

УДК 359.3

## ТЕРМОНАПРУЖЕННЯ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИХ ТІЛ ЗА ВІДПАЛУ

М. Г. СТАЦУК<sup>1</sup>, Є. М. ІРЗА<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів;

<sup>2</sup> Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Запропоновано методику визначення термонапруженого стану в'язкопружних тіл з функціонально-градієнтних матеріалів за відпалу. Розроблено числовий алгоритм розв'язання відповідної задачі та реалізовано його для задач теплопровідності й термо-в'язкопружності. Оцінено термонапружений стан порожнистого циліндра за заданим режимом відпалу. Проілюстровано зміну його температурного і напруженого станів.

**Ключові слова:** термонапружений стан, тіло обертання, функціонально-градієнтний матеріал, метод скінченних елементів, порожнистий циліндр.

A method for calculating the thermal stress state of viscoelastic bodies made of functional-gradient materials during annealing is proposed. A numerical algorithm for solving the corresponding problem has been developed and implemented for the problems of thermal conductivity and thermal viscoelasticity. The thermal stress state of the hollow cylinder is calculated according to the given annealing mode. The change in temperature and stress state of the hollow cylinder during annealing is graphically illustrated.

**Keywords:** thermal stress state, body of revolution, functional gradient material, finite element method, hollow cylinder, optimization modes.

**Вступ.** В елементах конструкцій під час нагрівання, охолодження, силового навантаження, наводнювання чи зневоднювання виникають механічні напруження, які можуть бути тимчасовими і залишковими. Тимчасові зникають за охолодження конструкцій до кімнатної температури, а залишкові впливають на подальші експлуатаційні властивості виробу. Щоб зменшити залишкові напруження, застосовують відпал – витримку виробу за підвищених температур.

Для опису термомеханічної поведінки тіл з функціонально-градієнтних матеріалів використали тривимірну модель термочутливого в'язкопружного тіла, враховуючи релаксацію [1, 2] початкових (вихідних) залишкових напружень за підвищених температур. Неоднорідну структуру матеріалу тіла описують фізико-механічні характеристики, які залежать від просторової координати і температури. Запропонована методика передбачає математичну поставу задачі, розроблення алгоритму пошуку розв'язку, реалізацію числового експерименту.

**Формулювання задачі.** Вважаємо, що за розглядуваних теплових навантажень напружений стан не впливає на температуру тіла, тобто задачу про визначення напружено-деформованого стану в тілі формулюємо в квазістатичній поставі (в переміщеннях) [3, 4].

Тіло обертання займає область  $\Omega$  евклідового простору  $R^3$  і обмежене неперервною за Ліпшицем поверхнею  $\Gamma$  та віднесене до криволінійної системи координат  $Ox^1x^2x^3$ . На частині  $\Gamma_u$  поверхні  $\Gamma$  тіла задані переміщення  $\vec{u} = \vec{u}_0$ , а на час-

тині  $\Gamma_\sigma$  – силове навантаження, яке характеризує вектор  $\vec{p}$ ,  $\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \Gamma$ . Структуру матеріалу тіла описують фізико-механічні характеристики його складників.

Тіло нагрівається зовнішнім середовищем з температурою  $t_c(\tau)$  через частину поверхні  $\Gamma_t$  ( $\vec{r} \in \Gamma_t$ ), тепловим потоком  $q(\tau)$  – через частину поверхні  $\Gamma_q$  ( $\vec{r} \in \Gamma_q$ ), ( $\Gamma_t \cup \Gamma_q = \Gamma$ ), а також розподіленими джерелами тепла потужності  $Q(\vec{r}, \tau)$ , ( $\vec{r} \in \Omega$ ).

Температурне поле в тілі описує рівняння теплопровідності

$$\vec{\nabla}(k\vec{\nabla}t) + Q - \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = 0 \quad \text{на } \Omega \quad (1)$$

за початкової

$$t(\vec{r}, 0) = t_0(\vec{r}) \quad \text{на } \Omega \quad (2)$$

і крайових

$$k\vec{\nabla}t \cdot \vec{n} + \alpha(t - t_c) = 0 \quad \text{на } \Gamma_t, \quad k\vec{\nabla}t \cdot \vec{n} + q = 0 \quad \text{на } \Gamma_q \quad (3)$$

умов. Тут  $\vec{\nabla} = \nabla_1 \vec{e}^1 + \nabla_2 \vec{e}^2 + \nabla_3 \vec{e}^3$  – оператор Гамільтона у векторній формі в криволінійній системі координат  $Ox^1x^2x^3$ ;  $\nabla_i$  – коваріантна похідна по просторовій координаті  $x^i$ ;  $(\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3)$  – контраваріантний базис криволінійної системи координат  $Ox^1x^2x^3$ ;  $k(s, t)$  – коефіцієнт теплопровідності;  $\rho(s, t)$  – питома густина;  $c(s, t)$  – питома теплоємність;  $\tau$  – біжучий час;  $\vec{r}$  – радіус-вектор точки;  $\vec{n}$  – зовнішня нормаль до поверхні;  $\alpha$  – коефіцієнт тепловіддачі;  $s$  – просторова координата в напрямку неоднорідності фізико-механічних властивостей матеріалу тіла.

Поведінку термов'язкопружного тіла характеризує система рівнянь

$$\begin{cases} d\{\tilde{\varepsilon}\} = d\{\tilde{\varepsilon}^e\} + d\{\tilde{\varepsilon}^c\} \\ \{\sigma_0\} = 3K_0(\varepsilon_0 - \varepsilon^t) \end{cases} \quad (4)$$

Тут  $d\{\tilde{\varepsilon}^e\} = d\left(\frac{1}{2G}\{\tilde{\sigma}\}\right)$  – закон пружного деформування Гука;  $d\{\tilde{\varepsilon}^c\} = \frac{1}{2\eta}\{\tilde{\sigma}\}$  – закон в'язкого течіння Ньютона;  $\{\tilde{\sigma}\}$ ,  $\{\tilde{\varepsilon}\}$  – компоненти девіатора напружень і деформацій, відповідно;  $\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma^{11} + \sigma^{22} + \sigma^{33})$  – середнє нормальне напруження;

$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon^{11} + \varepsilon^{22} + \varepsilon^{33})$  – середнє відносне видовження;  $\{\varepsilon^t\} = [111000]^T \int_{t_0}^t \alpha_t(s, \zeta) d\zeta$

– тензор температурних деформацій;  $\eta(s, t)$  – динамічна в'язкість;  $G(s, t)$  – модуль пружності за зсуву;  $K_0(s, t)$  – модуль об'ємного стиску.

Система рівнянь (4) для тензора напружень має вигляд

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^t\}) - \int_{\tau_0}^{\tau} R(\tau, \nu)[D_0]\{\varepsilon\} d\nu + R_0(\tau)[D_0]\{\sigma_{ost}\} \quad (5)$$

Тут  $R(\tau, \nu) = \frac{2G(s, \tau)G(s, \nu)}{\eta(s, \nu)} e^{-\int_{\nu}^{\tau} \frac{G}{\eta} du}$ ;  $R_0(\tau) = e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{G}{\eta} du}$ ;

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix};$$

$$[D_0] = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$\{\sigma_{ost}\}$  – компоненти тензора залишкових початкових напружень.

Зосередимо увагу на малих деформаціях. Зв'язок між компонентами тензора деформацій  $\{\varepsilon\}$  і вектора переміщень  $\{u\}$  беремо у вигляді

$$\{\varepsilon\} = [Z]\{u\}, \quad (6)$$

де  $[Z] = \begin{bmatrix} \nabla_1 & 0 & 0 \\ 0 & \nabla_2 & 0 \\ 0 & 0 & \nabla_3 \\ \nabla_2 & \nabla_1 & 0 \\ \nabla_3 & 0 & \nabla_1 \\ 0 & \nabla_3 & \nabla_2 \end{bmatrix}$  – матриця диференціального оператора геометричних

співвідношень теорії пружності;  $\{u\} = [u^1 \ u^2 \ u^3]^T$ .

В області  $\Omega$  повинні виконуватися рівняння рівноваги

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\sigma}^i + X^i = 0, \quad i = \overline{1,3} \quad (7)$$

і граничні умови

$$\bar{n} \cdot \bar{\sigma}^i = p^i \text{ на } \Gamma_\sigma, \quad i = \overline{1,3}, \quad \bar{u} = \bar{u}^0 \text{ на } \Gamma_u. \quad (8)$$

Тут  $X^i$  – контраваріантні компоненти вектора об'ємних сил у криволінійних координатах.

Залежності (1)–(8) складають повну систему співвідношень для визначення температурного поля  $t$ , компонент вектора переміщень  $\{u\}$ , тензорів деформацій  $\{\varepsilon\}$  і напружень  $\{\sigma\}$  за заданих температури навколишнього середовища  $t_c$ , потужності внутрішніх джерел тепла  $Q$ , теплового потоку  $q$ , об'ємних сил  $\bar{X}$  і зовнішнього силового навантаження  $\bar{p}$ .

**Методика розв'язування задачі про термонапружений стан тіла з функціонально-градієнтного матеріалу.** Оскільки геометрична конфігурація області, яку займає тіло, часто досить складна і система розглядуваних диференціальних рівнянь нелінійна, під час розв'язування використали метод зважених залишків у поєднанні з кінцево-елементним підходом [5]. Так можна отримати ефективні наближені розв'язки сформульованих задач. В запропонованому підході алгоритм

розв'язання задач охоплює розбиття області, яку займає тіло, на елементи; апроксимацію невідомих функцій на елементі розбиття; отримання на цій основі системи алгебричних рівнянь для невідомих функцій у вузлах елементів та вибір алгоритму розв'язування цієї системи.

Розглянемо задачу теплопровідності (1)–(3). Застосуємо до диференціального рівняння (1) метод зважених залишків. Наближений розв'язок шукаємо за методикою, викладеною раніше [3, 4]. В результаті отримаємо систему нелінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{aligned} ([C_t] + \theta \Delta \tau_n [K_t]) \{T\}_{n+1} = & ([C_t] - (1 - \theta) \Delta \tau_n [K_t]) \{T\}_n + \\ & + (1 - \theta) \{f_t\}_n \Delta \tau_n + \theta \{f_t\}_{n+1} \Delta \tau_n, \end{aligned} \quad (9)$$

яку розв'язуємо методом послідовних наближень.

Задачу термов'язкопружності (4)–(8) розв'язуємо в переміщеннях, застосовуючи до системи диференціальних рівнянь рівноваги (7) метод зважених залишків:

$$\int_{\Omega} (\bar{\nabla} \cdot \bar{\sigma}^i + X^i) W_{l,i} d\Omega = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad l = \overline{1,m}, \quad (10)$$

де  $W_{l,i}$  – множина вагових функцій. Слід відмітити, що тут відсутнє сумування за індексом  $i$ .

Перетворимо підінтегральний вираз у системі інтегральних рівнянь (10). Для цього скористаємося формулою похідної від добутку:

$$\bar{\nabla} (\bar{\sigma}^i W_{l,i}) = \bar{\nabla} \cdot \bar{\sigma}^i W_{l,i} + \bar{\sigma}^i \cdot \bar{\nabla} W_{l,i}. \quad (11)$$

Звідси

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\sigma}^i W_{l,i} = \bar{\nabla} (\bar{\sigma}^i W_{l,i}) - \bar{\sigma}^i \cdot \bar{\nabla} W_{l,i}. \quad (12)$$

Підставляючи вираз (12) у (10), отримаємо систему інтегральних рівнянь

$$\int_{\Omega} \bar{\nabla} (\bar{\sigma}^i W_{l,i}) d\Omega - \int_{\Omega} \bar{\sigma}^i \cdot \bar{\nabla} W_{l,i} d\Omega + \int_{\Omega} X^i W_{l,i} d\Omega = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad l = \overline{1,m}. \quad (13)$$

Скориставшись теоремою Остроградського–Гауса, замінюємо в них перший доданок інтеграла по області  $\Omega$  на інтеграл по границі  $\Gamma$ . В результаті одержимо:

$$\int_{\Gamma} \bar{n} \cdot \bar{\sigma}^i W_{l,i} d\Omega - \int_{\Omega} \bar{\sigma}^i \cdot \bar{\nabla} W_{l,i} d\Omega + \int_{\Omega} X^i W_{l,i} d\Omega = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad l = \overline{1,m}. \quad (14)$$

Беручи до уваги граничні умови (8), дістанемо:

$$\int_{\Gamma_{\sigma}} p^i W_{l,i} d\Gamma - \int_{\Omega} \bar{\sigma}^i \cdot \bar{\nabla} W_{l,i} d\Omega + \int_{\Omega} X^i W_{l,i} d\Omega = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad l = \overline{1,m}. \quad (15)$$

Розписуючи скалярні добутки векторів у формулі (15), отримаємо:

$$\int_{\Omega} \sigma^{ij} \nabla_j W_{l,i} d\Omega - \int_{\Omega} X^i W_{l,i} d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} p^i W_{l,i} d\Gamma = 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad l = \overline{1,m}. \quad (16)$$

Систему рівнянь (16) записуємо в матричній формі:

$$\int_{\Omega} ([Z][W_l])^T \{\sigma\} d\Omega - \int_{\Omega} [W_l] \{X\} d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} [W_l] \{p\} d\Gamma = 0, \quad l = \overline{1,m}. \quad (17)$$

Тут введено такі позначення:

$$[W_l] = \begin{bmatrix} W_{l,1} & 0 & 0 \\ 0 & W_{l,2} & 0 \\ 0 & 0 & W_{l,3} \end{bmatrix}; \quad \{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma^{11} \\ \sigma^{22} \\ \sigma^{33} \\ \sigma^{12} \\ \sigma^{13} \\ \sigma^{23} \end{bmatrix}; \quad \{X\} = \begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{bmatrix}; \quad \{p\} = \begin{bmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{bmatrix}.$$

Підставляючи вираз (5) для напружень  $\{\sigma\}$  у систему інтегральних рівнянь (17), матимемо:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} ([Z][W_l])^T [D]\{\varepsilon\} d\Omega - \int_{\Omega} ([Z][W_l])^T [D]\{\varepsilon_t\} d\Omega - \\ & - \int_{\tau_0}^{\tau} \int_{\Omega} R(\tau, \xi) ([Z][W_l])^T [D_0]\{\varepsilon\} d\Omega d\xi + \int_{\Omega} R_0 ([Z][W_l])^T [D_0]\{\sigma_{ost}\} d\Omega - \\ & - \int_{\Omega} [W_l]\{X\} d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} [W_l]\{P\} d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Розбиваємо область  $\Omega$  на скінченну кількість  $n_e$  елементів. Використовуючи подання (6) для компонент тензора деформації  $\{\varepsilon\}$  через компоненти вектора переміщень  $\{u\}$ , а переміщення на елементі розбиття – через функції форми, систему (18) зводимо до вигляду

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} ([Z][N_u^{(e)}])^T [D] ([Z][N_u^{(e)}]) d\Omega \{U\} - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} ([Z][N_u^{(e)}])^T [D^{(e)}]\{\varepsilon_t\} d\Omega - \\ & - \int_{\tau_0}^{\tau} \left( \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} R(\tau, \xi) ([Z][N_u^{(e)}])^T [D_0] ([Z][N_u^{(e)}]) d\Omega \right) \{U(\xi)\} d\xi + \\ & + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} R_0 ([Z][N_u^{(e)}])^T [D_0]\{\sigma_{ost}\} d\Omega - \\ & - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} [N_u^{(e)}]\{X\} d\Omega - \sum_{e1=1}^{n_{e1}} \int_{\Gamma^{(e)}} [N_u^{(e)}]\{P\} d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Вводимо позначення:

$$\begin{aligned} [K_u] &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} [B_u^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B_u^{(e)}] d\Omega; \\ [F_1(\tau, \xi)] &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} R(\tau, \xi) [B_u^{(e)}]^T [D_0] [B_u^{(e)}] d\Omega; \\ \{F_0\} &= \{f_1\} - \{f_2\} + \{f_3\} + \{f_4\}; \\ \{f_1\} &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} [B_u^{(e)}]^T [D^{(e)}]\{\varepsilon_t\} d\Omega; \quad \{f_2\} = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} R_0 [B_u^{(e)}]^T [D_0]\{\sigma_{ost}\} d\Omega; \end{aligned}$$

$$\{f_3\} = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(e)}} [N_u^{(e)}] \{X^{(e)}\} d\Omega; \quad \{f_4\} = \sum_{e=1}^{n_{e1}} \int_{\Gamma^{(e)}} [N_u^{(e)}] \{P^{(e)}\} d\Gamma.$$

Звідси отримаємо систему інтегральних рівнянь

$$[K_u] \{U\} - \int_{\tau_0}^{\tau} [F_1(\tau, \xi)] \{U(\xi)\} d\xi - \{F_0\} = 0, \quad (19)$$

яку розв'язуємо методом покрокового інтегрування за часом  $\tau$  на кінцевому часовому інтервалі  $[0, \tau]$ . Розбиваємо цей інтервал на частини  $\Delta\tau_k = \tau_{k+1} - \tau_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Заміняємо інтеграл формулою трапецій (для простоти розглядаємо постійний крок за часом). Тоді

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau} [F_1(\tau, \xi)] \{U(\xi)\} d\xi &\approx \frac{\Delta\tau}{2} [F_1(\tau, 0)] \{U(0)\} + \\ &+ \Delta\tau \sum_{i=1}^{n-1} [F_1(\tau, \tau_i)] \{U(\tau_i)\} + \frac{\Delta\tau}{2} [F_1(\tau, \tau)] \{U(\tau)\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Підставляючи вираз (20) в інтегральне рівняння (19), отримаємо такий алгоритм для визначення переміщень  $\{U\}$  у момент часу  $\tau$ :

$$\begin{aligned} \left( [K_u] - \frac{\Delta\tau}{2} [F_1(\tau, \tau)] \right) \{U(\tau)\} &= \{F_0\} + \\ &+ \Delta\tau \left( \frac{1}{2} [F_1(\tau, 0)] \{U(0)\} + \sum_{i=1}^{n-1} [F_1(\tau, \tau_i)] \{U(\tau_i)\} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

При цьому, якщо  $n = 0$ , одержимо пружну задачу; при  $n = 1$  – пружну задачу з додатковими (фіктивними) масовими силами  $\frac{\Delta\tau}{2} [F_1(\tau, 0)] \{U(0)\}$ , а за довільного

$n$  – з додатковими фіктивними масовими силами  $\Delta\tau \left( \frac{1}{2} [F_1(\tau, 0)] \{U(0)\} + \sum_{i=1}^{n-1} [F_1(\tau, \tau_i)] \{U(\tau_i)\} \right)$ .

Таким чином, розв'язування в'язкопружної задачі звели до розв'язування послідовності пружних задач. Інші модифікації системи рівнянь (19) пов'язані зі застосуванням точніших квадратурних формул.

За відомими переміщеннями, використовуючи формулу (5), де інтеграл виражено за допомогою формули трапецій, знаходимо напруження. Тоді

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [D] [B] \{U(\tau)\} - [D] \{\varepsilon_t\} + R_0(\tau) [D_0] \{\sigma_{\text{ost}}\} - \Delta\tau \left( \frac{1}{2} R(\tau, 0) [D_0] [B] \{U(0)\} + \right. \\ &+ \left. \sum_{i=1}^{n-1} R(\tau, \tau_i) [D_0] [B] \{U(\tau_i)\} + \frac{1}{2} R(\tau, \tau) [D_0] [B] \{U(\tau)\} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

**Термонапружений стан у порожнистому циліндрі за відпалу.** Запропоновану модель використали для розрахунку термонапруженого стану порожнистого циліндра, виготовленого з в'язкопружного функціонально-градієнтного матеріалу, в напрямку осі  $Oz$  [3] (рис. 1, де  $z_1 = 0,1$  м;  $r_1 = 0,206$  м;  $r_2 = 0,211$  м;  $r_3 = 0,216$  м). Заміри теплофізичних характеристик для точок  $r_1, r_2, r_3$  наведені в праці [3].

Задачу розв'язували, використовуючи наведену вище методику. Виявили (рис. 2), що розтягальні напруження за заданого режиму відпалу перевищують допустимі, що може призвести до руйнування конструкції. Для досягнення неруйнівного (оптимального) режиму необхідно розв'язати відповідну оптимізаційну задачу. Встановили (рис. 3) значну релаксацію залишкових напружень, які подібні до тих, коли враховували зневоднювання матеріалів [6–9].

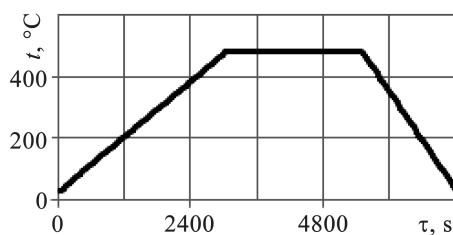


Рис. 1. Температурний режим відпалювання порожнистого циліндра.

Fig. 1. Temperature mode of a hollow cylinder annealing.

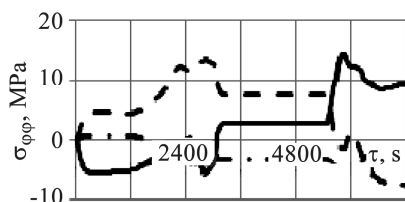


Рис. 2. Fig. 2.

Рис. 2. Зміна тимчасових напружень (суцільна лінія – зовнішня поверхня; пунктирна – внутрішня; штрихпунктирна – середня).

Fig. 2. Change of temporary stresses (solid line – external surface; dashed – internal; dot-and-dash – middle).

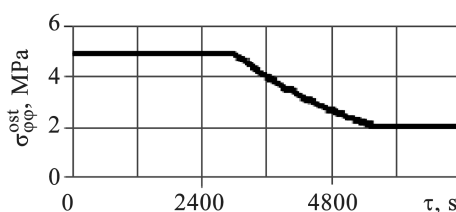


Рис. 3. Fig. 3.

Рис. 3. Релаксація залишкових напружень.

Fig. 3. Relaxation of residual stresses.

## ВИСНОВКИ

Запропонована числова методика визначення напружень у тілах, виготовлених з в'язкопружного функціонально-градієнтного матеріалу, за їх відпалу дає можливість розв'язувати задачі, пов'язані з дослідженням параметрів, що характеризують теплові і механічні процеси у конструкціях. Числові результати (рис. 2 і 3) свідчать, що цей режим можна суттєво удосконалити, якщо розв'язати оптимізаційну задачу.

1. Аналитическое решение смешанных осесимметричных задач для функционально-градиентных сред / С. М. Айзикович, В. М. Александров, А. С. Васильев, Л. И. Крнев, И. С. Трубчик. – М.: Физматлит, 2011. – 192 с.
2. Оптимізація за напруженим станом режимів нагріву скляних кусково-однорідних оболонок / О. Р. Гачкевич, М. Г. Гачкевич, С. Ф. Будз. – Львів: ІПІММ ім. Я. С. Підстригача, 2014. – 334 с.
3. Stashchuk M. H., Irza E. M. Thermal stressed states of the bodies of revolution made of functionally graded materials // Materials Science. – 2019. – **55**, № 3. – P. 311–319.  
(Стацук М. Г., Ірза С. М. Термонапружений стан тіл обертання з функціонально-градієнтних матеріалів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2019. – **55**, № 3. – С. 16–23.)
4. Stashchuk M. H., Irza E. M. Optimization of the modes of heat treatment of structural elements made of functionally graded materials // Materials Science. – 2020. – **56**, № 1. – P. 106–111.

- (*Стацук М. Г., Ірза Є. М.* Оптимізація режимів термообробки елементів конструкцій з функціонально-градієнтних матеріалів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2020. – **56**, № 1. – С. 101–105.)
5. *Zienkiewicz O. C. and Taylor R. L.* Finite Element Method: Vol 1. The Basis. – London: Butterworth Heinemann, 2000. – 690 p.
  6. *Ivas'kevych L. M.* Influence of temperature and cyclic loading on hydrogen embrittlement of nickel refractory alloys // Materials Science. – 2011. – **47**, № 1. – P. 76–81.  
(*Іваськевич Л. М.* Вплив температури та циклічного навантаження на водневе окрихчення нікелевих жароміцних сплавів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – **47**, № 1. – С. 70–75.)
  7. *Stashchuk M. H.* Determination of the distribution of hydrogen near cracklike defects // Materials Science. – 2017. – **52**, № 6. – P. 803–810.  
(*Стацук М. Г.* Напруження, викликані концентрацією водню у суцільному циліндрі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2017. – **52**, № 6. – С. 36–44.)
  8. *Andreikiv O. E., Skal's'kyi V. R., Gembara O. V.* A method for the investigation of high-temperature hydrogen-assisted fracture of bimetallic structural elements // Materials Science. – 2000. – **36**, № 4. – P. 489–498.  
(*Андрейків О. Є., Скальський В. Р., Гембара О. В.* Метод оцінки високотемпературного водневого руйнування біметалевих елементів конструкцій // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2000. – **36**, № 4. – С. 15–22.)
  9. *Eveluation of durability of buried polyethylene pipelines and tanks with a cellular wall / M. Stashchuk, Y. Ivanitskyj, M. Dorosh, Y. Molkov, T. Lenkovskiy* // Strength, Fracture and Complexity. – 2017. – **10**, № 2. – P. 73–88.

Одержано 12.03.2021