

УДК 539.370

## ОСНОВНІ ЗАСАДИ ТА МЕЖІ ЗАСТОСОВНОСТІ ТЕОРІЇ ПЛАСТИЧНОСТІ, ЗАСНОВАНОЇ НА КОНЦЕПЦІЇ КОВЗАННЯ І ПОСТУЛАТІ ІЗОТРОПІЇ ІЛЮШИНА

М. Ю. ШВАЙКО

*Дніпровський національний університет ім. Олеся Гончара*

Проаналізовано диференціально-нелінійний варіант теорії пластичності, яка задовольняє відомі фундаментальні принципи і постулати механіки деформованого твердого тіла та враховує взаємовплив механізмів непружного деформування матеріалів. Аналітичні та чисельні експериментальні дослідження засвідчили можливість і перспективність її використання для опису непружного деформування полікристалічних матеріалів за простого і складного навантажень. Особливу увагу приділено формулюванню та розв'язуванню задач про стійкість елементів конструкцій з урахуванням пам'яті матеріалу.

**Ключові слова:** *пластичність, складне навантаження, стійкість.*

Differential nonlinear variant of the theory of plasticity which satisfied known and fundamental principles and postulates of the mechanics of solid body deformation and takes into account mutual influence of the mechanism of non-elastic deformation of materials is analyzed. Analytical and numeric experiments proved the possibility and perspectives of the use of the proposed theory of plasticity for the description of the non-elastic deformation of polycrystal materials under the simple and complex loading. Peculiar attention is paid to the formulation and solution of the problems of the structural elements strength with the reference to the material memory.

**Keywords:** *plasticity, complex loading, endurance.*

**Вступ.** Механізм непружного деформування реального полікристалічного тіла – конгломерату кристалічних зерен з дефектами типу дислокацій, вакансій, упродовження тощо – досить складний фізичний процес, який до того ж суттєво залежить від зовнішніх умов [1]. За помірних температур та швидкостей навантаження пластична деформація розвивається, в основному, за дислокаційним механізмом зсуву одних прошарків матеріалу відносно інших. Однак адекватно кількісно описати непружну деформацію, враховуючи принципи фізичної теорії дислокацій, ще зарано. Тому серед мікроструктурних механізмів непружного деформування твердих тіл доводиться поки що враховувати головні середньостатистичні дані та коригувати одержані результати з макроекспериментом [1–3].

Варіанти теорії пластичності, в основу яких покладена концепція ковзання, будують у двох напрямках [2–5]. До першого відносять теорії, в яких механічні властивості кристалічних тіл визначають, враховуючи характеристики окремих кристалічних зерен та спосіб їх взаємодії. Теорії другого напрямку не розглядають мікроструктуру матеріалу. Реальне тверде тіло замінює модель суцільного однорідного середовища. При цьому вважають, що поведінка такого середовища відтворює інтегрально деформацію реального кристалічного тіла [1–5].

Автори вказаних публікацій запропонували новий перспективний шлях розвитку теорії пластичності, що ґрунтується на фізичному механізмі непружного

деформування матеріалів. А недолік і “фізичних” [2–6], і “суто” феноменологічних теорій [7] – неврахування взаємовпливу механізмів непружного деформування, зокрема, систем ковзання по різних площинах та напрямках. Це врешті-решт призвело до неадекватного опису деформаційної анізотропії матеріалів та одержаних у макроексперименті закономірностей пластичного деформування під складним навантаженням. Огляд результатів цих теорій пластичності подано, зокрема, в публікаціях [3, 8–10, 14].

У механіці деформівного твердого тіла концепцію ковзання з урахуванням взаємодії механізмів непружного деформування, мабуть, вперше започаткували в працях [11, 12], де закладені основи диференціально-нелінійного варіанта теорії пластичності, заснованій на нелінійній моделі плоско-пластичного середовища з урахуванням взаємодії систем ковзання [12], а також постулаті ізотропії Ілюшина [13], підтвердженого численними експериментальними дослідженнями.

Проаналізуємо ці складники варіанта теорії пластичності, яка стала робочою під час формулювання та розв’язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла.

**Плоска деформація пружно-пластичного тіла.** Розглянемо в системі координат  $Ox_1x_2x_3$  призматичне тіло умовно нескінченної довжини ( $x_3 \in [-\infty, \infty]$ ), зі сталими по довжині поперечними перерізами і зовнішнім навантаженням. Тут компоненти вектора переміщень ( $\vec{u}$ ) і тензора деформації ( $\epsilon_{ij}$ ) визначають формули [9]

$$u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2), \quad u_3 = 0; \quad (1)$$

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right); \quad (2)$$

$$\epsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0, \quad \epsilon_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0, \quad \epsilon_{23} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = 0. \quad (3)$$

З закону Гука та всіх опублікованих на сьогодні теорій пластичності із рівностей (3) випливає рівність нулю дотичних напружень:

$$\tau_{13} = \tau_{23} = 0. \quad (4)$$

Далі компоненти тензора деформації  $\epsilon_{ij}$  подамо як суму пружних  $\epsilon_{ij}^{(e)}$  та пластичних  $\epsilon_{ij}^{(p)}$  складників:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{(e)} + \epsilon_{ij}^{(p)}. \quad (5)$$

Пружні визначає закон Гука. Плоско-пластичною назвемо деформацію, за якої її компоненти  $\epsilon_{i3}^{(p)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) у напрямку осі  $x_3$  рівні нулю. Така деформація, яку визначають нерівні нулю компоненти  $\epsilon_{11}^{(p)}(x_1, x_2)$ ,  $\epsilon_{22}^{(p)}(x_1, x_2)$ ,  $\epsilon_{12}^{(p)}(x_1, x_2)$ , може відбуватися шляхом ковзання прошарків матеріалу площинами, паралельними осі  $x_3$ , у напрямках  $n$  і  $l$ , перпендикулярних до неї (рис. 1).

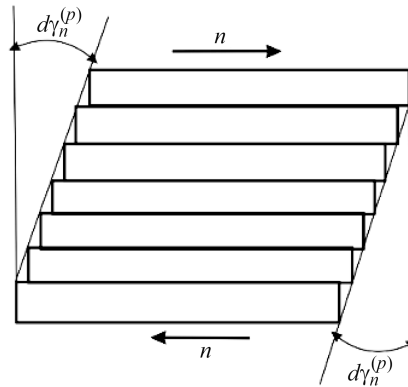


Рис. 1. Модель ковзання за плоско-пластичної деформації зсувом.

Fig. 1. The model of sliding under plane-plastic shear deformation.

Розглянемо тепер на прикладі плоско-пластичної деформації розвиток систем ковзання в часі. Поки що вважатимемо максимальне дотичне напруження  $\tau_{\max}(t)$  функцією, що монотонно зростає. В деякий початковий момент часу  $t = t_0$  воно досягає початкового опору зсуву  $\tau_y$ . При цьому відбувається нескінченно мале ковзання в напрямку дії напруження  $\tau_{\max}(t_0)$ . З іншого боку, у цьому напрямку матеріал максимально зміцнюється. Внаслідок цього з підвищенням навантаження подальші ковзання здійснюватимуться по множині взаємно перпендикулярних напрямків  $n(\theta)$  і  $l(\pi/2 + \theta)$ ,  $\theta \in [-\alpha_1(t), \alpha_2(t)]$ , на яких дотичні напруження досягають опору зсуву (рис. 2).

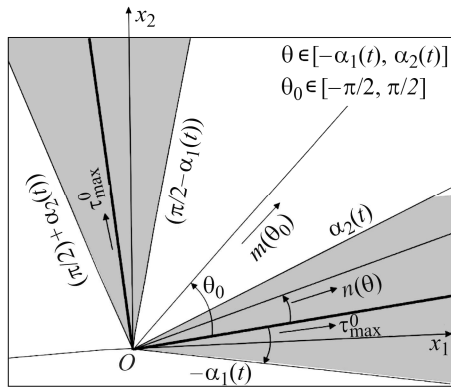


Рис. 2. Розвиток у часі пластичної деформації зсуву залежно від ковзання взаємно перпендикулярними площинами.

Fig. 2. Evolution in time of the plastic shear deformation depending on the sliding along mutually perpendicular areas.

Розглянемо спочатку систему ковзань між кутами  $\theta$  і  $\theta + d\theta$ . Пластичну деформацію зсуву від цих ковзань всередині кута  $d\theta$  подамо у вигляді

$$d\gamma_n^{(p)} = \frac{1}{2} \varphi(\theta, t) d\theta. \quad (6)$$

Функцію  $\varphi(\theta, t)$  далі називатимемо інтенсивністю ковзань.

Згідно зі законом парності дотичних напружень одночасно із ковзанням у напрямку  $n$  відбуватимуться ковзання в напрямку  $l \perp n$ , так що  $d\gamma_l^{(p)} = d\gamma_n^{(p)}$ . Позначимо через  $d\dot{\gamma}_{nl}^{(p)} = d\dot{\gamma}_n^{(p)} + d\dot{\gamma}_l^{(p)}$  швидкість пластичної деформації зсуву на осях  $nl$  від елементарних ковзань у вказаних взаємно ортогональних напрямках. Враховуючи формулу (6), запишемо:

$$d\dot{\gamma}_{nl}^{(p)} = \varphi'_t(\theta, t) d\theta, \quad (7)$$

де  $\varphi'_t(\theta, t) = \partial\varphi(\theta, t)/\partial t$  – швидкість інтенсивності ковзань.

Пластична деформація викликає анізотропію матеріалу, яка в першу чергу проявляється в зміні опору зсуву  $R_m(\theta_0, t)$ , під яким розуміємо віднесену до одиниці площі силу опору ковзанню по заданій площині в заданому напрямку  $m(\theta_0)$ . Вважатимемо [12, 14], що відношення  $dR_m / d\dot{\gamma}_{nl}^{(p)}$ , де  $dR_m$  – приріст швидкості опору зсуву в заданому напрямку  $m(\theta_0)$  від елементарних ковзань у напрямках  $n$  і  $l$ , залежить від кута  $\omega = |\theta_0 - \theta|$  між напрямками  $m(\theta_0)$  і  $n(\theta)$ ; інтенсивності накопиченої до моменту часу  $t > t_0$  пластичної деформації  $\epsilon_u^{(p)}$ ; її екстремальних значень  $\lambda_k^*$ , що відповідають зміні знака швидкості  $\dot{\epsilon}_u^{(p)}$ , або максимальному значенню  $\epsilon_u^{(p)}$  за всю історію навантаження, а також знака  $\mu$  ( $\mu = \pm 1$ ) добутку функції інтенсивності зсуву  $\varphi(\theta, t)$  та її швидкості  $\varphi'_t(\theta, t)$ . У результаті одержимо:

$$\frac{d\dot{R}_m}{d\dot{\gamma}_{nl}^{(p)}} = R \left[ \omega, \varepsilon_i^{(p)}, \lambda^*, \mu \right]. \quad (8)$$

Функція  $R \left[ \omega, \varepsilon_i^{(p)}, \lambda^*, \mu \right]$  характеризує чутливість плоского середовища до деформаційної анізотропії та визначає спосіб взаємодії механізмів пластичного деформування (в даному випадку – систем ковзання).

З урахуванням залежності (8) сформулюємо основні постулати нелінійної моделі плоско-пластичного середовища [12, 14]: у початковий момент часу ( $t_0$ ) воно ізотропне; деформацію визначає закон Гука, доки максимальне дотичне напруження не перевищує деякого значення  $\tau_s$ , яке називають початковим опором пластичному зсуву; плоско-пластична деформація ( $\varepsilon_{i3}^{(p)} = 0$ ;  $i = 1, 2, 3$ ) відбувається шляхом ковзання одних прошарків матеріалу відносно інших взаємно перпендикулярними площинами паралельно осі  $x_3$  у напрямках  $n$  та  $l$ , перпендикулярних до неї, і супроводжується розвитком деформаційної анізотропії згідно зі законом (8); на площинах ковзання опір зсуву  $R_m$  та швидкість його приросту  $\dot{R}_m$  відповідно рівні дотичному напруженню ( $\tau_m$ ), яке діє на площині ковзання, та швидкості приросту дотичного напруження ( $\dot{\tau}_m = \partial\tau_m/\partial t$ ), тому

$$R_m(\theta_0, t) = \tau_m(\theta_0, t), \quad (9)$$

$$\dot{R}_m(\theta_0, t) = \dot{\tau}_m(\theta_0, t); \quad (10)$$

за межею напрямків ковзання опір  $R_m > \tau_m$ , або  $R_m = \tau_m$ , але  $\dot{R}_m > \dot{\tau}_m$ .

У рівностях (9), (10) напруження  $\tau_m(\theta_0, t)$  та швидкість зміни його в часі ( $\dot{\tau}_m(\theta, t) = \partial\tau_m/\partial t$ ) задають компоненти девіатора тензора напружень  $s_{11}(t)$ ,  $s_{12}(t)$ ,  $s_{22}(t)$ , ( $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$ , ( $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ )/3) та його швидкості. Тобто вважаємо, що об'єм тіла змінюється пружно.

У запропонованій теорії матеріальна функція  $R$  має вигляд добутку двох функцій – зміцнення ( $F$ ) та пластичності ( $\Pi$ ):

$$R = F(\omega)\Pi[\varepsilon_u^{(p)}, \lambda_k^*, \mu]. \quad (11)$$

Перша враховує взаємодію систем ковзання, формує деформаційну анізотропію матеріалу і в решті-решт визначає його векторні властивості. Нижче за плоско-пластичної деформації функцію зміцнення подамо у загальному вигляді [15]

$$F(\omega) = k_1\omega^{-h_1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \cos 2n\omega + k_2(\pi/2 - \omega)^{-h_2} \\ (a_{2n}, k_1, k_2, \sim \text{const}; h_1, h_2 < 1), \quad (12)$$

а її часткові випадки так:

$$F(\omega) = a_0 + a_2 \cos 2\omega + k_1\delta(\omega) + k_2\delta(\pi/2 - \omega); \quad F(\omega) = \ln(c \cdot \text{ctg } \omega); \quad F(\omega) = \ln \frac{c}{\omega}; \\ F(\omega) = \frac{\omega^{-h}}{k} + p_0; \quad F(\omega) = a - \omega; \quad F(\omega) = a + b \cos 2\omega. \quad (13)$$

де  $\delta(\omega)$  – дельта-функція Дірака.

Графіки допоміжних функцій  $F(\omega)$  (13) наведені на рис. 3.

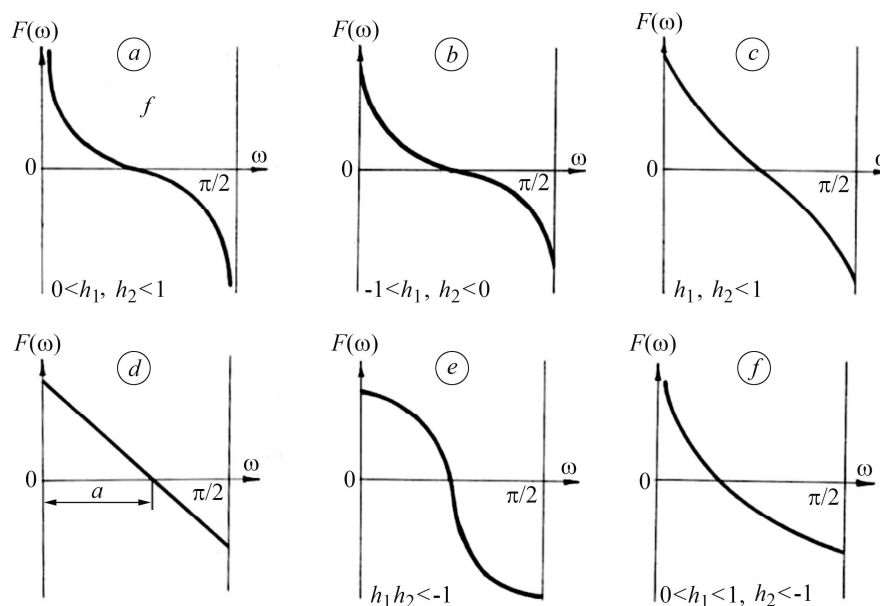


Рис. 3. Графіки функції  $F(\omega)$  для опису плоско-пластичної деформації.

Fig. 3. Graphs of function  $F(\omega)$  for description of plane-plastic deformation.

Закладена в теорію пластичності функція  $F(\omega)$ , залежно від властивостей (рис. 3), може призводити як до сингулярних, так і регулярних поверхонь навантаження [14]. Функція  $\Pi$  характеризує скалярні властивості матеріалу і дає змогу дещо нівелювати деяку невизначеність, що закладають у теорію, використовуючи часткові функції зміцнення  $F(\omega)$ . Розроблена методика визначення матеріальної функції  $\Pi$  із експерименту на розтяг-стиск або знакозмінний закрут тонкостінного трубчастого зразка [12, 14].

Функціонали  $\dot{R}_m(\theta_0, t)$  і  $R_m(\theta_0, t)$  у рівностях (9) і (10) знаходять шляхом інтегрування залежності (8) з урахуванням формули (7):

$$\dot{R}_m(\theta_0, t) = \int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} R[|\theta - \theta_0|, \lambda_k^*(t), \mu(t)] \varphi'_t(\theta, t) d\theta; \quad (14)$$

$$R_m(\theta_0, t) = \int_{t_0 - \alpha_1(\xi)}^t \int_{-\alpha_1(\xi)}^{\alpha_2(\xi)} R[|\theta - \theta_0|, \lambda_k^*(\xi), \mu(\xi)] \varphi'_t(\theta, \xi) d\theta d\xi + \tau_s. \quad (15)$$

З рівностей (14) і (15), а також явних виразів правих частин формул (9) і (10) одержуємо систему інтегральних рівнянь спеціального типу, в яких невідомі функції  $\varphi'_t(\theta, t)$ ,  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$  входять як під знак інтегралів, так і в межі інтегрування:

$$\int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} R[|\theta - \theta_0|, \varepsilon_u^{(p)}(t), \lambda_k^*(t), \mu(t)] \varphi'_t(\theta, t) d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos[v(t) - 2\theta_0 - 2\Phi_0]; \quad (16)$$

$$\tau_s + \int_{t_0 - \alpha_1(\xi)}^t \int_{-\alpha_1(\xi)}^{\alpha_2(\xi)} R \left[ |\theta - \theta_0|, \varepsilon_u^{(p)}(\xi), \lambda_k^*(\xi), \mu(\xi) \right] \varphi'_t(\theta, \xi) d\theta d\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2[\theta_0 - \Phi(t)],$$

$$\theta_0 \in [-\alpha_1(t), \alpha_2(t)]. \quad (17)$$

Розроблені аналітичні та числові методи розв'язання таких рівнянь як для регулярних, так і сингулярних функцій зміцнення  $F(\omega)$  у часткових випадках, а також для плоских кусково гладких траєкторій навантаження, в тому числі з ділянками розвантаження за пружним законом [14–19]. На рис. 4 і далі використали позначення праці [14].

За відомих  $\varphi'_t(\theta, t)$ ,  $\alpha_{1,2}(t)$  компоненти вектора швидкості плоско-пластичної деформації визначають формули [14]

$$\dot{\Gamma}_1^{(p)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \varphi'_t(\theta, t) \cos 2(\theta + \Phi_0) d\theta,$$

$$\dot{\Gamma}_3^{(p)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \varphi'_t(\theta, t) \sin 2(\theta + \Phi_0) d\theta, \quad (18)$$

де

$$\dot{\Gamma}_1^{(p)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \dot{\varepsilon}_{11}^{(p)} - \dot{\varepsilon}_{22}^{(p)} \right), \quad \dot{\Gamma}_2^{(p)} = \frac{1}{2} \left( \dot{\varepsilon}_{33}^{(p)} - \dot{\varepsilon}^{(p)} \right) \equiv 0, \quad \dot{\Gamma}_3^{(p)} = \sqrt{2} \dot{\varepsilon}_{12}^{(p)}. \quad (19)$$

З формул (16)–(19), використовуючи сингулярні функції зміцнення  $F(\omega)$  ( $F(0) > 0$ ,  $F'(0) > 0$ ), для визначальних рівнянь  $\dot{\sigma}_{ij} \sim \dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)}$  теорії пластичності в швидкостях одержали [14]:

$$\dot{\sigma}_{ij} = A_{ijmn} \dot{\varepsilon}_{mn}^{(p)} - \Psi_{ij}(\dot{\varepsilon}_{mn}^{(p)}), \quad (20)$$

де  $\Psi_{ij}(\dot{\varepsilon}_{mn}^{(p)})$  – залежні від історії навантаження однорідні функції першого ступеня від швидкостей деформації;  $A_{ijmn}$  – функціонали по довжині дуги  $s$  від параметрів внутрішньої геометрії траєкторії навантаження. Якщо навантаження відбувається без часткового заморожування систем ковзання, визначальні рівняння зв'язку  $\dot{\sigma}_{ij} \sim \dot{\varepsilon}_{ij}$  (20) стають диференціально лінійними:

$$\dot{\sigma}_{ij} = A_{ijmn} \dot{\varepsilon}_{mn}^{(p)}, \quad \left( \Psi_{ij}(\dot{\varepsilon}_{mn}^{(p)}) \equiv 0 \right). \quad (21)$$

Для регулярних функцій зміцнення, коли  $F(0) < \infty$ ,  $F'(0) = 0$  і поверхні навантаження  $\Sigma$  стають гладкими, визначальні рівняння  $\dot{\sigma}_{ij} \sim \dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)}$  дають також формули типу (21), тільки з іншими значеннями коефіцієнтів  $A_{ijmn}$  [14].

Далі під образом процесу деформування елемента тіла розумітимемо [13] сукупність заданої траєкторії навантаження  $\vec{S} = \vec{S}(t)$  з побудованими векторами деформації  $\vec{\Gamma}^{(p)}$  і  $\vec{\Gamma}^{(p)}$  (рис. 4).

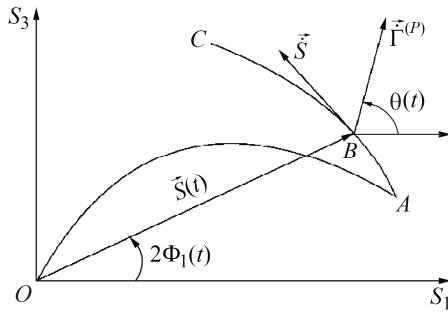


Рис. 4. Траєкторія навантаження  $OABC$  ( $\bar{S} = \bar{S}(t)$ ) та її геометричні характеристики в девіаторному просторі тензора напружень.

Fig. 4. An example of a loading trajectory  $OABC$  ( $\bar{S} = \bar{S}(t)$ ) and its geometrical characteristics in the deviatoric space of the stress tensor.

**Монотонна плоско-пластична деформація.** Розглянемо плоско-пластичну деформацію, за якої її інтенсивність  $\varepsilon_u^{(p)}(t)$  задовольняє умову  $\dot{\varepsilon}_u^{(p)} \geq 0$ . Тоді  $\lambda_k^*(t) = \varepsilon_u^{(p)}(t)$ ,  $\mu = 1$ , і функцію пластичності  $\Pi[\varepsilon_u^{(p)}, \lambda_k^*, \mu]$  розглядатимемо як функцію одного аргументу:

$$\Pi[\varepsilon_u^{(p)}, \lambda_k^*, \mu] \equiv \Pi[\varepsilon_u^{(p)}, \varepsilon_u^{(p)}, 1] = \Pi_0[\varepsilon_u^{(p)}]. \quad (22)$$

Частковою тут є т. зв. монотонна деформація, за якої функція зсуву  $\varphi(\theta, t)$  зростає в часі в усіх напрямках  $\theta \in [-\alpha_1(t), \alpha_2(t)]$ , де відбулися ковзання за всю історію навантаження, тобто

$$\varphi(\theta, t) \geq 0, \quad \dot{\alpha}_1(t) \geq 0, \quad \dot{\alpha}_2(t) \geq 0. \quad (23)$$

Покажемо, що така деформація за сингулярних функцій зміцнення  $F(\omega)$  можлива не тільки за простого навантаження, але й за складного за деяких обмежень швидкості обертання головних осей тензора напружень. При цьому записані раніше визначальні рівняння можна проінтегрувати і подати у вигляді

$$\sigma_{ij} \sim \varepsilon_{ij}^{(p)}. \quad (24)$$

Далі рівняння (24) називатимемо голономними, до яких відносять також диференціальні рівняння  $\dot{\sigma}_{ij} \sim \dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)}$ , які можна проінтегрувати та записати у вигляді (24). Визначальні рівняння  $\dot{\sigma}_{ij} \sim \dot{\varepsilon}_{ij}^{(p)}$ , які не вдається проінтегрувати та подати у вигляді (24), називають неголономними.

За голономних в'язей замість рівнянь (8), (16), (17) можемо записати:

$$\frac{dR_m(\theta, t)}{d\gamma_{nl}^{(p)}(\theta, t)} = R(|\theta - \theta_0|, \varepsilon_u^{(p)}, \mu) \equiv \Pi_0[\varepsilon_u^{(p)}] F(|\theta - \theta_0|), \quad (25)$$

$$d\gamma_{nl}^{(p)} = \varphi(\theta, t) d\theta, \quad (26)$$

$$\tau_s + \int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} F(|\theta - \theta_0|) \psi(\theta, t) d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} S(t) \cos 2[\theta_0 - \Phi(t)], \quad (27)$$

де

$$\psi(\theta, t) = \Pi_0[\varepsilon_u^{(p)}] \varphi(\theta, t), \quad \varphi(\theta, t) = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \pm \alpha_{2,1}(t). \quad (28)$$

Рівняння (27) та умова (28) однозначно визначають функції  $\varphi(\theta, t)$ ,  $\alpha_1(t)$ ,  $\alpha_2(t)$ . Для компонент вектора  $\bar{\Gamma}^{(p)}$  монотонної плоско-пластичної деформації отримаємо [14]:

$$\Gamma_1^{(p)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \varphi(\theta, t) \cos 2(\theta_0 - \varphi(t)) d\theta,$$

$$\Gamma_3^{(p)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\alpha_1(t)}^{\alpha_2(t)} \varphi(\theta, t) \sin 2(\theta_0 + \varphi(t)) d\theta, \quad \Gamma_2^{(p)} \equiv 0. \quad (29)$$

У таблиці функцію  $\Pi = \Pi_0(\epsilon_u^{(p)})$  визначає формула

$$\Pi_0(\epsilon_u^{(p)}) = E_u E_{ut} / 3(E_u - E_{ut}), \quad (30)$$

де  $E_u = 3G$  – пружний, а  $E_{ut}(\epsilon_u)$  – дотичний модуль діаграми  $\sigma_u \sim \epsilon_u$ ;  $I_0(2\alpha)$ ,  $I_1(2\alpha)$  – функції Бесселя;  $K = K(\cos 2\alpha)$ ,  $K' = K(\sin 2\alpha)$ ,  $E = E(\cos 2\alpha)$ ,  $E' = E(\sin 2\alpha)$  – повні еліптичні інтеграли.

Щоб проілюструвати монотонну деформацію, розглянемо дволанкову траєкторію навантаження  $OABC$  (рис. 5). Умови монотонності плоско-пластичної деформації за визначенням виконуватимуться, якщо кут  $\beta$  між вектором  $\vec{S}(t)$  і дотичною  $\vec{S}$  у кожній точці  $B$  траєкторії навантаження, в тому числі в точці  $A$  переходу від пропорційного до граничного монотонного, не перевищуватиме значення  $\beta_0 = \beta_0(S)$ , яке визначають формули таблиці. Для сингулярних функцій  $F(\omega)$  ( $F(0) \leq \infty$ ,  $F'(0) \leq \infty$ ) кут  $\beta_0$ , залежно від довжини вектора  $\vec{S}$ , може набувати довільне значення з інтервалу  $(0, \pi/2)$ . Для регулярних функцій  $F(\omega)$ , що задовольняють умови ( $F(0) < \infty$ ,  $F'(0) = 0$ ), значення  $\beta_0 = 0$  і монотонна деформація існують тільки за пропорційного навантаження [14].

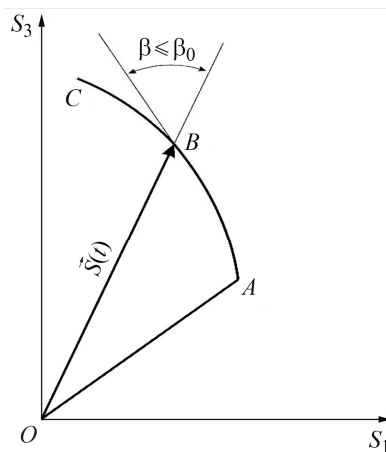


Рис. 5. Траєкторія навантаження  $OABC$  за простої (відрізок  $OA$ ) і монотонної (відрізок  $ABC$ ) деформацій.

Fig. 5. An example of a loading trajectory  $OABC$  for simple (segment  $OA$ ) and monotonic (segment  $ABC$ ) deformations.

**Постулат ізотропії Глюшина та можливі узагальнення плоско-пластичної деформації на просторовий випадок.** Одержані для плоско-пластичної деформації результати (18)–(21), (29) задовольняють постулат ізотропії Глюшина, згідно з яким [13] образ деформування інваріантний до перетворень обертання та дзеркального відображення в  $p$ -тивимірному просторі девіатора напружень.

Отже, постулат узагальнює одержані за плоско-пластичної деформації результати на плоскі траєкторії навантаження, довільно розташовані в  $p$ -тивимірному просторі девіатора напружень.

**Про межі застосовності теорії малих пружно-пластичних деформацій (ТМППД).** Результати, одержані за плоско-пластичної деформації, на  $p$ -тивимірні траєкторії навантаження узагальнювали в працях [14, 26, 27]. Таке узагальнення можливе за монотонного навантаження, якщо  $\Pi_0[\epsilon_u^{(p)}] = k = \text{const}$ , тобто коли зміцнення матеріалу лінійне, або близьке до лінійного ( $d\sigma_u/d\epsilon_u \equiv E_{ut}(\epsilon_u) \approx \text{const}$ ).



Таблиця результатів розв'язку задачі про монотонну плоско-пластичну деформацію за деяких сингулярних і регулярної функцій зміщення  $F(\omega)$

$F = F(\omega)$ $\Pi = \Pi_0(\epsilon_d^{(p)})$	$L(\alpha)$ $\bar{\Gamma}^{(p)}(\alpha) = \frac{L(\alpha)\bar{S}}{\Pi_0(\epsilon_d^{(p)})}$	Рівняння для визначення $2\alpha = \alpha_1(t) + \alpha_2(t)$	Граничний кут монотонності навантаження $\beta_0 = \beta_0(S)$
$F = \ln \frac{c}{\omega}$	$L(\alpha) = \alpha^2 [I_0^2(2\alpha) + I_1^2(2\alpha)]$	$I_0(2\alpha) - 2\alpha I_1(2\alpha) \ln\left(\frac{2c}{\alpha}\right) = 2\tau_s/S$	$\text{tg } \beta_0 = \frac{1}{2\alpha \ln(2c/\alpha)} - \frac{I_1(2\alpha)}{I_0(2\alpha)}$
$F = \ln(c \cdot \text{ctg } \omega)$	$L(\alpha) = \frac{\sin^2 2\alpha}{4}$	$E - K \sin^2 2\alpha - 2 \frac{\ln c}{\pi} [E' - K' \cos^2 2\alpha] = \sqrt{2} \tau_s/S$	$\text{tg } \beta_0 = 2 \frac{E - K \sin^2 2\alpha - 2/\pi (E' - K' \cos^2 2\alpha) \ln c}{\left(K + \frac{2}{\pi} K' \ln c\right) \sin 4\alpha}$
$F = a - \omega$	$L(\alpha) = \alpha + \frac{1}{4} \sin 4\alpha$	$\cos 2\alpha + 2(\alpha - a) \sin 2\alpha = 2\tau_s/S$	$\text{tg } \beta_0 = \frac{1}{2(a - \alpha)} - \text{tg } 2\alpha$
$F = F_0(\omega)$ $F_0(0) < \infty$ $F'(0) = 0$	$L(\alpha) = \frac{1}{2F_0(0)}$	$\alpha = 0$	$\text{tg } \beta_0 = 0, (\beta_0 = 0)$

Для  $\Pi_0 \neq \text{const}$  область застосовності ТМППД звужується до пропорційного навантаження. Однак і тут, якщо функція  $\Pi_0[\epsilon_u^{(p)}]$  змінюється в малому діапазоні, така залежність може бути несуттєвою.

**Сучасні експериментальні дослідження і теорія Сен-Венана–Леви–Мізеса.** В усіх відомих на сьогодні теоріях пластичності, побудованих для ідеально пружно-пластичного матеріалу, приймають незмінність поверхні навантаження ( $\Sigma$ ) під час пластичного деформування на площині течіння ( $\sigma_u = \sigma_s$ ). Ця гіпотеза стала загальноприйнятною і не викликала заперечень з часів Треска і Сен-Венана (70-ті роки XIX століття). Однак експериментальні дослідження останніх років засвідчили [20], що початкова поверхня  $\Sigma_0(\sigma_u = \sigma_s)$  навантаження під час деформування на площині течіння змінюється і проявляється ефект Баушінгера (рис. 6а).

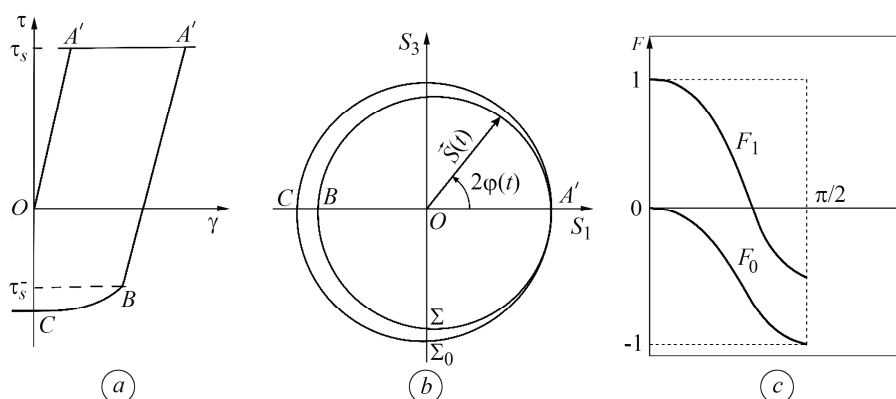


Рис. 6. Діаграма напружень за знакозмінного навантаження ідеально пружно-пластичного зразка (а); зміна поверхні течіння під час пластичної деформації (b) та графіки зміни функцій зміцнення  $F_0$  і  $F_1$  (c).

Fig. 6. Stress diagram under alternating loading of an perfectly elasto-plastic specimen (a); change of yield surface under plastic deformation (b) and the plots of functions of hardening  $F_0$  and  $F_1$  change (c).

Зміцнення відбувається в усіх напрямках (рис. 6b), крім напрямку активного деформування, де інтенсивність напруження залишається сталою  $\sigma_u = \sigma_s$ . Ці закономірності пластичного деформування матеріалів з площиною течіння можна описати запропонованою вище теорією ковзання, якщо матеріальну функцію  $R[\omega, \epsilon_u^{(p)}, \lambda_k^*]$  задати [17, 21] формулою

$$R = \Pi_0[\epsilon_u^{(p)}] F_0(\omega) + (\sigma_s - \sigma_u) \Pi_1[\epsilon_u^{(p)}, \lambda_k^*] F_1(\omega), \quad (31)$$

де  $F_0(\omega)$  і  $F_1(\omega)$  задовольняють умови (рис. 6c)

$$F_0(0) = F_0'(0) = F_1'(0) = 0, \quad F_1(0) = -F_0(\pi/2) < 1. \quad (32)$$

Описано спосіб визначення функцій зміцнення  $F_0(\omega)$ ,  $F_1(\omega)$  і пластичності  $\Pi_0[\epsilon_u^{(p)}]$ ,  $\Pi_1[\epsilon_u^{(p)}, \lambda_k^*]$  із експерименту на розтяг-стиск та знакозмінний закрут тонкостінної трубки [17, 21].

**Короткий опис одержаних у межах теорії результатів.** Запропонований диференціально-нелінійний варіант теорії пластичності враховує деформаційну анізотропію і вперше – взаємодію механізмів непружного деформування полікристалічних тіл [11, 12]. Теорія задовольняє постулат ізотропії Ілюшина [13], квазітермодинамічний постулат Друккера [34], принципи градієнтальності і макродетермінізму (стійкості деформування); диференціальну потенціальність визначальних рівнянь зв'язку  $\dot{\sigma}_{ij} \sim \dot{\epsilon}_{ij}^{(p)}$  [22], а також ефекти Баушінгера та Фейгена [35].

Для опису плоско-пластичної деформації одержано систему інтегральних рівнянь спеціального типу, в яких шукані функції входять як під знак інтегралів, так і в межі інтегрування. Розроблені аналітичні та числові методи розв'язання таких рівнянь як для регулярних, так і сингулярних функцій зміцнення  $F(\omega)$  для плоских кусково гладких траєкторій навантаження, в тому числі з ділянками розвантаження за пружним законом [14–19]. Особливу увагу приділено побудові визначальних рівнянь  $\dot{\sigma}_{ij} \sim \dot{\epsilon}_{ij}$  в малому околі точок зламу траєкторій навантаження, що дає можливість формулювати та розв'язувати задачі про стійкість елементів конструкцій за простого та складного докритичного навантажень [14, 18, 24]. Розв'язано задачу про занурення (пірнання) на діаграмі інтенсивність напружень–інтенсивність деформацій за значних кутів зламу траєкторії навантаження [36].

Узагальнення одержаних для плоско-пластичної деформації результатів для довільного розташування плоских траєкторій навантаження в п'ятивимірному просторі девіатора напружень забезпечує постулат ізотропії Ілюшина [13]. Для регулярних функцій зміцнення  $F(\omega)$ , що задовольняють умови  $F(0) < \infty$ ,  $F'(0) = 0$ , узагальнення розповсюджується на п'ятивимірні траєкторії навантаження [14, 23]. З урахуванням постулату ізотропії встановлено межі застосування теорії малих пружно-пластичних деформацій Генки–Надаї–Ілюшина за навантаження по п'ятивимірних траєкторіях [14–23]. Закладені основи варіанта теорії пластичності для ідеально пружно-пластичного матеріалу з площиною течіння. Теорія враховує нові експериментальні результати за складного навантаження таких матеріалів [20, 21]. Запропонований варіант теорії пластичності для матеріалів без чіткої лінійної пружної ділянки на діаграмі напружень  $\sigma_u \sim \epsilon_u$  [37]. Встановлено зв'язок теорії ковзання з іншими теоріями пластичної течії за ізотропного, кінематичного та комбінованого зміцнень [38–45].

Сформульовано та розв'язано задачі про стійкість елементів конструкцій (стрижнів, пластин, плит, оболонок та тривимірних тіл) за простого і вперше за складного докритичного навантажень [14, 16–31]. Досліджено вплив історії навантаження (пам'яті матеріалу) на критичні параметри. Встановлено, що за суттєво немонотонної докритичної деформації елементи конструкцій втрачають стійкість не через біфуркацію деформування в швидкостях (критерій Шенлі–Работнова), а через біфуркацію деформування в прискореннях [32, 33].

## ВИСНОВКИ

Аналітичними та численними експериментальними дослідженнями виявлено, що диференціально-нелінійний варіант теорії пластичності, заснований на концепції ковзання і постулаті ізотропії Ілюшина, дає можливість не тільки якісно пояснити встановлені в експерименті ефекти непружної поведінки матеріалів, але й кількісно описати закони деформації, а також, що важливо, формулювати та розв'язувати граничні задачі, зокрема, про стійкість елементів конструкцій за складних навантажень. Отже, запропонований варіант теорії із пізнавальних став робочим.

1. *Миркин Л. И.* Физические основы прочности и пластичности. – М.: МГУ, 1968. – 538 с.
2. *Taylor G. I.* Analysis of plastic strain in a cubic crystal. – New York: McMillan Co., 1938. – P. 218–224.
3. *Lin T. H.* Physical theory of plasticity // *Adv. in Appl. Mech.* – 1971. – **11**. – P. 255–311.
4. *Lin T.* A variant of the theory of slip // *Mechanical [Periodic Collection of Translations of Foreign Articles]*. – 1956. – № 3. – P. 110–124.
5. *Batdorf S. B. and Budiansky B. A.* A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip // *Technical Note № 1871*. – NASA, 1949.
6. *Naghdi P. M. and Rowley J. C.* An experimental study of biaxial stress-strain relations in plasticity // *J. of the Mech. and Physics of Solids*. – 1954. – **3**, Is. 1. – P. 63–80.
7. *Sanders J. L.* Plastic stress-strain relations based on linear loading functions // *Proc. of the Second U.S. National Congress of Appl. Mech.* Ann Arbor, MI, 14–18 June 1954. – New York: ASME, 1955. – P. 455–460.
8. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
9. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с.
10. *Joshimura J.* Comment on the slip theory of Batdorf and Budiansky // *Bull. Asme*. – 1958. – **I**, № 2. – P. 143–157.
11. *Леонов М. Я., Швайко Н. Ю.* Сложная плоская деформация // *Докл. АН СССР*. – 1964. – № 2. – С. 107–1010.
12. *Швайко Н. Ю.* К теории пластичности, основанной на концепции скольжения // *Прикл. механика*. – 1976. – **12**, № 11. – С. 12–24.
13. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 292 с.
14. *Швайко Н. Ю.* Сложное нагружение и вопросы устойчивости. – Днепропетровск: Изд-во Днепропетр. гос. ун-та, 1989. – 176 с.
15. *Швайко Н. Ю.* О возможном общем виде функции упрочнения линейной плоскопластической среды // *Гидромеханика и теория упругости*. – 1972. – Вып. 14. – С. 109–120.
16. *Швайко М. Ю.* Про методи розв'язування інтегральних рівнянь теорії пластичності, заснованої на концепції ковзання // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2010. – **53**, № 1. – С. 48–57.
17. *Швайко Н. Ю.* Концепция скольжения и некоторые особенности пластического деформирования материалов при сложном нагружении // *Проблемы механики деформируемых тел и горных пород*. – М.: Изд-во Московск. гос. горного ун-та, 2001. – С. 348–364.
18. *Швайко М. Ю.* Пластична деформація матеріалів при навантаженні по кусково-гладких траєкторіях з ділянками розвантаження за пружним законом // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2015. – **58**, № 4. – С. 113–127.
19. *Швайко Н. Ю.* К теории скольжения с гладкими и сингулярными поверхностями нагружения // *Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород: Сб. статей к 75-летию акад. Е. И. Шемякина*. – М.: Физматлит, 2006. – С. 849–858.
20. *Феденко В. И.* Сложная деформация материалов с площадкой текучести // *Тез. докл. Второго Всесоюз. симп. “Прочность материалов и элементов конструкций при сложном напряженном состоянии”*. – К., 1984. – Ч. 2. – С. 64–65.
21. *Швайко М. Ю.* Модель пластичного деформування матеріалів з площинкою текучості // *Доп. НАН України. Сер. А*. – 1997. – № 6. – С. 78–84.
22. *Shvaiko M. Yu.* Stability of deformation and differential potentiality of constitutive equations of the theory of plasticity // *Materials Science*. – 2002. – **38**, № 3. – P. 361–373.
23. *Швайко Н. Ю.* Влияние истории нагружения на устойчивость элементов конструкций. – Днепропетровск: Изд-во ДГУ, 1991. – 168 с.
24. *Швайко Н. Ю., Клышев Ю. В.* Аппроксимация и обращение зависимостей между приращениями напряжений и деформаций в окрестностях излома траектории нагружения // *Изв. АН Кирг. ССР*. – 1968. – № 6. – С. 21–29.
25. *Швайко Н. Ю.* Об инвариантности зависимости между углом нагружения и приращениями векторов деформации и напряжений в теории скольжения // *Докл. АН УССР. Сер. А*. – 1978. – № 2. – С. 146–149.
26. *Швайко Н. Ю.* К вопросу о рамках применимости деформационной теории пластичности // *Прикл. механика*. – 1967. – **III**, Вып. 6. – С. 31–38.

27. Швайко Н. Ю., Макаренков А. Г. О пределах применимости теории малых упругопластических деформаций при непропорциональном нагружении сплава ВТ-6 // Прикл. механика. – 1976. – № 2. – С. 48–53.
28. Сорокин В. И., Швайко Н. Ю. Бифуркация процесса упругопластического деформирования и критического поведения модели пластины // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1979. – № 1. – С. 44–49.
29. Билан Ф. И., Швайко Н. Ю. Пластические выпучивание однородных и слоистых оболочек при некоторых видах сложного нагружения // Прочность и устойчивость реально твердых тел. – Фрунзе: ИЛИМ, 1988. – С. 37–58.
30. Швайко Н. Ю., Позняк Ю. В. Учет истории нагружения в задачах трехмерной теории устойчивости неоднородных тел и плит // Тез. докл. 8-ой Всесоюз. конф. по прочности и пластичности. – Пермь, 1983. – С. 196.
31. Позняк Ю. В., Швайко Н. Ю. Влияние истории нагружения на критические параметры однородных и трехслойных пластинок и плит с позиций трехмерных уравнений теории устойчивости // Устойчивость и прочность элементов конструкций. – Днепропетровск: ДГУ, 1986. – С. 65–74.
32. Швайко Н. Ю. О двух формах бифуркации процесса деформирования упругопластического тела при сложном нагружении // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1979. – № 8. – С. 651–655.
33. Швайко Н. Ю. Сложные нагружения и некоторые вопросы устойчивости элементов конструкций // Прикл. механика. – 1976. – № 2. – С. 48–53.
34. Drucker D. C. A more fundamental approach to plastic stress-strain relations // Proc. of the first US Nat. Congr. of Appl. Mech. ASME. – 1951.
35. Швайко Н. Ю. Эффект Фейгена и его описание теорией пластичности, основанной на концепции скольжения // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2007. – 1, вип. 14. – С. 15–25.
36. Швайко А. Ю., Швайко М. Ю. Дослідження явища занурення на діаграмі інтенсивність напружень–інтенсивність деформацій при складному навантаженні пружно-пластичних матеріалів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – 56, № 1. – С. 174–184.
37. Швайко М. Ю. Варіант теорії пластичності для матеріалів без вираженої упругої ділянки на діаграмі  $\sigma_u \sim \epsilon_u$  // Прикл. механіка. – 1977. – XIII, № 9. – С. 3–9.
38. Shvaiko M. Yu. Slip theory and its applications // Materials Science. – 2002. – 38, № 4. – P. 590–605.
39. Shvaiko M. Yu. On the theory of plasticity with smooth surfaces of loading // Materials Science. – 1997. – 33, № 6. – P. 803–812.
40. Швайко Н. Ю. Концепция скольжения и гладкие поверхности нагружения в теории пластичности // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 10. – С. 58–63.
41. Мохель А. И., Салганик Р. Л., Христианович С. А. О пластическом деформировании упрочняющихся металлов и сплавов. Определяющие уравнения и расчеты по ним // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1983. – № 4. – С. 119–141.
42. Илюшин А. А., Ленский В. С. Модель и алгоритм // Прикл. проблемы прочности и пластичности. – 1975. – Вып. 1. – С. 3–18.
43. Shvaiko M. Yu. Correctness of the theories of plasticity taking into account the mutual influence of the mechanisms of inelastic deformation // Materials Science. – 2001. – 37, № 2. – P. 199–209.
44. Feigen M. Inelastic behavior under combine tension // Proc. of the second U.S. National Congress of Appl. Mech. – 1954. – P. 469–476.
45. Hendelman G. H., Lin C. C., and Prager W. On the mechanical behavior of metals in the strain – hardening range // Quart. Appl. Math. – 1947. – P. 397 – 407.

Одержано 16.11.2020