на розв'язках відповідних прямих для заданих форм отворів. Низку задач для знаходження оптимальних форм отворів у пружній ізотропній площині розв'язано різними методами [1–5]. За чистого зсуву ізотропної площини на нескінченності досліджували мінімізацію знакозмінних напружень на кусково-гладких отворах [6, 7].

Задачі оптимізації форм отворів в анізотропних тілах (різних композитних матеріалів) значно складніші, оскільки їх напружений стан суттєво залежить як від способу навантаження, так і від орієнтації отворів відносно осей анізотропії матеріалу. Потрібно знайти такі форми отворів, щоб концентрація напружень на їх

контурах була б мінімальна. Для анізотропних пластин окремі розв'язки таких задач отримано раніше [4, 8].

Отвори оптимальної форми у квазіортотропній пластині досліджено за двовісного розтягу вздовж осей ортотропії [9]. Нижче цей підхід застосовано для вивчення загального випадку однорідного напруженого стану на нескінченності, що дало змогу визначити вплив додаткового зсувного навантаження на напружено-деформований стан квазіортотропної пластини з отвором. Прямі двовимірні задачі теорії пружності для квазіортотропних тіл з гладкими отворами розв'язано методом сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) [10–12]. Розв'язки обернених задач для областей з невідомими межами побудовано за раніше розробленою методикою [5, 9]. Для мінімізації багатопараметричного функціонала середньоквадратичних відхилень контурних напружень (розтягувальних, що діють уздовж контуру отвору у тангенціальному напрямі) від їх усередненого значення на всьому контурі, застосовано квазіньютонівський метод зі скінченно-різницевиими першими похідними [13].

Формулювання оберненої задачі. Розглянемо двовимірну задачу теорії пружності для нескінченної квазіортотропної пластини з гладким отвором, на контурі L якого задані напруження

$$N^*(t) + iT^*(t) = p^*(t), \quad t \in L, \quad (1)$$

де $N^*(t)$ і $T^*(t)$ – нормальна та дотична компоненти вектора напружень, прикладених до контуру отвору зі зовнішньою нормаллю n . За додатний прийняли напрям обходу контуру L , за якого область тіла S^+ залишається зліва. Пружна пластина на нескінченності знаходиться під дією двовісного розтягу у взаємно перпендикулярних напрямках напруженнями p (під кутом α до осі Ox) і q та зсуву τ (рис. 1). Осі декартової системи координат xOy вибрали вздовж головних осей ортотропії пластини. Матеріал пластини вважали квазіортотропним, тобто вродженим ортотропним матеріалом, для якого корені характеристичного рівняння

кратні і суто уявні $\mu_1 = \mu_2 = i\gamma$ [10, 11]. Для плоского напруженого стану $\gamma = \sqrt[4]{E_x/E_y}$ – основний параметр ортотропії, а модуль зсуву виражено через інші сталі залежністю $G = E_x / [2(\sqrt{E_x/E_y} + \nu_{xy})]$, де E_x, E_y – модулі пружності вздовж осей x і y , ν_{xy} – коефіцієнт Пуассона. Для ізотропного матеріалу параметр $\gamma = 1$.

Потрібно знайти таку форму гладкого отвору L , на якому нормальні напруження в напрямі дотичної набували б сталих значень:

$$\sigma_s^*(t) = c = \text{const}, \quad t \in L. \quad (2)$$

Такі отвори називатимемо оптимальними. За довільного навантаження контуру отвору (1) та пластини на нескінченності стали c знаходять з розв'язку задачі. Для вільного отвору ($p^*(t) = 0$) або завантаженого сталими нормальними та зсувними зусиллями ($p^*(t) = N_0 + iT_0 = \text{const}$) в ізотропній пластині ця стала відома ($c = p + q$ або $c = p + q - N_0$) і визначена першим інваріантом тензора напружень ($N_0 + \sigma_s = p + q$) [1–3, 14].

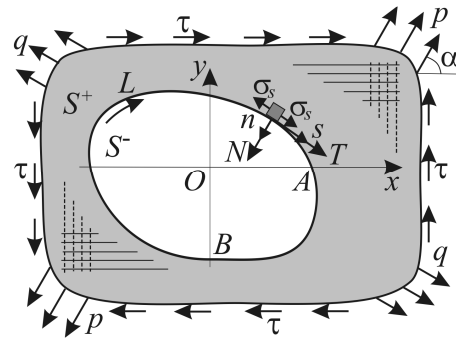


Рис. 1. Двовісний розтяг та зсув квазіортотропної пластини з гладким отвором.

Fig. 1. Biaxial tension and shear of a quasi-orthotropic plate with a smooth hole.

Для однозначності розв'язку оберненої задачі з невідомою межею тіла необхідно задати додаткові умови. Для пластини з одним отвором достатньо задати один параметр, наприклад, його діаметр чи площу. Крім того, не завжди існують розв'язки таких задач. Надалі розглядатимемо лише такі навантаження, для яких оптимальні форми отворів існують.

Пряма задача. Першу основну задачу теорії пружності для двовимірного квазіортотропного тіла з гладким отвором розв'язуватимемо методом СІР. Використавши метод суперпозиції, комплексні потенціали напружень для квазіортотропного тіла шукатимемо у вигляді [11]

$$\Phi_1^*(z_1) = \Phi_1^0(z_1) + \Phi_1(z_1), \quad \Psi_1^*(z_1) = \Psi_1^0(z_1) + \Psi_1(z_1), \quad (3)$$

де

$$\Phi_1^0(z_1) = (\sigma_y^\infty + \gamma^{-2}\sigma_x^\infty)/4, \quad \Psi_1^0(z_1) = (\sigma_y^\infty - \gamma^{-2}\sigma_x^\infty)/2 + i\tau_{xy}^\infty/\gamma - \quad (4)$$

задані функції, що описують однорідний напружено-деформований стан у суцільній квазіортотропній пластині без отвору, а потенціали $\Phi_1(z_1)$ і $\Psi_1(z_1)$ визначають збурений отвором напружений стан [11, 12]. Для розглядуваного навантаження пластини у співвідношеннях (4) маємо:

$$\sigma_x^\infty = p \cos^2 \alpha + q \sin^2 \alpha, \quad \sigma_y^\infty = q \cos^2 \alpha + p \sin^2 \alpha, \quad \tau_{xy}^\infty = \tau + (p - q) \sin \alpha \cos \alpha, \quad (5)$$

де α – кут між віссю Ox та напрямом напруження p (рис. 1). Комплексні потенціали напружень $\Phi_1(z_1)$ та $\Psi_1(z_1)$ у виразах (3) та інтегральні рівняння для задачі записані у математичній площині $z_1 = x + i\gamma y$ і мають аналогічний вигляд, як і для ізотропного матеріалу [9, 11, 12]. Тут і надалі індекс “1” позначає запис відповідних величин у площині z_1 .

Крайову умову (1) для збуреного напруженого стану пластини запишемо в площині z_1 так [11]:

$$\left[(i/\gamma)X_n - Y_n \right] \frac{ds}{dt_1} = \tilde{P}(t) = \tilde{P}_1(t_1) = \frac{1}{2\gamma} \left[(1 + \gamma)p(t) - (1 - \gamma)\overline{p(t)} \frac{d\bar{t}}{dt} \right] \frac{dt}{dt_1}, \quad (6)$$

де $t = x + i\gamma y \in L$, $t_1 = x_1 + i\gamma y_1 = x + i\gamma y \in L_1$; X_n і Y_n – декартові компоненти вектора напружень, що діють від зовнішньої нормалі n на контурі L (рис. 1); $p(t) = p^*(t) - \{p + q + [2i\tau - \exp(2i\alpha)(p - q)]\overline{dt}/dt\}/2$ – збурені напруження $N(t) + iT(t)$ на контурі L , які не залежать від пружних сталих матеріалу пластини і залишаються такими ж, як і для ізотропного тіла. Знайшовши граничні значення комплексних потенціалів (3) при $z_1 \rightarrow t_1 \in L_1$ і задовольнивши з їх допомогою крайову умову (6), отримаємо СІР [9], числовий розв'язок якого знаходимо методом квадратур [11].

Коли контур отвору вільний від навантажень ($p^*(t) = 0$), то напруження у внутрішній області отвору (S) нульові і відповідні граничні значення потенціалів (3) $[\Phi_1^*(t_1)]^- = [\Psi_1^*(t_1)]^- = 0$. Тоді контурні напруження визначаємо на основі першого інваріанта тензора напружень з виразу

$$\sigma_s^*(t) = \sigma_x^{*+}(t_1) + \sigma_y^{*+}(t_1) = \text{Re}\{2(1 + \gamma^2)\Phi_1^{*+}(t_1) + (1 - \gamma^2)[\bar{t}_1\Phi_1^{*+}(t_1) + \Psi_1^{*+}(t_1)]\}.$$

Використавши співвідношення для шуканої неперервної на контурі L_1 функції $ig_1'(t_1) = [\Phi_1^*(t_1)]^+ - [\Phi_1^*(t_1)]^-$, де верхні індекси вказують на граничні значення величин, якщо $z_1 \rightarrow t_1$ зліва (+) або справа (–) щодо вибраного додатного напрямку, та залежність $[\bar{t}_1\Phi_1^*(t_1) + \Psi_1^*(t_1)]^+ - [\bar{t}_1\Phi_1^*(t_1) + \Psi_1^*(t_1)]^- = i[\overline{g_1'(t_1)} - g_1'(t_1)]d\bar{t}_1/dt_1$, отримали [9]:

$$\sigma_s = 2 \operatorname{Im}\{g'_1(t_1)\} \left[(1 - \gamma^2) \operatorname{Re}\{d\bar{t}_1 / dt_1\} - (1 + \gamma^2) \right]. \quad (7)$$

Тут і надалі $\sigma_s = \sigma_s^*(t), t \in L$ – нормальні розтягувальні напруження на контурі отвору у тангенціальному напрямі (рис. 1).

Числовий алгоритм визначення оптимальних форм отворів. На основі числового розв’язку СІР [9] для початково заданого колового отвору L знаходимо напруження (7) у n вузлових точках контуру $t = \omega(\xi_j)$; $\xi_j = 2\pi(j-1)/n$; $j = \overline{1, n}$ та будуємо функціонал середньоквадратичного відносного їх відхилення від усередненого значення [5, 9]:

$$F[\mathbf{P}] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left\{ \left(\sigma_s[\omega(\mathbf{P}, \xi_j)] - \bar{\sigma}_s \right) / \bar{\sigma}_s \right\}^2, \quad \bar{\sigma}_s = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sigma_s(\xi_j), \quad (8)$$

де $\mathbf{P} = (P_1, P_2, \dots, P_M)$ – набір безрозмірних параметрів задачі оптимізації, за допомогою яких визначатимемо M -параметричне рівняння контуру L у вигляді

$$t = \omega(\mathbf{P}, \xi) = x(\mathbf{P}, \xi) - iy(\mathbf{P}, \xi); \quad \xi \in [0; 2\pi]. \quad (9)$$

Мінімізуючи функціонал (8) за параметрами P_m ($m = \overline{1, M}$), знайдемо такі їх значення, коли напруження $\sigma_s(\xi)$ вирівнюються по всьому контуру L , тобто виконується функціональна умова $F[\mathbf{P}] < \Delta$, де Δ – задана характеристика допустимого відхилення контурних напружень (7) на шуканому контурі від усередненого значення. Для мінімізації багатопараметричного функціонала $F[\mathbf{P}]$ використали квазіньютонівський метод зі скінченно-різницевиими першими похідними [13].

Числові результати. Алгоритм розрахунку оптимальної форми отвору у квазіортотропній пластині подано для низки значень параметра ортотропії матеріалу пластини $\gamma = \sqrt[4]{E_x/E_y}$ за різних двовісних розтягів (p, q) та зсувів (τ) пластини на нескінченності (рис. 1). Оптимальні контури отворів шукали у вигляді (9) за допомогою тригонометричних рядів з десятьма параметрами P_m

$$\begin{aligned} x(\mathbf{P}, \xi) / a &= P_1 \cos(\xi) + P_2 \sin(\xi) + P_3 \cos(3\xi) + P_4 \sin(3\xi) + \\ &+ (1 - P_1 - P_3) \cos(5\xi) + P_5 \sin(5\xi), \\ y(\mathbf{P}, \xi) / a &= P_6 \sin(\xi) + P_7 \cos(\xi) + P_8 \sin(3\xi) + P_9 \cos(3\xi) + \\ &+ P_{10} \sin(5\xi) - (P_7 + P_9) \cos(5\xi), \quad \xi \in [0; 2\pi], \end{aligned} \quad (10)$$

де врахували симетрію задачі відносно повороту на кут π ($\omega(\xi + \pi) = -\omega(\xi)$), $\xi \in [0; \pi]$) та фіксацію контуру у точці $A(a; 0)$ ($x(\mathbf{P}, 0) = a$, $y(\mathbf{P}, 0) = 0$).

Зсувне навантаження ($\tau = \{0, 1\sigma; 0, 2\sigma; 0, 3\sigma; 0, 4\sigma; 0, 5\sigma\}$, де σ – загальний параметр навантаження) за всебічного розтягу ($p = q = \sigma$, $\alpha = \pi/2$) квазіортотропної пластини призводить до суттєвого видовження форм оптимальних отворів уздовж лінії, нахиленої під кутом $\pi/4$ до осі Ox (рис. 2). За відносно низького рівня ортотропії $\gamma = 1,4$ форми оптимальних отворів близькі до еліптичних (рис. 2a), які оптимальні для ізотропної пластини [1, 14]. Зі зростанням ортотропії матеріалу пластини ($\gamma = 2,1$; $\gamma = 2,6$) оптимальні отвори наближаються до нахилених під кутом $\pi/4$ до осі Ox “криволінійних прямокутників” (рис. 2b, c). Вибрані значення параметра ортотропії $\gamma = \sqrt[4]{E_x/E_y} \in \{1, 4; 2, 1; 2, 6\}$ наближено відповідають співвідношенням E_x/E_y для ортотропних матеріалів: E-Glass/Ероху ($E_x = 41,4$ GPa; $E_y = 10,3$ GPa; $G_{xy} = 4,27$ GPa; $\nu_{xy} = 0,28$); Carbon/Ероху (IM7/977-3; $E_x = 191$ GPa; $E_y = 9,93$ GPa; $G_{xy} = 7,79$ GPa; $\nu_{xy} = 0,35$); Graphite/Ероху (G_y-70/934; $E_x = 294$ GPa; $E_y = 6,34$ GPa; $G_{xy} = 4,90$ GPa; $\nu_{xy} = 0,23$) [15].

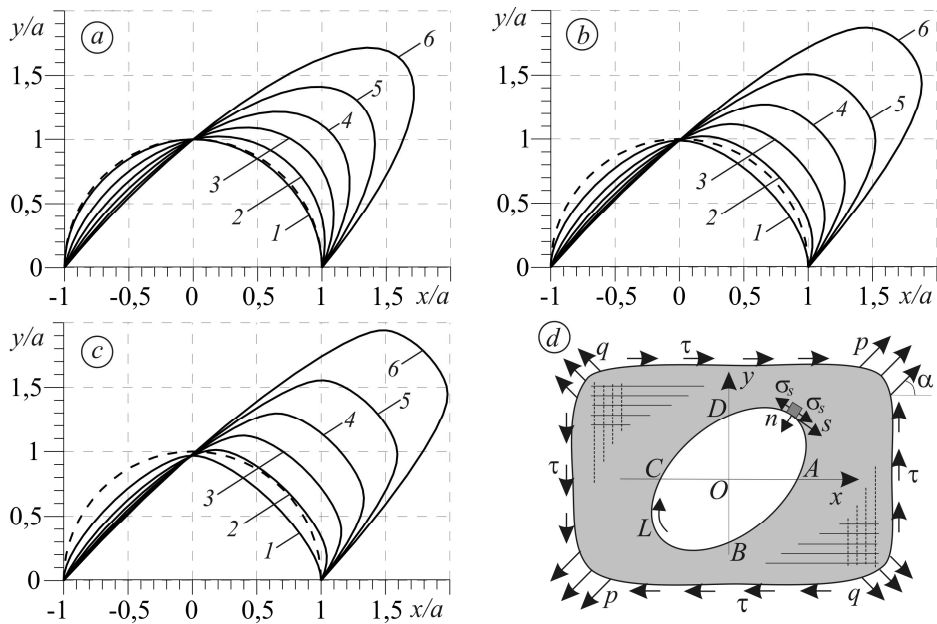


Рис. 2. Вплив додаткового зсуву квазіортотропної пластини ($\tau = \{0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5\}\sigma$ – лінії 1–6) за всебічного її розтягу ($p = q = \sigma$) на форми оптимальних отворів (їх верхні половини – CDA) порівняно з півколом (штрихова лінія) для $\gamma = 1,4$ (a); 2,1 (b) та 2,6 (c); d – схема задачі.

Fig. 2. Influence of additional shear loading of a quasi-orthotropic plate ($\tau = \{0; 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5\}\sigma$ – lines 1–6) under comprehensive tension ($p = q = \sigma$) on the shapes of optimal holes (their upper halves – CDA) with respect to semicircle (dashed line) for $\gamma = 1.4$ (a); 2.1 (b) and 2.6 (c); d – scheme of problem.

Для вищевказаних навантажень визначили розподіли контурних напружень (7) на стартових колових та знайдених оптимальних отворах (рис. 3). Зі зростанням рівня ортотропії пластини від $\gamma = 1,4$ до 2,6 діапазон зміни напружень σ_s на контурах колових отворів зростає з $4,5\sigma$ до $9,7\sigma$ для $\tau = 0,5\sigma$ (рис. 3a, c). На отриманих оптимальних отворах максимальні відносні відхилення контурних напружень σ_s від усереднених $\bar{\sigma}_s$ ($\delta = \max |(\sigma_s(\xi_j) - \bar{\sigma}_s) / \bar{\sigma}_s| 100\%$) не перевищують 0,3; 0,7; 1,5% для $\gamma = 1,4; 2,1; 2,6$ відповідно.

Знайдено оптимальні форми отворів у квазіортотропній пластині ($\gamma = 2,1$) за двовісного розтягу на нескінченності взаємно перпендикулярними та різними за значенням напруженнями: $p = \sigma, q = 0,75\sigma$ (рис. 4a), $p = \sigma, q = 0,5\sigma$ (рис. 4b) для низки кутів нахилу α напружень p до осі Ox і за відсутності зсувного навантаження на нескінченності ($\tau=0$). Відповідні розподіли відносних напружень σ_s/σ на колових та оптимальних отворах ілюструє рис. 5. Тут для всіх розглянутих кутів α на знайдених оптимальних отворах максимальні відносні відхилення δ контурних напружень від усереднених не перевищують 0,8% за навантаження $p = \sigma, q = 0,75\sigma$ і 2,5% – для $p = \sigma, q = 0,5\sigma$.

Вплив параметра ортотропії γ матеріалу пластини за двовісного розтягу та зсуву пластини на нескінченності на форми оптимальних отворів та розподіли напружень уздовж колових та оптимальних отворів демонструє рис. 6. Виявили, що він суттєво змінює розподіли контурних напружень на краю заданого колового отвору (рис. 6b). Зі зростанням ортотропії матеріалу пластини значно розширюється діапазон зміни напружень σ_s : з $2,2\sigma$ для ізотропного матеріалу

($\gamma = 1$) до $9,3\sigma$ для квазіортотропного ($\gamma = 3$). На форми оптимальних отворів параметр γ впливає значно менше (рис. ба), однак, навіть за відносно невеликої зміни форми отвору суттєво змінюється розподіл контурних напружень σ_s . Тут для різних значень γ для пошуку оптимальних отворів використали розклади (10) за параметрами P_m ($m = 1, \dots, 10$). Їх значення для оптимальних форм отворів та максимальні відносні відхилення δ контурних напружень σ_s від усереднених $\bar{\sigma}_s$ подано у таблиці.

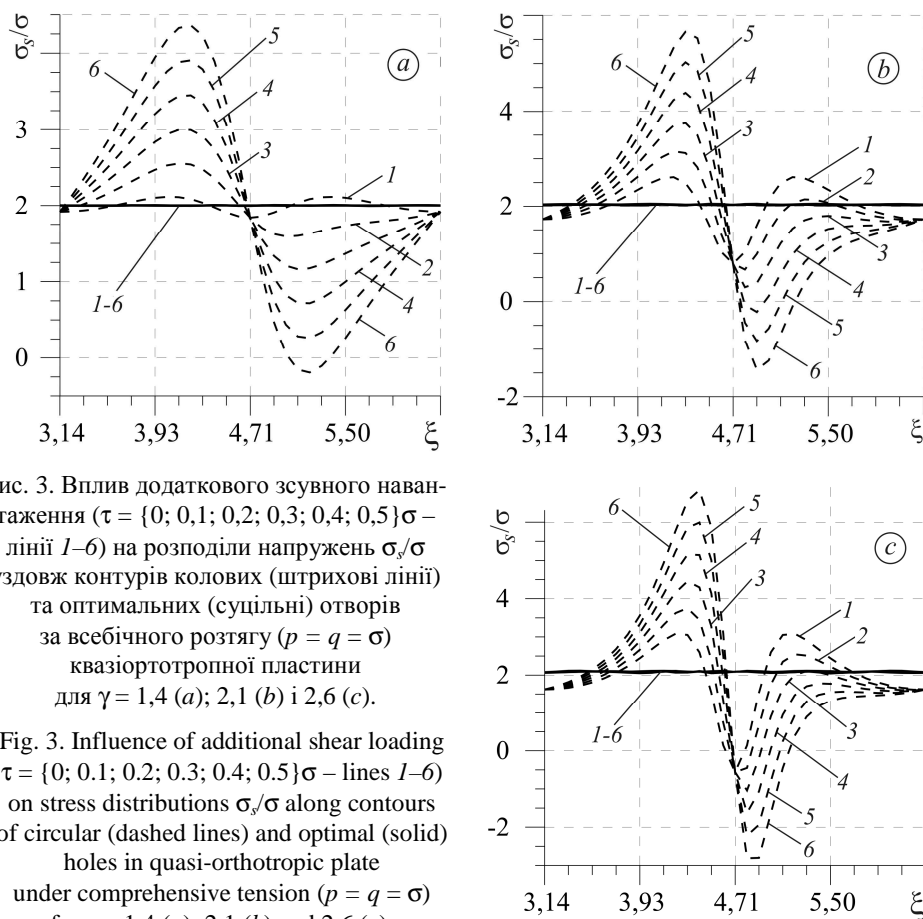


Рис. 3. Вплив додаткового зсувного навантаження ($\tau = \{0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5\}\sigma$ – лінії 1–6) на розподіли напружень σ_s/σ уздовж контурів колових (штрихові лінії) та оптимальних (суцільні) отворів за всебічного розтягу ($p = q = \sigma$) квазіортотропної пластини для $\gamma = 1,4$ (a); 2,1 (b) і 2,6 (c).

Fig. 3. Influence of additional shear loading $\tau = \{0; 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5\}\sigma$ – lines 1–6) on stress distributions σ_s/σ along contours of circular (dashed lines) and optimal (solid) holes in quasi-orthotropic plate under comprehensive tension ($p = q = \sigma$) for $\gamma = 1.4$ (a); 2.1 (b) and 2.6 (c).

Параметри оптимальних отворів P_m ($m = 1, \dots, 10$) та максимальні відносні відхилення δ контурних напружень від усереднених для навантажень:
 $p = \sigma, q = 0,75\sigma$ ($\alpha = \pi/2$), $\tau = 0,25\sigma$

γ	P_1 / P_6	P_2 / P_7	P_3 / P_8	P_4 / P_9	P_5 / P_{10}	$\delta(\%)$
1,0	1,002 / 1,399	-0,063 / -0,226	0,010 / 0,213	-0,238 / 0,211	-0,008 / -0,012	0,04
1,5	0,987 / 1,540	-0,703 / 0,019	0,027 / -0,019	0,015 / -0,027	-0,002 / -0,012	0,29
2,0	0,857 / 1,615	-0,889 / 0,121	0,127 / 0,102	-0,080 / -0,093	0,016 / 0,009	0,37
2,5	0,838 / 1,597	-0,924 / 0,153	0,139 / 0,103	-0,132 / -0,113	0,021 / 0,017	0,85
3,0	0,798 / 1,628	-0,880 / 0,141	0,186 / 0,111	-0,206 / -0,082	0,018 / 0,011	4,05

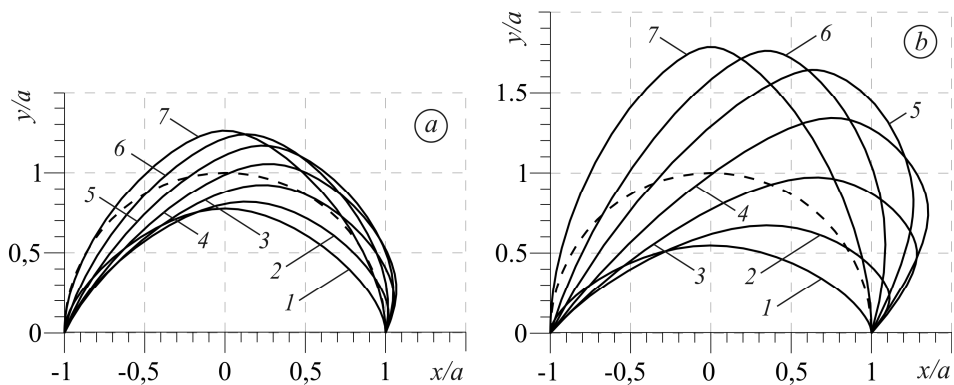


Рис. 4. Форми оптимальних отворів (їх верхні половини) порівняно з півколом (штрихова лінія) у квазіортотропній пластині ($\gamma = 2,1$) за двовісних розтягів $p = \sigma, q = 0,75\sigma$ (a); $p = \sigma, q = 0,5\sigma$ (b) для $\tau = 0$ і кутів $\alpha = 0; \pi/12; \pi/6; \pi/4; \pi/3; 5\pi/12; \pi/2$ (лінії 1–7).

Fig. 4. Shapes of optimal holes (their upper halves) with respect to a semicircle (dashed line) in a quasi-orthotropic plate ($\gamma = 2.1$) under biaxial tensions $p = \sigma, q = 0.75\sigma$ (a); $p = \sigma, q = 0.5\sigma$ (b) for $\tau = 0$ and angles $\alpha = 0; \pi/12; \pi/6; \pi/4; \pi/3; 5\pi/12; \pi/2$ (lines 1–7).

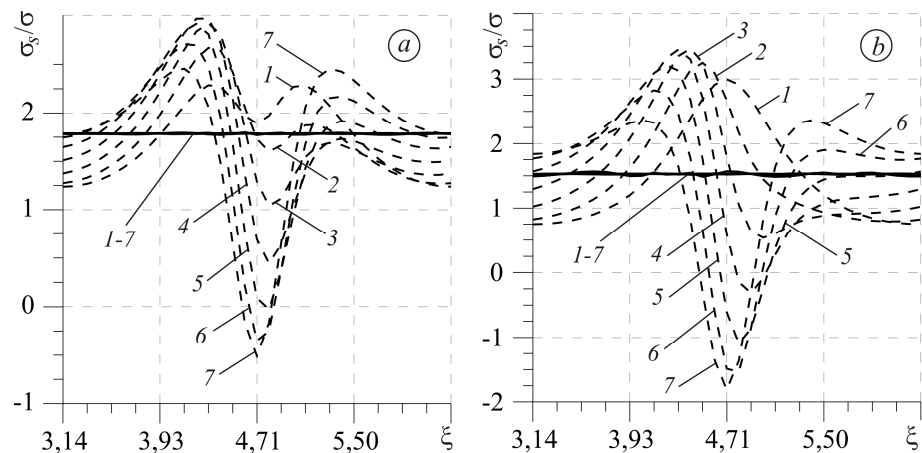


Рис. 5. Розподіли напружень σ_y/σ_x уздовж контурів колових (штрихові лінії) та оптимальних (суцільні) отворів у квазіортотропній пластині ($\gamma = 2,1$) за двовісного розтягу (пояснення див. рис. 4).

Fig. 5. Stress distributions σ_y/σ_x along contours of circular (dashed lines) and optimal (solid) holes in a quasi-orthotropic plate ($\gamma = 2.1$) under biaxial tension (see Fig. 4).

Додаткове зсувне навантаження квазіортотропної пластини на нескінченності за двовісного розтягу вздовж осей ортотропії істотно впливає на форми оптимальних отворів (див. рис. 2, ба), як і двовісні розтяги під кутом до осей ортотропії (див. рис. 4). За відсутності зсувного навантаження ($\tau = 0$) та двовісних розтягів квазіортотропної пластини вздовж осей ортотропії напруженнями p і q ($\alpha = \pi/2$) отримуємо попередні результати [9], а для ізотропного матеріалу ($\gamma = 1$) за двовісного розтягу та зсуву – відомі оптимальні еліптичні отвори [1, 14]. Внаслідок якісно різних розподілів контурних напружень σ_x у квазіортотропних [9] і ортотропних [8, 16] пластинках за однакових їх двовісних розтягів форми оптимальних отворів у них також різні [8, 9].

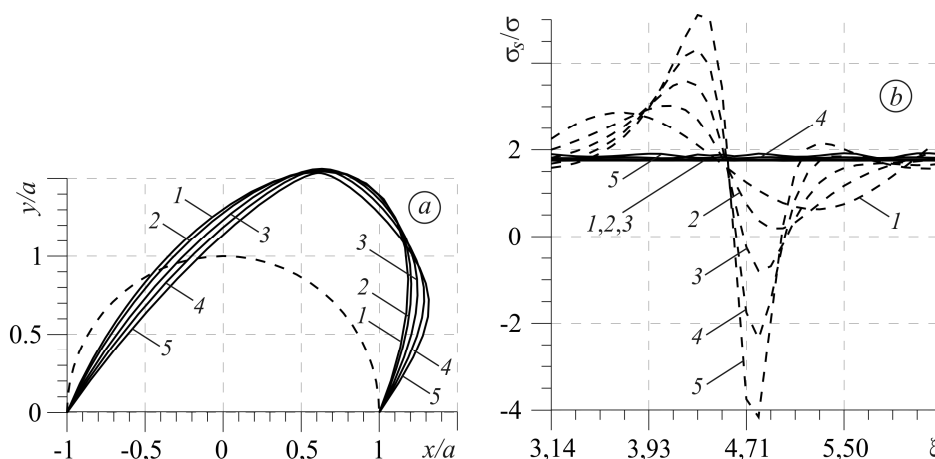


Рис. 6. Форми оптимальних отворів (верхні половини) порівняно з півколом (штрихова лінія) (а) та розподіли напружень σ_y/σ (b) на контурах колових (штрихові лінії) та оптимальних (суцільні) отворів за двовісного розтягу $p = \sigma$, $q = 0,75\sigma$, $\alpha = \pi/2$ і зсуву $\tau = 0,25\sigma$ для різних параметрів ортотропії $\gamma = 1; 1,5; 2; 2,5; 3$ (лінії 1–5).

Fig. 6. Shapes of optimal holes (upper halves) with respect to a semicircle (dashed line) (a) and stress distributions σ_y/σ (b) at contours of circular (dashed lines) and optimal (solid lines) holes in a quasi-orthotropic plate under biaxial tension $p = \sigma$, $q = 0.75\sigma$, $\alpha = \pi/2$ and shear $\tau = 0.25\sigma$ for different parameters of orthotropy $\gamma = 1; 1.5; 2; 2.5; 3$ (lines 1–5).

ВИСНОВКИ

Раніше розроблену методику знаходження оптимальних форм отворів у квазіортотропних пластинах за симетричного відносно осей ортотропії двовісного розтягу розвинуто на загальний випадок розтягу пластини у взаємно перпендикулярних напрямках (напруженнями різними як за значеннями, так і напрямками дії відносно осей ортотропії) та поперечного зсуву на нескінченності. Розв'язування обернених задач теорії пружності для квазіортотропної пластини з невідомою формою отвору зведено до мінімізації багатопараметричного функціонала середньоквадратичних відхилень контурних напружень від усереднених їх значень. Для цього використано ефективні числові розв'язки (методом сингулярних інтегральних рівнянь) відповідних прямих задач для плоских квазіортотропних тіл з гладкими отворами. Знайдено близькі до оптимальних форми отворів у квазіортотропних пластинах з різними рівнями ортотропії за одночасної дії зсувних навантажень на нескінченності вздовж осей ортотропії пластини та двовісних розтягів під кутом до них. Незначні максимальні відносні відхилення контурних напружень від усереднених для знайдених отворів підтверджують оптимальність їх форм. Розроблена методика та отримані результати придатні для проектування елементів конструкцій з оптимальними (з мінімальною концентрацією напружень) отворами у сучасному машинобудуванні, де використовують різні анізотропні (композитні) матеріали.

1. Черепанов Г. П. Обратные задачи плоской теории упругости // Прикл. математика и механика. – 1974. – **38**, № 6. – С. 963–979.
2. Космодамианский А. С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. – К.: Виц. шк., 1975. – 228 с.
3. Вигдергауз С. Б. Интегральное уравнение обратной задачи плоской теории упругости // Прикл. математика і механіка. – 1976. – **40**, № 3. – С. 566–569.
4. Мирсалимов В. М. Неоднородные упругопластические задачи. – М.: Наука, 1987. – 256 с.

5. *Savruk M. P. and Kravets' V. S.* Application of the method of singular integral equations to the determination of the contours of equistrong holes in plates // *Materials Science*. – 2002. – **38**, № 1. – P. 34–46.
(*Саврук М. П., Кравець В. С.* Застосування методу сингулярних інтегральних рівнянь для визначення контурів рівномісних отворів у пластинах // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2002. – **38**, № 1. – С. 31–40.)
6. *The cavity of the optimal shape under the shear stresses / A. V. Cherkaev, Y. Grabovsky, A. V. Movchan, and S. K. Serkov // Int. J. Solids Struct.* – 1998. – **35**, № 33. – P. 4391–4410.
7. *Vigdergauz S. B.* Energy-minimizing hole in an elastic plate under remote shear // *J. Mech. Mater. Struct.* – 2006. – **1**, № 2. – P. 387–406.
8. *Божидарнік В. В., Максимович О. В.* Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами. – Луцьк: ЛДТУ, 2003. – 226 с.
9. *Саврук М.П., Кравець В.С., Чоренький А. Б.* Визначення оптимальних форм отворів у квазіортотропній пластині за двовісного розтягу // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2021. – **57**, № 2. – С. 24–31.
10. *Hasebe N. and Sato M.* Stress analysis of quasi-orthotropic elastic plane // *Int. J. Solids Struct.* – 2013. – **50**. – P. 209–216.
11. *Savruk M. P., Kazberuk A.* Stress Concentration at Notches. – Cham: Springer, 2017. – 516 p.
12. *Savruk M. P., Kazberuk A., and Chornenkyi A. B.* Periodic system of closely located holes in a quasiorthotropic plane // *Materials Science*. – 2019. – **54**, № 5. – P. 656–665.
(*Саврук М. П., Казберук А., Чоренький А. Б.* Періодична система близько розташованих отворів у квазіортотропній площині // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2018. – **54**, № 5. – С. 48 – 55.)
13. *Dennis J. E. and Schnabel R. B.* Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations. – New Jersey: Englewood Cliffs, 1983. – 378 p.
14. *Черепанов Г. П., Еришов Л. В.* Механика разрушения. – М.: Машиностроение, 1977. – 224 с.
15. *Esp V. and Chan W. S.* Two parameter approximation to the orthotropic stress concentration factor. – Long Beach: SAMPE, 2008. – 10 p.
16. *Лехницький С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.

Одержано 13.05.2021