УДК 519.6:539.3

ЧИСЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ КОНТАКТУ ПРУЖНИХ ТІЛ, ОДНЕ З ЯКИХ МАЄ НЕСУЦІЛЬНЕ ТОНКЕ ПОКРИТТЯ

І. І. ПРОКОПИШИН [1], *А. О. СТЯГАР* [2]

[1] *Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів;*

[2] *Львівський національний університет імені Івана Франка*

Розглянуто задачу про контакт двох пружних тіл, одне з яких має несуцільне тонке пружне покриття у вигляді оболонки типу Тимошенка. Для розв'язування варіаційного рівняння цієї задачі запропоновано алгоритм декомпозиції області типу Робіна, який застосовано для дослідження контактної взаємодії двох прямокутних пружних тіл з несуцільним покриттям. Проаналізовано залежність поверхневих і еквівалентних напружень від висоти і жорсткості покриття. Порівняно результати, отримані зі застосуванням теорії оболонок типу Тимошенка та класичної теорії пружності для моделювання покриття.

Ключові слова: *контакт пружних тіл, тонкі покриття, оболонки типу Тимошенка, нелінійні варіаційні рівняння, методи декомпозиції області, метод скінченних елементів.*

The problem of contact between two elastic bodies, one of which has a nonuniform thin elastic coating in the form of Timoshenko-type shell, is considered. Domain decomposition algorithm of Robin-type for solving a variational equation of this problem is proposed. Obtained algorithm is used for the investigation of contact interaction between two rectangular elastic bodies with a nonuniform coating. The dependence of the surface and equivalent stresses on the height and the rigidity of the coating is analyzed. The results, obtained by the algorithms, in which the Timoshenko-type shell theory as well as the classical elasticity theory are used to model the coating, are compared.

Keywords: *contact of elastic bodies, thin coatings, Timoshenko-type shells, nonlinear variational equations, domain decomposition methods, finite element method.*

Вступ. Тонкі покриття часто застосовують для покращення міцності елементів інженерних конструкцій і деталей машин та їх захисту від впливу зовнішнього середовища, що потребує розроблення ефективних математичних методів дослідження напружено-деформованого стану (НДС) тіл з такими покриттями.

В останні роки для збільшення зносо- та тріщиностійкості, адгезійної і когезійної міцності все частіше використовують тонкі дискретні і несуцільні покриття. Досліджено НДС пружних тіл з тонкими покриттями дискретної структури без урахування можливого контакту з іншими тілами [1, 2]. Проаналізовано контактну взаємодію між тілами з дискретними покриттями та жорсткими штампами [3–5].

Ефективним засобом для дослідження неідеального контакту багатьох тіл з дискретними і несуцільними покриттями є методи декомпозиції області (МДО), які дають змогу звести розв'язування задач про контакт різномасштабних об'єктів до розв'язування послідовності простіших задач для окремих об'єктів та ефективно поєднувати різні математичні моделі і методи. У праці [6] розроблено паралельні ітераційні алгоритми МДО типу Робіна для розв'язування задачі про контакт двох пружних тіл, одне з яких має вздовж однієї зі своїх граней тонке су-

Контактна особа: І. І. ПРОКОПИШИН, e-mail: ihor84@gmail.com

цільне покриття у вигляді оболонки типу Тимошенка, що з'єднане з тілом через нелінійний вінклерівський шар. У публікації [7] МДО типу Робіна використано для дослідження осесиметричної задачі про контакт двох пружних тіл, одне з яких має поодиноко розташоване дискретне циліндричне пружне покриття. При цьому для опису покриття застосовано модель осесиметричного пружного тіла.

Нижче розроблено алгоритм МДО типу Робіна для плоскої задачі про неідеальний контакт двох пружних тіл, одне з яких має несуцільне тонке покриття. На відміну від праць [1–5, 7], для моделювання НДС несуцільного покриття застосовано теорію оболонок типу Тимошенка. З використанням методу скінченних елементів (МСЕ) отриманий алгоритм апробовано для дослідження контакту двох прямокутних тіл з несуцільним тонким покриттям. Вивчено ефективність застосування теорії оболонок типу Тимошенка.

Формулювання задачі. Розглянемо задачу про контакт пружного тіла $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$ і композитного пружного тіла $\Omega_2 \bigcup \Omega_3 \subset \mathbb{R}^2$, що складається з масивного тіла Ω_3 і тонкого Ω_2, яке є його покриттям (рис. 1). Між пружним тілом Ω_1 і покриттям Ω_2 тіла Ω_3 виконуються умови одностороннього контакту, а між тілом Ω_3 і його покриттям Ω_2 – умови ідеального контакту. Вважаємо, що усі тіла мають ліпшицеві межі Γ_α, $\alpha = 1,2,3$. Введемо у $\mathbb{R}^2$ декартову систему координат x_1, x_2. НДС у точці $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top$ кожного з тіл Ω_α, $\alpha = 1,3$, визначають вектор переміщень $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x})$, тензори деформацій $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha(\mathbf{x})$ і напружень $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_\alpha(\mathbf{x})$, компоненти яких задовольняють рівняння класичної теорії пружності за умов плоскої деформації:

$$\textstyle\sum_{j=1}^{2} \partial\sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x}) / \partial x_j = 0 \,, \; i = 1,2 \,, \; \mathbf{x} \in \Omega_\alpha \,, \; \alpha = 1,3 \,, \tag{1}$$

$$\sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x}) = \delta_{ij}\, \lambda_\alpha \left(\varepsilon_{\alpha 11}(\mathbf{x}) + \varepsilon_{\alpha 22}(\mathbf{x}) \right) + 2\mu_\alpha \varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{x}) \,, \; i,j = 1,2 \,, \; \mathbf{x} \in \Omega_\alpha \,, \; \alpha = 1,3 \,, \tag{2}$$

$$\varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{x}) = \tfrac{1}{2} \partial u_{\alpha i}(\mathbf{x}) / \partial x_j + \tfrac{1}{2} \partial u_{\alpha j}(\mathbf{x}) / \partial x_i \,, \; i,j = 1,2 \,, \; \mathbf{x} \in \Omega_\alpha \,, \; \alpha = 1,3 \,, \tag{3}$$

де $\lambda_\alpha(\mathbf{x})$, $\mu_\alpha(\mathbf{x})$ – параметри Ляме, а $\delta_{ij} = \{1,\, i = j\} \vee \{0,\, i \neq j\}$ – символ Кронекера.

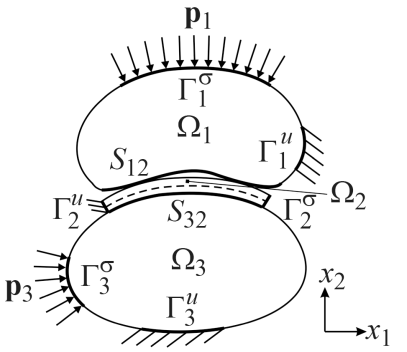

Рис. 1. Контакт тіл з покриттям.

Fig. 1. Contact of the bodies with coating.

Для опису НДС покриття Ω_2 використаємо рівняння теорії оболонок типу Тимошенка [8]. Для цього введемо у тілі Ω_2 криволінійну систему координат ξ_1, ξ_2, ξ_3, яка пов'язана із його серединною поверхнею Ω_2^*. Вважаємо, що покриття Ω_2 є циліндричною оболонкою, нескінченною у напрямку ξ_2. Позначимо через v_{21}, w_2, γ_{21} переміщення по дотичній, нормалі та кут повороту відповідно, через ε_{211}, ε_{213}, χ_{211} – деформації, а через T_{211}, T_{213}, M_{211} – зусилля і момент в оболонці.

Рівняння теорії оболонок типу Тимошенка для тонкого тіла Ω_2 мають вигляд [8]

$$-A_{21}^{-1}\, dT_{211} / d\xi_1 - k_{21} T_{213} = p_{21} \,, \; -A_{21}^{-1}\, dT_{213} / d\xi_1 + k_{21} T_{211} = p_{23} \,, \; \xi_{1b} \le \xi_1 \le \xi_{1e} \,, \tag{4}$$

$$-A_{21}^{-1}\, dM_{211} / d\xi_1 + T_{213} = m_{21} \,, \quad \xi_{1b} \le \xi_1 \le \xi_{1e} \,, \tag{5}$$

$$T_{211} = E_2 h_2 \varepsilon_{211} \big/ (1-\nu_2^2)\,,\; T_{213} = k_2' \mu_2 h_2 \varepsilon_{213}\,,\; M_{211} = E_2 h_2^3 \chi_{211} \big/ (12(1-\nu_2^2))\,, \quad (6)$$

$$\varepsilon_{211} = A_{21}^{-1}\, dv_{21}/d\xi_1 + k_{21} w_2\,, \qquad \varepsilon_{213} = A_{21}^{-1}\, dw_2/d\xi_1 + \gamma_{21} - k_{21} v_{21}\,,$$

$$\chi_{211} = A_{21}^{-1}\, d\gamma_{21}/d\xi_1\,, \quad (7)$$

де h_2 – товщина оболонки, $A_{21} = A_{21}(\xi_1)$, $k_{21} = k_{21}(\xi_1)$ – параметр Ляме і кривина серединної лінії, E_2 – модуль Юнґа, ν_2 – коефіцієнт Пуассона, а $k_2' = 5/6$ – коефіцієнт зсуву.

Функції навантаження на оболонку мають вигляд

$$p_{21} = \left(1 + k_{21} h_2/2\right) \sigma_{213}^{+} + \left(1 - k_{21} h_2/2\right) \sigma_{213}^{-}\,, \quad (8)$$

$$p_{23} = \left(1 + k_{21} h_2/2\right) \sigma_{233}^{+} - \left(1 - k_{21} h_2/2\right) \sigma_{233}^{-}\,, \quad (9)$$

$$m_{21} = \left(1 + k_{21} h_2/2\right) \sigma_{213}^{+} h_2 \big/ 2 - \left(1 - k_{21} h_2/2\right) \sigma_{213}^{-} h_2 \big/ 2\,, \quad (10)$$

де σ_{2ij}^{+}, σ_{2ij}^{-}, $i, j = 1,3$ – компоненти вектора поверхневих сил на зовнішній $(\xi_3 = h_2/2)$ і внутрішній $(\xi_3 = -h_2/2)$ поверхнях оболонки, а m_{21} – момент зовнішнього навантаження.

На кожній межі $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$, $\alpha = 1,3$ масивних тіл уведемо локальний ортонормований базис $\boldsymbol{\tau}_\alpha$, $\mathbf{n}_\alpha$, де $\mathbf{n}_\alpha$ – одинична зовнішня нормаль, а $\boldsymbol{\tau}_\alpha$ – одинична дотична. Вектори переміщень і напружень на Γ_α у цьому базисі запишемо так:

$$\mathbf{u}_\alpha = u_{\alpha\tau} \boldsymbol{\tau}_\alpha + u_{\alpha n} \mathbf{n}_\alpha\,, \quad \boldsymbol{\sigma}_\alpha = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha = \sigma_{\alpha\tau} \boldsymbol{\tau}_\alpha + \sigma_{\alpha n} \mathbf{n}_\alpha\,, \quad \alpha = 1,3\,.$$

Припустимо, що межі масивних тіл складаються з трьох частин, які не перетинаються: $\Gamma_1 = \Gamma_1^u \cup \Gamma_1^\sigma \cup S_{12}$, $\Gamma_3 = \Gamma_3^u \cup \Gamma_3^\sigma \cup S_{32}$, а межа тонкого тіла – з чотирьох: $\Gamma_2 = \Gamma_2^u \cup \Gamma_2^\sigma \cup S_{21} \cup S_{23}$.

На частинах Γ_α^u меж кожного з тіл задано кінематичні крайові умови, а на частинах Γ_α^σ – статичні крайові умови. Для масивних тіл ці умови мають вигляд

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}) = 0\,,\; \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^u\,,\; \alpha = 1,3\,;\; \boldsymbol{\sigma}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_\alpha(\mathbf{x})\,,\; \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^\sigma\,,\; \alpha = 1,3\,. \quad (11)$$

Для тонкого покриття Ω_2 задаємо такі кінематичні і статичні крайові умови:

$$v_{21} = 0\,,\; w_2 = 0\,,\; \gamma_{21} = 0\,,\; \xi_1 = \xi_{1e}\,;\; T_{211} = 0\,,\; T_{213} = 0\,,\; M_{211} = 0\,,\; \xi_1 = \xi_{1b}\,, \quad (12)$$

де край $\xi_1 = \xi_{1e}$ відповідає межі Γ_2^u, а $\xi_1 = \xi_{1b}$ – межі Γ_2^σ.

Межа $S_{12} \subset \Gamma_1$ – ділянка можливого контакту тіла Ω_1 з покриттям Ω_2, а $S_{21} \subset \Gamma_2$ – покриття Ω_2 з тілом Ω_1. Вважаємо, що ці межі достатньо близькі ($S_{12} \approx S_{21}$), тому $\mathbf{n}_1(\mathbf{x}) \approx -\mathbf{n}_2(\mathbf{x}')$, де $\mathbf{x}' = P(\mathbf{x})$ – проекція точки $\mathbf{x} \in S_{12}$ на S_{21}. Нормальну відстань між Ω_1 і Ω_2 до контакту позначимо через $d_n(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|$.

На межах S_{12} і S_{21} задано умови одностороннього контакту без тертя:

$$\sigma_{1\tau}(\mathbf{x}) = \sigma_{213}^{+}(\mathbf{x}') = 0\,,\;\; \sigma_{1n}(\mathbf{x}) = -\sigma_{233}^{+}(\mathbf{x}') \le 0\,,\;\; \mathbf{x} \in S_{12}\,,\;\; \mathbf{x}' = P(\mathbf{x}) \in S_{21}\,, \quad (13)$$

$$u_{1n}(\mathbf{x}) + w_2(\mathbf{x}') \le d_n(\mathbf{x})\,, \quad [u_{1n}(\mathbf{x}) + w_2(\mathbf{x}') - d_n(\mathbf{x})]\sigma_{1n}(\mathbf{x}) = 0\,,$$

$$\mathbf{x} \in S_{12}\,, \quad \mathbf{x}' = P(\mathbf{x}) \in S_{21}\,. \quad (14)$$

На спільній межі $S_{23} = S_{32}$ покриття Ω_2 і тіла Ω_3 виконуються умови ідеального контакту:

$$u_{3\tau}(\mathbf{x}) = v_{21}(\mathbf{x}) - h_2\gamma_{21}(\mathbf{x})/2\,, \quad u_{3n}(\mathbf{x}) = -w_2(\mathbf{x})\,,$$

$$\sigma_{3\tau}(\mathbf{x}) = -\sigma_{213}^{-}(\mathbf{x})\,, \quad \sigma_{3n}(\mathbf{x}) = -\sigma_{233}^{-}(\mathbf{x})\,, \quad \mathbf{x} \in S_{23}\,. \tag{15}$$

Алгоритм декомпозиції області. Використовуючи результати праць [6, 7, 9, 10] та метод штрафу, отримали слабке формулювання контактної задачі (1)–(15) у вигляді нелінійного варіаційного рівняння у гільбертовому просторі:

$$A(\mathbf{u},\mathbf{u}^*) + J'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{u}^*) - L(\mathbf{u}^*) = 0 \quad \forall \mathbf{u}^* \in V_0\,, \quad \mathbf{u} \in V_0\,, \tag{16}$$

де $V_0 = \{\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3)^\top : \mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha^0,\ \alpha = 1,2,3\}$, $V_\alpha^0 = \{\mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha : \mathbf{u}_\alpha = 0$ на $\Gamma_\alpha^u\}$, $\alpha = 1,2,3$, $V_\alpha = [H^1(\Omega_\alpha)]^2$, $\alpha = 1,3$ – простори Соболєва з елементами $\mathbf{u}_\alpha = (u_{\alpha 1}, u_{\alpha 2})^\top$, $\alpha = 1,3$, $V_2 = [H^1(\Omega_2^*)]^3$ – простір Соболєва з елементами $\mathbf{u}_2 = (v_{21}, w_2, \gamma_{21})^\top$,

$$A(\mathbf{u},\mathbf{u}^*) = \sum\nolimits_{\alpha=1}^{3} a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha,\mathbf{u}_\alpha^*)\,, \quad \mathbf{u},\mathbf{u}^* \in V_0\,, \quad a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha,\mathbf{u}_\alpha^*) =$$

$$= \int_{\Omega_\alpha} \left(\lambda_\alpha \sum\nolimits_{i=1}^{2} \varepsilon_{\alpha ii}(\mathbf{u}_\alpha) \sum\nolimits_{j=1}^{2} \varepsilon_{\alpha jj}(\mathbf{u}_\alpha^*) + 2\mu_\alpha \sum\nolimits_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{u}_\alpha)\varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{u}_\alpha^*) \right) d\Omega\,,\ \alpha = 1,3\,,$$

$$a_2(\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_2^*) = (T_{211}, dv_{21}^*/d\xi_1)_{L_2(\Omega_2^*)} + (A_{21}k_{21}T_{213}, v_{21}^*)_{L_2(\Omega_2^*)} + (T_{213}, dw_2^*/d\xi_1)_{L_2(\Omega_2^*)} +$$

$$+ (A_{21}k_{21}T_{211}, w_2^*)_{L_2(\Omega_2^*)} + (M_{211}, d\gamma_{21}^*/d\xi_1)_{L_2(\Omega_2^*)} + (A_{21}T_{213}, \gamma_{21}^*)_{L_2(\Omega_2^*)}\,,$$

$$(u,u^*)_{L_2(\Omega_2^*)} = \int_{\xi_{1b}}^{\xi_{1e}} u\,u^*\,d\xi_1\,,$$

$$L(\mathbf{u}) = \sum\nolimits_{\alpha=1}^{3} \ell_\alpha(\mathbf{u}_\alpha)\,,\ \mathbf{u} \in V_0\,,\ \ell_\alpha(\mathbf{u}_\alpha) = \int_{\Gamma_\alpha^\sigma} \mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha\,dS\,,\ \alpha = 1,3\,,$$

$$\ell_2(\mathbf{u}_2) = (A_{21}p_{21}, v_{21})_{L_2(\Omega_2^*)} + (A_{21}p_{23}, w_2)_{L_2(\Omega_2^*)} + (A_{21}m_{21}, \gamma_{21})_{L_2(\Omega_2^*)}\,,$$

$$J'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{u}^*) = -\tfrac{1}{\theta}\int_{S_{12}} (d_n - u_{1n} - w_2)^-(u_{1n}^* + w_2^*)\,dS + \tfrac{1}{\theta}\int_{S_{23}} (w_2 + u_{3n})(w_2^* + u_{3n}^*)\,dS +$$

$$+ \tfrac{1}{\theta}\int_{S_{23}} (-v_{21} + h_2\gamma_{21}/2 + u_{3\tau})\,(-v_{21}^* + h_2\gamma_{21}^*/2 + u_{3\tau}^*)\,dS\,, \quad \mathbf{u},\mathbf{u}^* \in V_0\,.$$

Тут $\theta > 0$ – параметр штрафу.

Застосуємо до розв'язування (16) неявний нестаціонарний ітераційний метод:

$$G^k(\mathbf{u}^{k+1},\mathbf{u}^*) = G^k(\mathbf{u}^k,\mathbf{u}^*) - \rho^k[A(\mathbf{u}^k,\mathbf{u}^*) + J'_\theta(\mathbf{u}^k,\mathbf{u}^*) - L(\mathbf{u}^*)] \quad \forall \mathbf{u}^* \in V_0\,,$$
$$k = 0,1,\ldots\,, \tag{17}$$

де ρ^k – ітераційні параметри; $\mathbf{u}^k$ – k-ті наближення, а G^k – такі білінійні форми:

$$G^k(\mathbf{u},\mathbf{u}^*) = A(\mathbf{u},\mathbf{u}^*) + X^k(\mathbf{u},\mathbf{u}^*)\,,\ \mathbf{u},\mathbf{u}^* \in V_0\,, \tag{18}$$

$$X^k(\mathbf{u},\mathbf{u}^*) = \tfrac{1}{\theta}\int_{S_{23}} \psi_{23}^k \left[(-v_{21} + h_2\gamma_{21}/2)(-v_{21}^* + h_2\gamma_{21}^*/2) + u_{3\tau}u_{3\tau}^* \right] dS +$$

$$+ \tfrac{1}{\theta}\int_{S_{23}} \psi_{23}^k [w_2 w_2^* + u_{3n}u_{3n}^*]\,dS + \tfrac{1}{\theta}\int_{S_{12}} \psi_{12}^k [u_{1n}u_{1n}^* + w_2 w_2^*]\,dS\,,\ \mathbf{u},\mathbf{u}^* \in V_0\,. \tag{19}$$

Тут $\psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) = \{0,\ \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta} \backslash S_{\alpha\beta}^k\} \vee \{1,\ \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}^k\}$ – характеристичні функції деяких заданих підмеж $S_{\alpha\beta}^k \subseteq S_{\alpha\beta}$. Зокрема, ці функції можна задати у вигляді [6]

$$\psi_{12}^k = \chi_{12}^k = \chi_{12}(\mathbf{u}^k) = -[\mathrm{sgn}(d_n - u_{1n}^k - w_2^k)]^-\,,\ \psi_{23}^k \equiv 1\,. \tag{20}$$

Аналогічно, як у працях [6, 7], можна показати, що ітераційний метод (17) з білінійними формами (18) еквівалентний такому методу декомпозиції області типу Робіна:

$$a_1(\tilde{\mathbf{u}}_1^{k+1},\mathbf{u}_1^*)+\frac{1}{\theta}\int_{S_{12}}\psi_{12}^k\,\tilde{u}_{1n}^{k+1}u_{1n}^*\,dS=\ell_1(\mathbf{u}_1^*)+\frac{1}{\theta}\int_{S_{12}}\psi_{12}^k\,u_{1n}^k u_{1n}^*\,dS+$$

$$+\frac{1}{\theta}\int_{S_{12}}(d_n-u_{1n}^k-w_2^k)^-u_{1n}^*\,dS\quad\forall\mathbf{u}_1^*\in V_1^0\,, \tag{21}$$

$$a_2(\tilde{\mathbf{u}}_2^{k+1},\mathbf{u}_2^*)+\frac{1}{\theta}\int_{S_{21}}\psi_{12}^k\,\tilde{w}_2^{k+1}w_2^*\,dS+\frac{1}{\theta}\int_{S_{23}}\psi_{23}^k(-\tilde{v}_{21}^{k+1}+h_2\tilde{\gamma}_{21}^{k+1}/2)(-v_{21}^*+h_2\gamma_{21}^*/2)\,dS+$$

$$+\frac{1}{\theta}\int_{S_{23}}\psi_{23}^k\,\tilde{w}_2^{k+1}w_2^*\,dS=\ell_2(\mathbf{u}_2^*)+\frac{1}{\theta}\int_{S_{21}}\psi_{12}^k\,w_2^k w_2^*\,dS+\frac{1}{\theta}\int_{S_{23}}\psi_{23}^k\,w_2^k w_2^*\,dS+$$

$$+\frac{1}{\theta}\int_{S_{23}}\psi_{23}^k(-\tilde{v}_{21}^{k+1}+h_2\gamma_{21}^k/2)(-v_{21}^*+h_2\gamma_{21}^*/2)\,dS+\frac{1}{\theta}\int_{S_{21}}(d_n-u_{1n}^k-w_2^k)^-\,w_2^*\,dS-$$

$$-\frac{1}{\theta}\int_{S_{23}}(-v_{21}^k+h_2\gamma_{21}^k/2+u_{3\tau}^k)(-v_{21}^*+h_2\gamma_{21}^*/2)dS-\frac{1}{\theta}\int_{S_{23}}(w_2^k+u_{3n}^k)\,w_2^*\,dS$$

$$\forall\mathbf{u}_2^*\in V_2^0\,, \tag{22}$$

$$a_3(\tilde{\mathbf{u}}_3^{k+1},\mathbf{u}_3^*)+\frac{1}{\theta}\int_{S_{32}}\psi_{23}^k\,\tilde{u}_{3\tau}^{k+1}u_{3\tau}^*\,dS+\frac{1}{\theta}\int_{S_{32}}\psi_{23}^k\,\tilde{u}_{3n}^{k+1}u_{3n}^*\,dS=$$

$$=\ell_3(\mathbf{u}_3^*)+\frac{1}{\theta}\int_{S_{32}}\psi_{23}^k\,u_{3\tau}^k u_{3\tau}^*\,dS-$$

$$-\frac{1}{\theta}\int_{S_{32}}(-v_{21}^k+h_2\gamma_{21}^k/2+u_{3\tau}^k)u_{3\tau}^*\,dS-\frac{1}{\theta}\int_{S_{32}}(w_2^k+u_{3n}^k)u_{3n}^*\,dS\quad\forall\mathbf{u}_3^*\in V_3^0\,, \tag{23}$$

$$\mathbf{u}_\alpha^{k+1}=\rho^k\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1}+(1-\rho^k)\mathbf{u}_\alpha^k\,,\ \alpha=1,2,3\,,\ k=0,1,\ldots\,. \tag{24}$$

На кожній ітерації методу (21)–(24) необхідно розв'язувати три незалежні лінійні варіаційні рівняння в окремих тілах, два з яких ((21) і (23)) відповідають задачам теорії пружності для масивних тіл, а одне (рівняння (22)) – задачі теорії оболонок типу Тимошенка для тонкого тіла з умовами Робіна на спільних межах.

Числові дослідження. Розроблений МДО застосовано для дослідження задачі про контакт пружного тіла Ω_1, нижня грань якого має кривину у вигляді квадратичної функції, та композитного пружного тіла $\Omega_2\bigcup\Omega_3$, яке складається з основи – тіла Ω_3 і тонкого несуцільного покриття – тіла Ω_2. Схему контакту, а також крайові умови наведено на рис. 2. Осадка верхнього тіла $\Delta=2{,}778999\chi$. Між Ω_1 і Ω_2 відбувається односторонній контакт, а між Ω_2 і Ω_3 виконуються умови ідеального контакту. Відстань між Ω_1 і Ω_2 до деформації описує функція $d_n(\mathbf{x})=\chi x_1^2/b^2$, $\chi=10^{-3}b$. На лівій межі кожного з тіл задано умови симетрії. Тіла Ω_1 і Ω_3 мають однакові висоту $h=8b$ і довжину $l=4b$. Висота покриття Ω_2 рівна $h_2\in[b/128,\,b]$ ($h_2<<h$), а

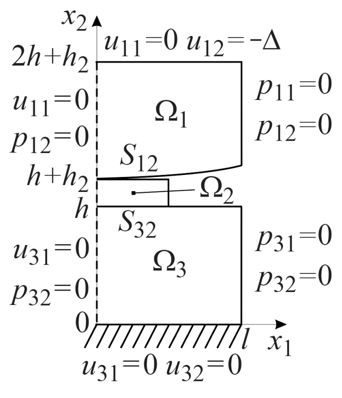

Рис. 2. Схема контакту тіл.

Fig. 2. Scheme of contact of the bodies.

його довжина $l_2 = l/2$. Ділянкою можливого контакту є $S_{12} = \{\mathbf{x} : x_1 \in [0, l/2], x_2 = h + h_2\}$, а міжфазною поверхнею – $S_{32} = \{\mathbf{x} : x_1 \in [0, l/2], x_2 = h\}$. Модулі Юнґа масивних тіл однакові: $E_1 = E_3 = E$, а модуль Юнґа покриття $E_2 \in [E/5, 5E]$. Коефіцієнти Пуассона усіх тіл однакові: $\nu = 0,3$.

Для розв'язування цієї задачі використали МДО (21)–(24). Числове розв'язування рівнянь (21) і (23) здійснили двовимірним МСЕ з квадратичними трикутними елементами, а для рівняння (22) застосували одновимірний МСЕ з бульбашковими базисними функціями 4-го порядку. Для тіл Ω_1 і Ω_3 використовували нерівномірні розбиття відповідно на 1372 і 1349 скінченних елементів з поступовим згущенням у напрямку ділянок, що примикають до меж контакту. Для Ω_2 застосовували одновимірну сітку з 32 скінченними елементами, вузли якої збігаються з вузлами двовимірних сіток тіл Ω_1 і Ω_3.

Для порівняння результатів цю задачу також розв'язано МДО, отриманим на основі моделі, у якій для опису НДС тонкого покриття Ω_2 застосовано рівняння класичної теорії пружності. Алгоритм цього методу відрізняється від МДО (21)–(24) тим, що на кожній ітерації замість варіаційного рівняння теорії оболонок (22) необхідно розв'язувати варіаційне рівняння

$$\tilde{a}_2(\tilde{\mathbf{u}}_2^{k+1}, \mathbf{u}_2^*) + \tfrac{1}{\theta}\int_{S_{21}} \psi_{12}^k\, \tilde{u}_{2n}^{k+1} u_{2n}^*\, dS + \tfrac{1}{\theta}\sum_{m=\tau,n}\int_{S_{23}} \psi_{23}^k\, \tilde{u}_{2m}^{k+1} u_{2m}^*\, dS =$$

$$= \tilde{\ell}_2(\mathbf{u}_2^*) + \tfrac{1}{\theta}\int_{S_{21}} \psi_{12}^k\, u_{2n}^k u_{2n}^*\, dS +$$

$$+ \tfrac{1}{\theta}\sum_{m=\tau,n}\int_{S_{23}} \psi_{23}^k\, u_{2m}^k u_{2m}^*\, dS + \tfrac{1}{\theta}\int_{S_{21}} (d_n - u_{1n}^k - u_{2n}^k)^- u_{2n}^* dS +$$

$$+ \tfrac{1}{\theta}\sum_{m=\tau,n}\int_{S_{23}} (-u_{2m}^k - u_{3m}^k) u_{2m}^* dS \qquad \forall \mathbf{u}_2^* \in \tilde{V}_2^0, \tag{25}$$

що відповідає плоскій задачі теорії пружності для покриття Ω_2 з умовами Робіна на ділянках S_{21} і S_{23}. Тут $\tilde{V}_2^0 = \{\mathbf{u}_2 = (u_{21}, u_{22})^\top \in \tilde{V}_2 : \mathbf{u}_2 = 0 \text{ на } \Gamma_2^u\}$, $\tilde{V}_2 = [H^1(\Omega_2)]^2$, $\tilde{a}_2(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2^*) = \int_{\Omega_2}\Big(\lambda_2 \sum_{i=1}^2 \varepsilon_{2ii}(\mathbf{u}_2) \sum_{j=1}^2 \varepsilon_{2jj}(\mathbf{u}_2^*) + 2\mu_2 \sum_{i,j=1}^2 \varepsilon_{2ij}(\mathbf{u}_2)\varepsilon_{2ij}(\mathbf{u}_2^*)\Big) d\Omega$, $\tilde{\ell}_2(\mathbf{u}_2) = \int_{\Gamma_2^\sigma} \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{u}_2\, dS$.

Для розв'язування всіх варіаційних рівнянь методу (21), (25), (23), (24) використовували МСЕ з квадратичними трикутними елементами. Для тіл Ω_1 і Ω_3 брали таку ж сітку, як і у методі (21)–(24). Для розв'язування задачі (25) за висоти покриття $h_2 = b/8$, $b/4$, $b/2$, b застосовували відповідно сітку з 64, 128, 256, 512 скінченними елементами.

Початкові наближення для переміщень, критерій зупинки ітераційного процесу та параметр штрафу вибирали у такому ж вигляді, як і у праці [6].

Параметри ρ^k задавали однаковими на кожній ітерації: $\rho^k = \rho \in [0,5;\, 0,6]$, $\forall k$, а функції ψ_{12}^k і ψ_{23}^k вибирали у вигляді (20). При цьому МДО (21)–(24) досягає відносної точності $\varepsilon_u = 10^{-3}$ для переміщень за 211…261 ітерацію, а МДО (21), (25), (23), (24) – за 217…440 ітерацій залежно від параметрів задачі.

На рис. 3 наведено графіки безрозмірного нормального контактного напруження $\sigma_{12n}^* = \sigma_{12n}/E$ на межі S_{12} відповідно для висоти покриття $h_2 = b$ (рис. 3*a*) і $h_2 = b/8$ (рис. 3*b*). Штрихові лінії на цих рисунках відповідають числовим розв'язкам, отриманим методом (21), (25), (23), (24), а суцільні – МДО (21)–(24). Кривими *1* і *2* позначено напруження для модуля Юнґа покриття $E_2 = 5E$ і $E_2 = E$.

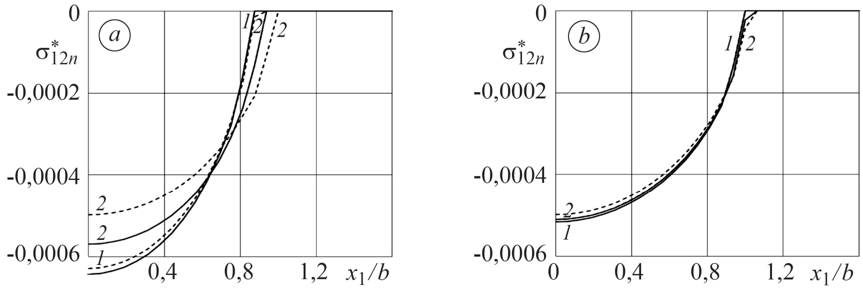

Рис. 3. Нормальне контактне напруження σ^*_{12n} для висоти покриття $h_2 = b$ (*a*), $h_2 = b/8$ (*b*) за модуля Юнґа $E_2 = 5E$, E (криві *1, 2*). Суцільні лінії – числові розв'язки, отримані МДО (21)–(24), штрихові – МДО (21), (25), (23), (24).

Fig. 3. Normal contact stress σ^*_{12n} for height of the coating $h_2 = b$ (*a*), $h_2 = b/8$ (*b*) and Young's modulus $E_2 = 5E$, E (curves *1, 2*). Solid lines – numerical solutions, obtained by the domain decomposition method (DDM) (21)–(24), dashed lines – by DDM (21), (25), (23), (24).

Розподіли, отримані обома методами, більше відрізняються, коли $E_2 = E$, а для жорсткішого покриття ($E_2 = 5E$) вони різняться менше. Зі зменшенням висоти h_2 графіки для обох методів зближуються (рис. 3*b*), оскільки покращується точність розв'язків, отриманих з використанням теорії оболонок. Крім цього, зниження h_2 призводить до зменшення за модулем значень σ^*_{12n} та збільшення ділянки фактичного контакту. Що менша висота покриття, то ближчими є розподіли контактного напруження, отримані для різних жорсткостей покриття.

Наведено графіки нормального міжфазного напруження $\sigma^*_{23n} = \sigma_{23n} / E$ на межі S_{23} відповідно для жорсткості покриття $E_2 = 5E$ (рис. 4*a*) і $E_2 = E$ (рис. 4*b*). Криві *1–5* на цих рисунках відповідають розподілам для $h_2 = b$, $b/2$, $b/4$, $b/8$, $b/16$. Суцільні і штрихові лінії позначають результати, отримані за допомогою МДО (21)–(24) і МДО (21), (25), (23), (24), відповідно.

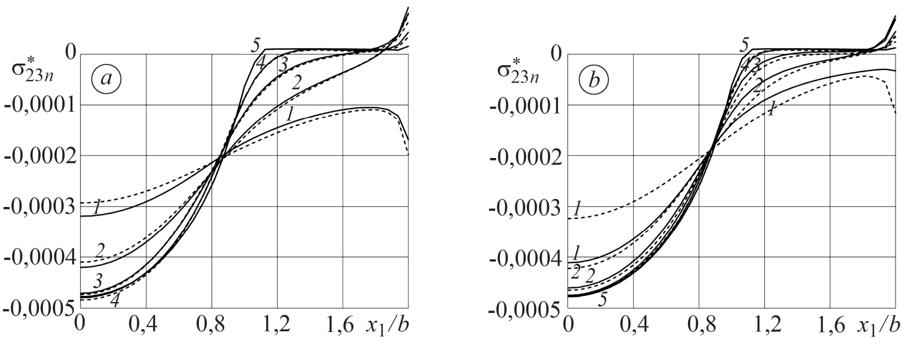

Рис. 4. Нормальне міжфазне напруження σ^*_{23n} для модуля Юнґа $E_2 = 5E$ (*a*), $E_2 = E$ (*b*) за висоти покриття $h_2 = b$, $b/2$, $b/4$, $b/8$, $b/16$ (криві *1–5* відповідно). Суцільні лінії – числові розв'язки, отримані МДО (21)–(24), штрихові – МДО (21), (25), (23), (24).

Fig. 4. Normal interfacial stress σ^*_{23n} for Young's modulus $E_2 = 5E$ (*a*), $E_2 = E$ (*b*) and for the height of the coating $h_2 = b$, $b/2$, $b/4$, $b/8$, $b/16$ (curves *1–5*). Solid lines – numerical solutions, obtained by DDM (21)–(24), dashed lines – by DDM (21), (25), (23), (24).

Зі зменшенням висоти h_2 спостерігаємо зближення результатів, одержаних обома методами, а самі розподіли напружень стають ближчими між собою, коли покриття є жорсткішим, ніж основні тіла, і більше відрізняються один від одного, коли жорсткості тіл і покриття однакові.

Зазначимо, що використання МДО (21)–(24) дозволило одержати задовільні розв'язки для дуже тонких покриттів ($h_2 \le b/16$), які важко отримати алгоритмом (21), (25), (23), (24), оскільки малі висоти вимагають значного згущення двовимірної скінченноелементної сітки.

Крім цього, зі зменшенням висоти h_2 відбувається зближення між собою розподілів напруження σ^*_{23n} для різних жорсткостей (рис. 4) та їх наближення до розподілів контактного напруження σ^*_{12n} (рис. 3). Це пояснюємо тим, що покриття, які мають малу висоту ($h_2 \le b/16$), вже не можуть суттєво впливати на НДС контактуючих тіл.

Також проаналізовано безрозмірне еквівалентне напруження фон Мізеса $\sigma^*_{\rm eq} = \sigma_{\rm eq}/E$ всередині покриття Ω_2, отриманого МДО (21), (25), (23), (24). Показано (рис. 5) лінії рівня напруження $\sigma^*_{\rm eq}$ для модуля Юнґа покриття $E_2 = E/5$ (*a*), $E_2 = E$ (*b*) і $E_2 = 5E$ (*c*). Ізолінії *1–4* відповідають результатам для висоти покриття $h_2 = b$, $b/2$, $b/4$, $b/8$.

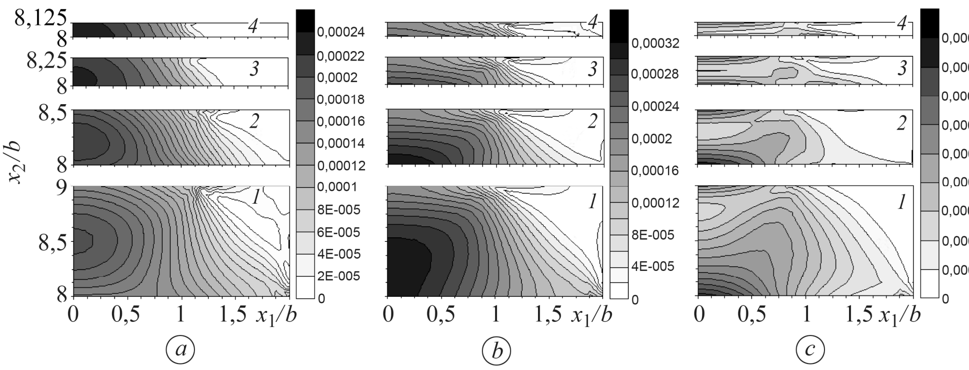

Рис. 5. Еквівалентне напруження $\sigma^*_{\rm eq}$ для модуля Юнґа $E_2 = E/5$ (*a*), $E_2 = E$ (*b*) та $E_2 = 5E$ (*c*) за висоти покриття $h_2 = b$, $b/2$, $b/4$, $b/8$ (ізолінії *1–4* відповідно).

Fig. 5. Equivalent stress $\sigma^*_{\rm eq}$ for Young's modulus $E_2 = E/5$ (*a*), $E_2 = E$ (*b*), and $E_2 = 5E$ (*c*), and for the height of the coating $h_2 = b$, $b/2$, $b/4$, $b/8$ (isolines *1–4*).

Для податливого покриття (рис. 5*a*) максимум цього напруження за висоти $h_2 = b$ досягається поблизу середини лівої межі покриття. Зменшення h_2 призводить до збільшення цього максимуму та до його переміщення у напрямку межі S_{23}. За однакової жорсткості покриття та тіл (рис. 5*b*) максимум напруження $\sigma^*_{\rm eq}$ досягається біля лівої межі покриття, ближче до ділянки S_{23}, ніж для податливого покриття (рис. 5*a*). Максимальне значення цього напруження знижується зі зменшенням висоти h_2 (рис. 5*b*). Для жорсткішого покриття (рис. 5*c*) виникає два локальних максимуми напруження $\sigma^*_{\rm eq}$ вздовж лівого краю: один – біля межі S_{23}, а інший – біля S_{12}. Водночас зменшення h_2 призводить до збільшення локального максимуму σ^{*}_{eq} уздовж межі S_{12} та до зменшення локального максимуму σ^{*}_{eq} уздовж S_{23}. Крім цього, спостерігаємо зростання максимальних значень еквівалентного напруження зі збільшенням модуля Юнґа E_2.

ВИСНОВКИ

Отримано слабке формулювання задачі про контакт двох пружних тіл, одне з яких має несуцільне тонке пружне покриття, описане рівняннями теорії оболонок типу Тимошенка, у вигляді нелінійного варіаційного рівняння. Для розв'язування цього рівняння запропоновано ітераційний алгоритм МДО типу Робіна, який зводить його до розв'язування на кожній ітерації лінійних варіаційних рівнянь теорії пружності для масивних тіл та лінійного варіаційного рівняння теорії оболонок типу Тимошенка для покриття. Розроблено методику числової реалізації отриманого алгоритму з використанням МСЕ.

Досліджено контакт двох прямокутних пружних тіл з несуцільним тонким покриттям. Порівняно розв'язки, отримані зі застосуванням у МДО для моделювання НДС покриття теорії оболонок типу Тимошенка та класичної теорії пружності. Показано, що зі зменшенням висоти покриття відбувається зближення результатів, отриманих за обома моделями, а також розподілів міжфазних напружень для різних жорсткостей покриття та їх наближення до розподілів контактних напружень. Встановлено, що теорію оболонок типу Тимошенка ефективніше застосовувати за малої висоти покриття та за більшої його жорсткості порівняно з жорсткістю основних тіл.

1. *Повышение* износостойкости деталей судовых машин и механизмов покрытиями дискретной структуры. Технологическое обеспечение покрытий дискретной структуры электроконтактным припеканием / Б. А. Ляшенко, Ю. В. Волков, Е. К. Соловых, Л. А. Лопата // Проблеми тертя та зношування. – 2015. – Вип. 2 (67). – С. 110–126.
2. *Соловых Е. К., Ляшенко Б. А., Калиниченко В. И.* Износостойкие несплошные покрытия каркасного типа // Проблеми тертя та зношування. – 2010. – Вип. 54. – С. 31–46.
3. *Gong Z.-Q. and Komvopoulos K.* Effect of surface patterning on contact deformation of elastic-plastic layered media // J. of Tribology. – 2003. – **125**. – P. 16–24.
4. *Gong Z.-Q. and Komvopoulos K.* Mechanical and thermomechanical elastic-plastic contact analysis of layered media with patterned surfaces // J. of Tribology. – 2004. – **126** (1). – P. 9–17.
5. *Ramachandra S. and Ovaert T. C.* Effect of coating geometry on contact stresses in two-dimensional discontinuous coatings // J. of Tribology. – 2000. – **122** (4). – P. 665–671.
6. *Prokopyshyn I. I. and Styahar A. O.* Investigation of contact between elastic bodies one of which has a thin coating connected with the body through a nonlinear Winkler layer by the domain decomposition methods // J. Math. Sci. – 2021. – **258** (4). – P. 477–506. – https://doi.org/10.1007/s10958-021-05562-5.
7. *Прокопишин І. І., Дияк І. І., Прокопишин І. А.* Алгоритми декомпозиції області для осесиметричної задачі про контакт пружних тіл // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2019. – Вип. 17. – С. 68–81.
8. *Пелех Б. Л.* Обобщенная теория оболочек. – Львів: Вищ. шк., 1978. – 156 с.
9. *Кравчук А. С.* Постановка задачи о контакте нескольких деформируемых тел как задачи нелинейного программирования // Прикл. математика и механика. – 1978. – **42**, № 3. – С. 467–474.
10. *Кузьменко В. И.* О вариационном подходе в теории контактных задач для нелинейно-упругих слоистых тел // Прикл. математика и механика. – 1979. – **43**, № 5. – С. 893–901.

Одержано 29.12.2020