

УДК 539.3

## ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З МНОЖИНОЮ ОТВОРІВ ДОВІЛЬНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ ЗА ВРАХУВАННЯ РОЗПОДІЛЕНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ПОВЕРХНІ

Т. В. ШОПА, О. І. ТУЖЕЛЯК

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Побудовано розв'язок задачі про усталені поперечні коливання ортотропної пластини довільної форми з множиною отворів довільної конфігурації за дії гармонічного розподіленого в часі навантаження на поверхні в межах теорії, яка враховує поперечні зсуви та інерційні компоненти на основі непрямого методу граничних елементів. Розглянуто мішані гармонічні в часі крайові умови на контурах отворів та на зовнішній межі пластини. Для знаходження функцій Гріна використано послідовнісне подання дельта-функції Дірака та узагальнений метод рядів Фур'є. Наведено тестові числові результати для різних окремих випадків задачі.

**Ключові слова:** коливання, ортотропна пластина, отвори, розподілене навантаження, непрямий метод граничних елементів.

The solution of the problem on the steady state flexural vibrations of an orthotropic plate of arbitrary shape with a set of holes of arbitrary configuration under the effect of harmonic distributed in time load on the surface is constructed within the theory that takes into account transverse shear displacements and all inertial components, based on the indirect boundary elements method. Mixed harmonic in time boundary conditions on the contours of the holes and on the outer boundary of the plate are considered. To find the Green's functions the sequential representation of the Dirac delta-function and the generalized Fourier series method are used. Test numerical results for different partial cases of the problem are presented.

**Keywords:** vibrations, orthotropic plate, holes, distributed load, indirect boundary elements method.

**Вступ.** В інженерній практиці часто необхідно розрахувати анізотропні тонкостінні елементи конструкцій складної форми за дії динамічних навантажень. Через умови їх експлуатації обчислення слід виконувати з високою точністю. Тому тут ефективні математичні методи в межах уточнених теорій. В літературі достатньо праць, де досліджено вільні коливання пластин з отворами [1–10]. Розв'язуючи задачі такого класу, здебільшого застосовують метод скінченних елементів. Авторам невідомі праці про вимушені усталені поперечні коливання ортотропних пластин довільної форми з множиною отворів довільної конфігурації з мішаними крайовими умовами як на зовнішній межі, так і на контурах отворів за врахування розподіленого навантаження на поверхні.

**Формулювання задачі.** Розглянемо задачу про усталені поперечні коливання ортотропної пластини із зовнішньою межею довільної форми, яка має  $N$  отворів довільної конфігурації. Контурами отворів є криві  $L^{(j)}$ ,  $j = \overline{1, N}$ , а зовнішня межа пластини складається з трьох взаємодоповнювальних кривих  $L^{(N+1)}$ ,  $L^{(N+2)}$ ,  $L^{(N+3)}$ . На контурах  $N_1$  отворів задано компоненти переміщень, на контурах  $N_2$  – компо-

ненти зусиль, а на контурах  $N_3$  – комбінації компонент переміщень і зусиль. На поверхні пластини діє гармонічне в часі довільно розподілене навантаження, яке задають функції  $q, m_1, m_2$ . На контурах отворів та на зовнішній межі пластини задані мішані гармонічні в часі крайові умови:

$$\begin{aligned} w &= w_0^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad \gamma_n = \gamma_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad \gamma_\tau = \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \\ \alpha &\in L^{(j)}, \quad j = \overline{1, N_1}, \quad \alpha \in L^{(N+1)}, \quad j = N+1, \\ Q_n &= Q_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad M_n = M_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad M_\tau = M_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad (1) \\ \alpha &\in L^{(j)}, \quad j = \overline{N_1+1, N_1+N_2}, \quad \alpha \in L^{(N+2)}, \quad j = N+2, \\ w &= w^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad M_n = M_{n0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \quad \gamma_\tau = \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha) \sin(\omega t), \\ \alpha &\in L^{(j)}, \quad j = \overline{N_1+N_2+1, N}, \quad \alpha \in L^{(N+3)}, \quad j = N+3. \end{aligned}$$

Ключова система диференціальних рівнянь у межах теорії пластин, яка враховує поперечні зсуви та інерційні компоненти, має вигляд

$$\begin{aligned} [L]\{U\} &= -\{P\}, \quad \{U\} = \{w, \gamma_1, \gamma_2\}^T, \quad \{P\} = \{q, m_1, m_2\}^T, \\ L_{11} &= \Lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \Lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - 2h\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad L_{22} = D_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \Lambda_1 - \frac{2h^3}{3} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \\ L_{33} &= D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + D_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \Lambda_2 - \frac{2h^3}{3} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad L_{23} = (D_{12} \nu_{12} + D_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \quad (2) \\ L_{32} &= (D_{12} + D_2 \nu_{21}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \quad L_{12} = -L_{21} = \Lambda_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \quad L_{13} = -L_{31} = \Lambda_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2}. \end{aligned}$$

Тут використали позначення статті [11].

**Розв'язування задачі.** Розв'язок крайової задачі (2), (1) шукатимемо непрямым методом граничних елементів. Для цього використаємо функцію Гріна в прямокутній області  $\Pi$ :  $0 \leq \alpha_1 \leq l_1$ ,  $0 \leq \alpha_2 \leq l_2$ , яка містить розглядувану багатозв'язну область  $\Omega$ , з однорідними крайовими умовами типу шарнірного опирання на контурі

$$w = 0, \quad M_n = 0, \quad \gamma_\tau = 0, \quad \alpha \in \partial\Pi \quad (3)$$

і класичний розв'язок Фур'є системи (2) в прямокутній області  $\Pi$  з однорідними крайовими умовами (3).

Функцію Гріна для системи диференціальних рівнянь (2) знаходимо, використовуючи послідовнісне подання дельта-функції Дірака та метод рядів Фур'є [11, 12]:

$$\begin{aligned} \{\hat{U}(\alpha, \alpha^r, t)\} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{\hat{U}(\alpha, \alpha^r, \varepsilon, t)\} = \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon) [E_{km}(\alpha)] [U_{km}] [E_{km}(\alpha^r)] \{T^r\} \sin(\omega t), \quad (4) \\ \{\hat{U}(\alpha, \alpha^r, t)\} &= \{\hat{w}(\alpha, \alpha^r, t), \hat{\gamma}_1(\alpha, \alpha^r, t), \hat{\gamma}_2(\alpha, \alpha^r, t)\}^T, \quad \{T^r\} = \{T_1^r, T_2^r, T_3^r\}^T, \end{aligned}$$

$$[U_{km}] = \begin{bmatrix} w_{km}^1 & w_{km}^2 & w_{km}^3 \\ \gamma_{1km}^1 & \gamma_{1km}^2 & \gamma_{1km}^3 \\ \gamma_{2km}^1 & \gamma_{2km}^2 & \gamma_{2km}^3 \end{bmatrix} = [L^{km}]^{-1},$$

величина  $C_{km}(\epsilon)$  та елементи матриць  $[L^{km}]$ ,  $[E_{km}(\alpha)]$ ,  $[E_{km}(\alpha^r)]$  такі ж, як у праці [11].

Застосувавши до системи диференціальних рівнянь з частинними похідними (2) в області  $\Pi$  з однорідними крайовими умовами (3) метод рядів Фур'є, отримаємо:

$$\{\bar{U}(\alpha, t)\} = - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [E_{km}(\alpha)] [U_{km}] \{P_{km}\} \sin(\omega t), \quad (5)$$

$$\{\bar{U}(\alpha, t)\} = \{\bar{w}(\alpha, t), \bar{\gamma}_1(\alpha, t), \bar{\gamma}_2(\alpha, t)\}^T, \quad \{P_{km}\} = \{q_{km}, m_{1km}, m_{2km}\}.$$

Для побудови інтегральних рівнянь крайової задачі вводимо узагальнений контур  $L = L^{(1)} \cup L^{(2)} \cup \dots \cup L^{(N)} \cup L^{(N+1)} \cup L^{(N+2)} \cup L^{(N+3)}$  і такі функції на ньому:

$$\{T(\xi)\} = \{T_1(\xi), T_2(\xi), T_3(\xi)\}^T = \{T^{(j)}(\xi)\} = \{T_1^{(j)}(\xi), T_2^{(j)}(\xi), T_3^{(j)}(\xi)\}^T, \\ \xi \in L^{(j)}, \quad j = \overline{1, N+3}.$$

Розв'язок подамо як суму потенціалу простого шару та розв'язку (5):

$$\{U(\alpha, t)\} = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \sum_{L} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\epsilon) [E_{km}(\alpha)] [U_{km}] [E_{km}(\xi)] \{T(\xi)\} dl(\xi) \sin(\omega t) - \\ - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [E_{km}(\alpha)] [U_{km}] \{P_{km}\} \sin(\omega t), \quad \{U(\alpha, t)\} = \{w(\alpha, t), \gamma_1(\alpha, t), \gamma_2(\alpha, t)\}^T. \quad (6)$$

За поданням розв'язку (6) та крайовими умовами (1) побудуємо систему інтегральних рівнянь задачі для невідомих функцій густин потенціалу простого шару  $\{T(\xi)\}$ . Для крайових умов, коли на контурах отворів задані компоненти зусиль, щоб уникнути стрибка похідної від потенціалу простого шару на межі, застосовуємо метод фіктивного контуру. Згідно з ним крайові умови задовольняють не на реальній межі, а на фіктивній, зміщеній на деяку малу величину  $\epsilon$  всередину розглядуваної області. Криві зміщених контурів позначатимемо  $L^{\epsilon(j)}$ . В результаті отримаємо систему  $3(N+3)$  інтегральних рівнянь, яку розв'язуємо методом колокацій, згідно з яким контури узагальненої кривої  $L$  замінюємо ламаними і на кожному з прямолінійних відрізків задаємо розподіл невідомих функцій густин потенціалів простого шару  $\{T^{(j)r}(\xi)\} = \{T^{(j)r}\} \delta(\alpha^{(j)r}, \xi)$ , де  $\alpha^{(j)r}$  – середини відрізків розбиття  $j$ -го контуру,  $r = \overline{1, S^{(j)}}$ ,  $S^{(j)}$  – кількість відрізків розбиття. Тоді система  $3 \sum_{j=1}^{N+3} S^{(j)}$  лінійних алгебричних рівнянь для дискретних

значень невідомих густин  $\{T^{(j)r}\}$ ,  $j = \overline{1, N+3}$ ,  $r = \overline{1, S^{(j)}}$  матиме вигляд

$$\left\{ w_0^{(j)}(\alpha^{(j)q}), \gamma_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) \right\}^T =$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{f=1}^{N+3S^{(f)}} \sum_{r=1}^K \sum_{k=0}^M \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) \left[ \Omega_{km}^{(U)}(\alpha^{(j)q}) \right] \left[ E_{km}(\alpha^{(f)r}) \right] \{T^{(f)r}\} - \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \left[ \Omega_{km}^{(U)}(\alpha^{(j)q}) \right] \{P_{km}\}, \\
&\quad \alpha^{(j)q} \in L^{(j)}, j = \overline{1, N_1}, j = N+1, q = \overline{1, S^{(j)}}, \\
&\quad \left\{ Q_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), M_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), M_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) \right\}^T = \\
&= - \sum_{f=1}^{N+3S^{(f)}} \sum_{r=1}^K \sum_{k=0}^M \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) \left[ \Omega_{km}^{(P)}(\alpha^{(j)q}) \right] \left[ E_{km}(\alpha^{(f)r}) \right] \{T^{(f)r}\} - \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \left[ \Omega_{km}^{(P)}(\alpha^{(j)q}) \right] \{P_{km}\}, \\
&\quad \alpha^{(j)q} \in L^{\varepsilon(j)}, j = \overline{N_1+1, N_1+N_2}, j = N+2, q = \overline{1, S^{(j)}}, \tag{7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_0^{(j)}(\alpha^{(j)q}) &= - \sum_{f=1}^{N+3S^{(f)}} \sum_{r=1}^K \sum_{k=0}^M \sum_{m=0}^3 \sum_{i=1}^3 C_{km}(\varepsilon) w_i(\alpha^{(j)q}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r} - \\
&\quad - \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^3 w_i(\alpha^{(j)q}) P_{km}^i,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) &= - \sum_{f=1}^{N+3S^{(f)}} \sum_{r=1}^K \sum_{k=0}^M \sum_{m=0}^3 \sum_{i=1}^3 C_{km}(\varepsilon) \gamma_{i\tau}(\alpha^{(j)q}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r} - \\
&\quad - \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^3 \gamma_{i\tau}(\alpha^{(j)q}) P_{km}^i,
\end{aligned}$$

$$\alpha^{(j)q} \in L^{(j)}, j = \overline{N_1+N_2+1, N}, j = N+3, q = \overline{1, S^{(j)}},$$

$$\begin{aligned}
M_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) &= - \sum_{f=1}^{N+3S^{(f)}} \sum_{r=1}^K \sum_{k=0}^M \sum_{m=0}^3 \sum_{i=1}^3 C_{km}(\varepsilon) M_{in}(\alpha^{(j)q}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r} - \\
&\quad - \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^3 M_{in}(\alpha^{(j)q}) P_{km}^i,
\end{aligned}$$

$$\alpha^{(j)q} \in L^{\varepsilon(j)}, j = \overline{N_1+N_2+1, N}, j = N+3, q = \overline{1, S^{(j)}},$$

де елементи матриць  $\left[ \Omega_{km}^{(U)}(\alpha^{(j)q}) \right]$ ,  $\left[ \Omega_{km}^{(P)}(\alpha^{(j)q}) \right]$  та  $w_i(\alpha^{(j)q})$ ,  $\gamma_{i\tau}(\alpha^{(j)q})$ ,  $M_{in}(\alpha^{(j)q})$ ,  $\Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r})$  визначали за формулами, поданими у статті [10].

Якщо використовувати лінійну апроксимацію функцій густин потенціалу простого шару  $\{T^{(j)r}(\xi)\} = \{T^{(j)r}\}$ ,  $j = \overline{1, N+3}$ ,  $r = \overline{1, S^{(j)}}$ , то в системі лінійних алгебричних рівнянь (7) матриця  $[E_{km}(\alpha^r)]$  на кожному контурі виглядатиме так:

$$\left[ E_{km}(\alpha^r) \right] = \begin{bmatrix} \Psi_{km}^{ss}(\alpha^r) & 0 & 0 \\ 0 & \Psi_{km}^{cs}(\alpha^r) & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{km}^{sc}(\alpha^r) \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
z_{1km} &= \lambda_{1k} \alpha_1^r + \lambda_{2m} \alpha_2^r, & z_{2km} &= \lambda_{1k} \alpha_1^r - \lambda_{2m} \alpha_2^r, \\
y_{1km} &= \lambda_{1k} \tau_1^r + \lambda_{2m} \tau_2^r, & y_{2km} &= \lambda_{1k} \tau_1^r - \lambda_{2m} \tau_2^r,
\end{aligned}$$

$$\Psi_{km}^{ss}(\alpha^r) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos(z_{2km}) l^r - \frac{1}{2} \cos(z_{1km}) l^r, & \text{якщо } y_{1km} = 0, y_{2km} = 0, \\ \cos(z_{2km}) \sin\left(\frac{1}{2} y_{2km} l^r\right) / y_{2km} - \cos(z_{1km}) \sin\left(\frac{1}{2} y_{1km} l^r\right) / y_{1km} \\ \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

$$\Psi_{km}^{cs}(\alpha^r) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin(z_{1km}) l^r - \frac{1}{2} \sin(z_{2km}) l^r, & \text{якщо } y_{1km} = 0, y_{2km} = 0, \\ \sin(z_{1km}) \sin\left(\frac{1}{2} y_{1km} l^r\right) / y_{1km} - \sin(z_{2km}) \sin\left(\frac{1}{2} y_{2km} l^r\right) / y_{2km} \\ \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

$$\Psi_{km}^{sc}(\alpha^r) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin(z_{1km}) l^r + \frac{1}{2} \sin(z_{2km}) l^r, & \text{якщо } y_{1km} = 0, y_{2km} = 0, \\ \sin(z_{1km}) \sin\left(\frac{1}{2} y_{1km} l^r\right) / y_{1km} + \sin(z_{2km}) \sin\left(\frac{1}{2} y_{2km} l^r\right) / y_{2km} \\ \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

За дискретними значеннями функцій невідомих густин потенціалів простого шару  $\{T^{(j)r}\}$ ,  $j = \overline{1, N+3}$ ,  $r = \overline{1, S^{(j)}}$  можна знайти характеристики напружено-деформованого стану вздовж довільного напрямку:

$$\begin{aligned}
\begin{cases} w(\alpha, t) \\ \gamma_n(\alpha, t) \\ \gamma_\tau(\alpha, t) \end{cases} &= - \sum_{j=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(j)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) \left[ \Omega_{km}^{(U)}(\alpha) \right] \left[ E_{km}(\alpha^{(j)r}) \right] \{T^{(j)r}\} \sin(\omega t) - \\ &\quad - \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \left[ \Omega_{km}^{(U)}(\alpha) \right] \{P_{km}\} \sin(\omega t), \\ \begin{cases} Q_n(\alpha, t) \\ M_n(\alpha, t) \\ M_\tau(\alpha, t) \end{cases} &= - \sum_{j=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(j)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) \left[ \Omega_{km}^{(P)}(\alpha) \right] \left[ E_{km}(\alpha^{(j)r}) \right] \{T^{(j)r}\} \sin(\omega t) - \\ &\quad - \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \left[ \Omega_{km}^{(P)}(\alpha) \right] \{P_{km}\} \sin(\omega t).
\end{aligned}$$

**Числові результати.** Проаналізуємо окремі випадки задачі з різними типами крайових умов на контурах отворів і на зовнішній межі пластини за врахування розподіленого навантаження, яке діє на деяку прямокутну ділянку на поверхні пластини. Наведемо амплітуди прогинів пластин з круглою зовнішньою межею та з різною кількістю круглих отворів.

Розглянемо пластину круглої форми з радіусом  $R = 0,9$  m і товщиною  $2h$ ,  $h = 0,005$  m, яка міститься в прямокутній області зі сторонами  $l_1 = l_2 = 2$  m і має

такі фізичні параметри:  $E_1 = 210$  GPa,  $E_2 = 70$  GPa,  $G_{12} = G_{13} = 80,77$  GPa,  $G_{23} = 26,92$  GPa,  $\nu_{12} = 0,3$ ,  $\nu_{21} = \frac{E_1}{E_2} \nu_{12} = 0,9$ ,  $\rho = 5000$  kg/m<sup>3</sup>. Частота усталених коливань

$$\omega = 5 \text{ Hz. Параметри апроксимації: } C_{km}(\varepsilon) = \mu_{km} \frac{4 \sin^2\left(\frac{\lambda_{1k}\varepsilon_1}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\lambda_{2m}\varepsilon_2}{2}\right)}{\left(\frac{\lambda_{1k}\varepsilon_1}{2}\right)^2 \left(\frac{\lambda_{2m}\varepsilon_2}{2}\right)^2},$$

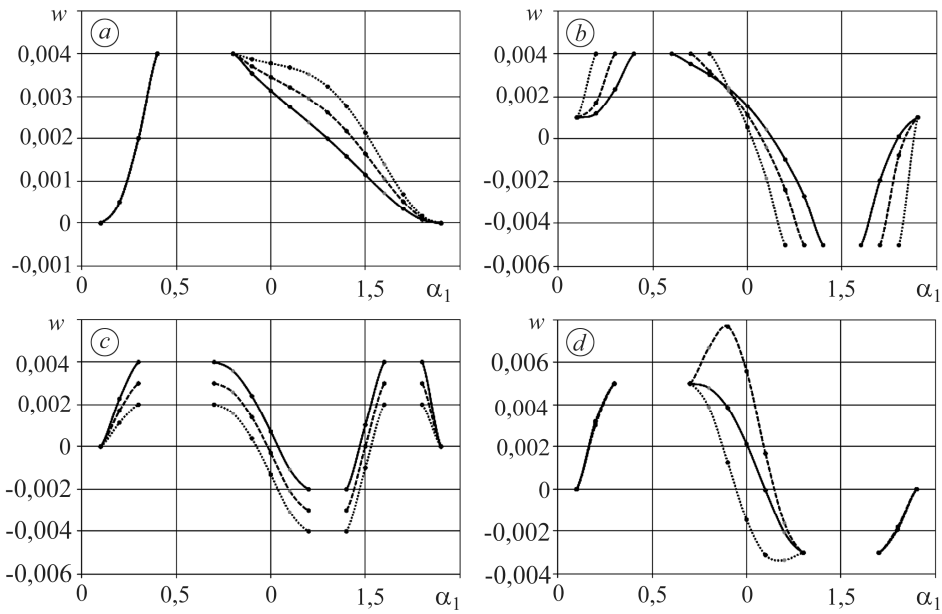
$$\varepsilon^{(j)} = \frac{2\pi R_j}{3S^{(j)}}, \quad j = \overline{1, N+1}.$$

Рисунок (графік *a*) ілюструє поведінку амплітуди прогину жорстко закріпленої пластини з отвором радіусом  $R_1 = 0,2$  м з центром у точках  $\alpha_1 = 0,6$  м,  $\alpha_2 = 1$  м за дії на прямокутну область поверхні пластини зі сторонами завдовжки  $a = b = 0,4$  м та центром  $\alpha_1 = 1,4$  м,  $\alpha_2 = 1$  м розподіленого навантаження різного рівня. Задані крайові умови на контурі отвору та зовнішній межі пластини:  $w_0^{(1)} = 0,004$  м,  $M_{n0}^{(1)} = 0$ ,  $\gamma_{\tau 0}^{(1)} = 0$ ;  $w_0^{(2)} = \gamma_{n0}^{(2)} = \gamma_{\tau 0}^{(2)} = 0$ . Отже, зі збільшенням навантаження зростає амплітуда прогину пластини в області дії навантаження і на деякій відстані від неї.

На графіку *b* зображено амплітуду прогину пластини з різними радіусами отворів. Координати центрів отворів:  $\alpha_1^{(1)} = 0,5$  м,  $\alpha_2^{(1)} = 1$  м,  $\alpha_1^{(2)} = 1,5$  м,  $\alpha_2^{(2)} = 1$  м. Навантаження:  $q = 35000$  N/m<sup>2</sup>;  $\alpha_1 = 1$  м,  $\alpha_2 = 1$  м – центр області дії;  $a = 0,2$  м,  $b = 0,4$  м – довжини сторін. Крайові умови на контурах отворів та на зовнішній межі пластини такі:  $w_0^{(1)} = 0,004$  м,  $M_{n0}^{(1)} = 0$ ,  $\gamma_{\tau 0}^{(1)} = 0$ ;  $w_0^{(2)} = -0,005$  м,  $M_{n0}^{(2)} = 2000$  N·м,  $\gamma_{\tau 0}^{(2)} = 0$ ;  $w_0^{(3)} = 0,001$  м,  $\gamma_{n0}^{(3)} = \gamma_{\tau 0}^{(3)} = 0$ . Таким чином, значення в точках на краю отворів та на межі пластини узгоджуються з крайовими умовами.

Проаналізуємо (див. рисунок, графік *c*) зміну амплітуди прогину пластини, яка має три отвори з радіусами  $R_1 = 0,2$  м,  $R_2 = R_3 = 0,1$  м та центрами в точках  $\alpha_1^{(1)} = 0,5$  м,  $\alpha_2^{(1)} = 1$  м,  $\alpha_1^{(2)} = 1,3$  м,  $\alpha_2^{(2)} = 1$  м,  $\alpha_1^{(3)} = 1,7$  м,  $\alpha_2^{(3)} = 1$  м за різних крайових умов на контурах отворів. Крайові умови для шарнірно опертої зовнішньої межі пластини  $w_0^{(4)} = 0$ ,  $M_{n0}^{(4)} = 0$ ,  $\gamma_{\tau 0}^{(4)} = 0$ . Навантаження  $q = 85000$  N/m<sup>2</sup> діє на прямокутну область зі сторонами  $a = 0,3$  м,  $b = 0,4$  м та центром  $\alpha_1 = 0,95$  м,  $\alpha_2 = 1$  м. Тут зі зміною крайових умов на контурах отворів амплітуда прогину змінюється на всій області пластини.

На графіку *d* подано амплітуду прогину шарнірно опертої пластини з двома підкріпченими отворами за різної частоти коливань. Радіуси та центри отворів:  $R_1 = R_2 = 0,2$  м,  $\alpha_1^{(1)} = 0,5$  м,  $\alpha_2^{(1)} = 1$  м,  $\alpha_1^{(2)} = 1,5$  м,  $\alpha_2^{(2)} = 1$  м. Крайові умови на контурах отворів та на межі пластини:  $w_0^{(1)} = 0,005$  м,  $\gamma_{n0}^{(1)} = \gamma_{\tau 0}^{(1)} = 0$ ,  $w_0^{(2)} = -0,003$  м,  $\gamma_{n0}^{(2)} = \gamma_{\tau 0}^{(2)} = 0$ ;  $w_0^{(3)} = 0$ ,  $M_{n0}^{(3)} = 0$ ,  $\gamma_{\tau 0}^{(3)} = 0$ . Навантаження:  $q = 70000$  N/m<sup>2</sup>;  $\alpha_1 = 1$  м,  $\alpha_2 = 1$  м – центр області дії;  $a = b = 0,4$  м – довжини сторін. Тут амплітуда прогину пластини суттєво залежить від частоти коливань.



Амплітуда прогину пластини на лінії  $\alpha_2 = 1$  м для різних навантажень  
 (a: суцільна лінія –  $q = 10000 \text{ N/m}^2$ , штрихова – 20000, пунктирна – 30000);  
 радіусів отворів (b: суцільна лінія –  $R_1 = R_2 = 0,1$  м, штрихова – 0,2, пунктирна – 0,3);  
 крайових умов на контурах отворів (c: суцільна лінія –  $w_0^{(1)} = 0,004$  м,  
 $\gamma_{n0}^{(1)} = \gamma_{\tau 0}^{(1)} = 0$ ,  $w_0^{(2)} = -0,002$  м,  $\gamma_{n0}^{(2)} = \gamma_{\tau 0}^{(2)} = 0$ ,  $w_0^{(3)} = 0,004$  м,  $\gamma_{n0}^{(3)} = \gamma_{\tau 0}^{(3)} = 0$ ;  
 штрихова –  $w_0^{(1)} = 0,003$  м,  $\gamma_{n0}^{(1)} = \gamma_{\tau 0}^{(1)} = 0$ ,  $w_0^{(2)} = -0,003$  м,  $\gamma_{n0}^{(2)} = \gamma_{\tau 0}^{(2)} = 0$ ,  
 $w_0^{(3)} = 0,003$  м,  $\gamma_{n0}^{(3)} = \gamma_{\tau 0}^{(3)} = 0$ ; пунктирна –  $w_0^{(1)} = 0,002$  м,  $\gamma_{n0}^{(1)} = \gamma_{\tau 0}^{(1)} = 0$ ,  $w_0^{(2)} = -0,004$  м,  
 $\gamma_{n0}^{(2)} = \gamma_{\tau 0}^{(2)} = 0$ ,  $w_0^{(3)} = 0,002$  м,  $\gamma_{n0}^{(3)} = \gamma_{\tau 0}^{(3)} = 0$ ); за різної частоти коливань  
 (d: суцільна лінія –  $\omega = 100$  Hz; штрихова – 150; пунктирна – 200).

Deflection amplitude of the plate on the line  $\alpha_2 = 1$  m in the case of different loads  
 (a: solid line –  $q = 10000 \text{ N/m}^2$ , dashed – 20000, dotted – 30000); holes radii (b: solid line –  
 $R_1 = R_2 = 0.1$  m, dashed – 0.2, dotted – 0.3); boundary conditions on the holes contours  
 (c: solid line –  $w_0^{(1)} = 0.004$  m,  $\gamma_{n0}^{(1)} = \gamma_{\tau 0}^{(1)} = 0$ ,  $w_0^{(2)} = -0.002$  m,  $\gamma_{n0}^{(2)} = \gamma_{\tau 0}^{(2)} = 0$ ,  
 $w_0^{(3)} = 0.004$  m,  $\gamma_{n0}^{(3)} = \gamma_{\tau 0}^{(3)} = 0$ ; dashed –  $w_0^{(1)} = 0.003$  m,  $\gamma_{n0}^{(1)} = \gamma_{\tau 0}^{(1)} = 0$ ,  $w_0^{(2)} = -0.003$  m,  
 $\gamma_{n0}^{(2)} = \gamma_{\tau 0}^{(2)} = 0$ ,  $w_0^{(3)} = 0.003$  m,  $\gamma_{n0}^{(3)} = \gamma_{\tau 0}^{(3)} = 0$ ; dotted –  $w_0^{(1)} = 0.002$  m,  $\gamma_{n0}^{(1)} = \gamma_{\tau 0}^{(1)} = 0$ ,  
 $w_0^{(2)} = -0.004$  m,  $\gamma_{n0}^{(2)} = \gamma_{\tau 0}^{(2)} = 0$ ,  $w_0^{(3)} = 0.002$  m,  $\gamma_{n0}^{(3)} = \gamma_{\tau 0}^{(3)} = 0$ ); for different vibration  
 frequencies (d: solid line –  $\omega = 100$  Hz; dashed – 150; dotted – 200).

## ВИСНОВКИ

Розв'язано задачу про усталені поперечні коливання ортотропної пластини довільної форми з множиною отворів довільної конфігурації з мішаними крайовими умовами на їх контурах та на зовнішній межі пластини за врахування гармонічного в часі розподіленого навантаження на поверхні за використання непрямого методу граничних елементів. Застосовано рівняння уточненої теорії пластин, які враховують поперечні зсуви та інерційні компоненти, зокрема й інерцію обертання. Для знаходження розв'язку задачі вжито послідовнісний підхід до зображення функцій Гріна та метод рядів Фур'є. Систему інтегральних рівнянь розв'язано методом колокацій. Наведено числові результати для круглої

пластини з різною кількістю круглих отворів з різними крайовими умовами на їх контурах та на зовнішній межі пластини за врахування розподіленого навантаження, яке діє на деяку прямокутну ділянку на поверхні пластини. Отримані тестові числові результати свідчать, що амплітуда прогину пластини суттєво залежить від навантаження, крайових умов, частоти коливань та розмірів отворів. Це дає змогу оптимально вибирати фізичні та геометричні параметри пластини для її ефективної роботи під дією динамічних навантажень.

1. *Cheng L., Li Y. Y., and Yam L. H.* Vibration analysis of annular-like plates // *J. of Sound and Vibration.* – 2003. – **262**, № 5. – P. 1153–1170.
2. *Hota S. S. and Pahdi P.* Vibration of plates with arbitrary shapes of cutouts // *J. of Sound and Vibration.* – 2007. – **302**, № 4–5. – P. 1030–1036.
3. *Moon K. Kwak and Sangbo Han.* Free vibration analysis of rectangular plate with a hole by means of independent coordinate coupling method // *J. of Sound and Vibration.* – 2007. – **306**, № 1–2. – P. 12–30.
4. *Laura P. A. A. and Avalos D. R.* Small amplitude, transverse vibrations of circular plates with an eccentric rectangular perforation elastically restrained against rotation and translation on both edges // *J. of Sound and Vibration.* – 2008. – **312**, № 4–5. – P. 906–914.
5. *Thakare Sh. B. and Damale A. V.* Free Vibration Analysis of circular plates with holes and cutouts // *J. of Mechanical and Civil Eng.* – 2013. – **8**, № 2. – P. 46–54.
6. *Torabi K. and Azadi A. R.* Vibration analysis for rectangular plate having a circular central hole with point support by Rayleigh-Ritz method // *J. of Solid Mechanics.* – 2014. – **6**, № 1. – P. 28–42.
7. *Al-Shammari M.* Effect of hole shape on free vibration characteristics of unidirectional composite plates // *The Iraqi J. for Mech. and Mater. Eng.* – 2015. – **15**, № 1. – P. 31–48.
8. *Merneed A., Nalluri M. R., and Vissakodeti V. S. R.* Free vibration analysis of an elliptical plate with cut-out // *J. of Vibroengineering.* – 2017. – **19**, № 4. – P. 2341–2353.
9. Modeling and Simulation of Transverse Free Vibration Analysis of a Rectangular Plate with Cutouts Using Energy Principles / Sh. Shi, B. Xiao, G. Jin, and Ch. Gao // *Shock and Vibration.* – 2018. – **2018**. – 16 p.
10. *Курна Л. В., Тимченко Г. Н., Осетров А. А.* Нелинейные свободные колебания многослойных пологих оболочек и пластин с вырезами и различными граничными условиями // *Вісник НТУ “ХПІ”. Сер.: Мат. моделювання в техніці та технологіях.* – 2018. – № 3. – С. 52–59.
11. *Shopa T. V.* Transverse vibration of an orthotropic plate with a collection of holes of arbitrary configuration and mixed boundary conditions // *Materials Science.* – 2018. – **54**, № 3. – P. 368–377.  
(*Шопа Т. В.* Поперечні коливання ортотропної пластини з множиною отворів довільної конфігурації та мішаними крайовими умовами // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2018. – **54**, № 3. – С. 73–80.)
12. *Бурак Я. Й., Рудавський Ю. К., Сухорольський М. А.* Аналітична механіка локально навантажених оболонок. – Львів: Інтеллект-Захід, 2007. – 240 с.

Одержано 22.12.2020