УДК 539.431:624.072

ВІДШАРУВАННЯ ПІДСИЛЮВАЛЬНОГО ЕЛЕМЕНТА ПІВПЛОЩИНИ ЗА ЦИКЛІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

М. М. КУНДРАТ

Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне

За умов плоскої задачі досліджено відшарування жорсткого гнучкого підсилення для півплощини за навантаження циклічними напруженнями на безмежності. Відшаруванню передує розвиток локалізованих зон передруйнування (ослабленого контакту), яким можуть відповідати області накопичення пошкоджень, часткового розриву зв'язків тощо. Отримано аналітичні залежності для зміни робочої довжини підсилення залежно від амплітуди навантаження та кількості циклів.

Ключові слова: *підсилення, відшарування, зона передруйнування, робоча довжина, кількість циклів.*

Exfoliation of the flexible rigid reinforcement for the plane problem under cyclic stress loading on infinity is investigated. The development of localized prefracture zones (weakened contact), which may correspond to the area of the damage, partial rupture of bonds, etc. precedes the exfoliation. Analytical dependences for changing the working length of the reinforcement depending on the amplitude of the load and the number of cycles are obtained.

Keywords: *reinforcement, exfoliation, prefracture zone, working length, number of cycles.*

Вступ. Задача розрахунку підсилювальних елементів як одного із поширених засобів ремонту та відновлення працездатності інженерних конструкцій залишається актуальною. Ці елементи одночасно є й потужними концентраторами напружень, які спричиняють нелінійні та пластичні деформації, що суттєво ускладнює розрахунок умов граничної рівноваги системи в цілому. Дослідження контактної задачі для пружного тіла розглянуто у багатьох працях, їх огляд найповніший у монографії [1]. Нижче, використовуючи ідеї праці [2], отримали аналітичний розв'язок задачі відшарування гнучкого підсилення за навантаження циклічними напруженнями.

Формулювання задачі. В умовах плоскої задачі теорії пружності розглядаємо півплощину, до краю якої прикріплено гнучкий підсилювальний елемент завдовжки $2a$, який працює на розтяг (рис. 1*a*). Така система розтягується циклічними напруженнями q ($0 \le q_{\min} \le q \le q_{\max}$) паралельно краю. Вважаємо, що частота зміни навантаження невелика, а інерційні та теплотворні ефекти неістотні.

Згідно з розв'язками задачі, за сталого навантаження найбільша концентрація напружень виникає в околах кінців підсилення, де насамперед і слід чекати появи зон передруйнування. Максимальні дотичні напруження $\tau_{\max}$ також є в околах кінців підсилення вздовж межі його контакту з тілом. Тому вважаємо, що саме тут за певної комбінації значень амплітуди та кількості циклів навантаження буде ковзне відшарування (втрата зв'язку), яке просуватиметься вздовж межі поділу матеріалів від кожного краю до центральної частини. Довжину підсилення без відшарованих на кінцях фрагментів позначаємо через $2a_{wr}$ і називаємо робочою

Контактна особа: М. М. КУНДРАТ, e-mail: kundrat@i.ua

довжиною (рис. 1*b*). Коефіцієнт тертя на відшарованій частині $L_2 \approx a_{wr} < |x| \le a$ приймаємо рівним нулю. Відшаруванню передує розвиток локалізованих зон передруйнування, які моделюємо додатковими розрізами $L_1 \approx c_{wr} \le |x| < a_{wr}$ з дотичними напруженнями τ^*_{sf} на краях:

$$\sigma_{xy} = \tau^*_{sf}\,\mathrm{sign}(x) \quad (x \in L_1).$$

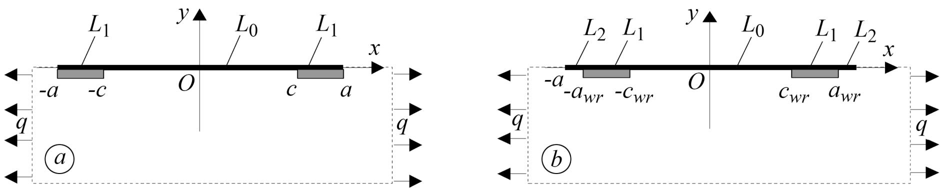

Рис. 1. Схема відшарування підсилення.

Fig. 1. Scheme of reinforcement exfoliation.

З просуванням ділянки розшарування рухається також і зона передруйнування. Величину τ^*_{sf} вважаємо усередненим значенням напружень у зоні передруйнування з урахуванням циклічного зміцнення чи знеміцнення матеріалу. На ділянці $|x| \le c_{wr}$ зберігається ідеальний контакт, тому поздовжні деформації на ній рівні нулю. Необхідно знайти аналітичні залежності робочої довжини підсилення $a_{wr} = a_{wr}(n, q_{\max}, q_{\min}, \tau^*_{sf}, G, \nu)$ від кількості циклів та амплітуди навантаження.

Розв'язування задачі. Щоб побудувати рівняння відшарування, використаємо енергетичний критерій, який передбачає існування критичного значення енергії W_f, необхідної для того, щоб робоча довжина підсилення зменшилася на одиницю довжини. Тоді для зменшення робочої довжини a_{wr} на мале значення Δa_{wr} дисипація енергії W повинна досягнути значення W_f: $W = W_f$, де $W_f = \eta_1 \gamma^*_{\tau f} \Delta a_{wr}$; $\gamma^*_{\tau f} = \tau^*_{sf} \delta_{2cf}$ – густина енергії розшарування; η_1 – поправковий коефіцієнт; δ_{2cf} – критичний зсув у зоні передруйнування.

Приймаємо, що робоча довжина a_{wr} і розмір зони передруйнування $d_f = a_{wr} - c_{wr}$ – функції навантаження q. Тоді зі збільшенням навантаження на мале значення Δq і просування області відшарування на Δa_{wr} буде справедливе співвідношення

$$W = 2 \int\limits_{a_{wr} - \Delta a_{wr}}^{a_{wr} - d_f - \Delta a_{wr}} \sigma_{xy}(x) \Big[u\big(x, a_{wr}(q + \Delta q), c_{wr}(q + \Delta q)\big) - u\big(x, a_{wr}(q), c_{wr}(q)\big) \Big] dx.$$

Нехтуючи доданками порядку $(\Delta a_{wr})^2$, знаходимо, що

$$\gamma^*_{\tau f} \eta_1 = -2\tau^*_{sf} \frac{d}{da_{wr}} \int\limits_{a_{wr} - d_f}^{a_{wr}} x \frac{\partial u(x, a_{wr}, q)}{\partial x} dx - 2\tau^*_{sf} \frac{du(a_{wr}, a_{wr}, q)}{da_{wr}}. \tag{1}$$

Звідси залежність між робочою довжиною підсилення, навантаженням, пружними і міцнісними характеристиками описуємо рівнянням:

$$\frac{da_{wr}}{dq} = f_1\left(a_{wr}, q, \tau^*_{sf}, \delta_{2cf}, G, \nu\right). \tag{2}$$

Приймаємо, що відшарування відбувається під час кожного періоду навантаження, а за розвантаження робоча довжина підсилення не змінюється. Рівняння (2) описує відшарування за період одного циклу, тому, інтегруючи його від мінімального $q_{\min}$ до максимального $q_{\max}$ навантаження та прийнявши параметр a_{wr} сталим упродовж циклу, знаходимо зменшення робочої довжини на

$$\delta a_{wr} = \int\limits_{q_{\min}}^{q_{\max}} f_1\left(a_{wr}, q, \tau_{sf}^*, \delta_{2cf}, G, \nu\right) dq \equiv F_1\left(a_{wr}, q_{\min}, q_{\max}, \tau_{sf}^*, \delta_{2cf}, G, \nu\right).$$

Звідси швидкість відшарування описуємо таким диференціальним рівнянням:

$$\frac{da_{wr}}{dn} = F_1\left(a_{wr}, q_{\min}, q_{\max}, \tau_{sf}^*, \gamma_{\tau f}^*, G, \nu\right),$$

де n – кількість циклів навантаження. За достатньо малих амплітуд навантаження незалежно від кількості циклів відшарування може не відбуватися, що пов'язано з мікронеоднорідністю реального зв'язку вздовж межі поділу матеріалів чи з властивостями її пристосовуваності. Умову непоширення відшарування за безмежно великої кількості циклів подамо у вигляді

$$q_{\max} \le q_f\, f\left(a_{wr}, q_{\min}/q_{\max}\right),$$

де $f(a_{wr}, 0) = 1$. Функцію f та навантаження q_f визначаємо експериментально.

Для знаходження функцій f_1 та F_1 використаємо розв'язок [3] відповідної задачі за сталого навантаження $\sigma_{xx}^{\infty} = q$. Тоді необхідні переміщення в зонах передруйнування ($x \in L_1$)

$$u(x) = \frac{(\kappa+1)\tau_{sf}^*}{4\pi G}\left[a_{wr}\Gamma_2\left(x, a_{wr}, c_{wr}\right) - x\Gamma_1\left(x, a_{wr}, c_{wr}\right)\right], \tag{3}$$

$$\Gamma_1\left(x, a_{wr}, c_{wr}\right) = \left[\zeta^-(x)\big/\zeta^+(x)\right],\ \zeta^{\pm}(x) = a_{wr}\sqrt{x^2 - c_{wr}^2} \pm x\sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2},$$

$$\Gamma_2\left(x, a_{wr}, c_{wr}\right) = \ln\left[\eta^-(x)\big/\eta^+(x)\right],\ \eta^{\pm}(x) = \sqrt{a_{wr}^2 - c_{wr}^2} \pm \sqrt{x^2 - c_{wr}^2},$$

де $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ – для плоского напруженого стану, $\kappa = 3 - 4\nu$ – в умовах плоскої деформації; G, ν – модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона, відповідно. При цьому зв'язок між силовими та геометричними параметрами

$$c_{wr} = a_{wr}/\mathrm{ch}H,\ H = \pi q\Big/\left(4\tau_{sf}^*\right). \tag{4}$$

З урахуванням результатів (3), (4) формула (1) набуває вигляду

$$\gamma_{\tau f}^* = \frac{(\kappa+1){\tau_{sf}^*}^2 a_{wr}}{4\pi G\eta_1}\left[2\left(H\cdot\mathrm{th}H - \ln\left(\mathrm{ch}H\right)\right) + a_{wr}\left(\frac{H}{\mathrm{ch}^2 H} - \mathrm{th}H\right)\frac{dH}{da_{wr}}\right]. \tag{5}$$

Для подальшого числового аналізу зручно ввести безрозмірну робочу довжину підсилення

$$\lambda_{wr} = (\kappa+1)\eta_1{\tau_{sf}^*}^2 a_{wr}\Big/\left(2\pi G\gamma_{\tau f}^*\right). \tag{6}$$

Враховуючи результати (4)–(6), залежність між знерозміреними навантаженням H та довжиною λ_{wr} подамо у вигляді диференціального рівняння першого порядку

$$\frac{dH}{d\lambda_{wr}} = \frac{2}{f(H, \lambda_{wr})},$$

$$f(H, \lambda_{wr}) = \frac{1 + \lambda_{wr}\left(\ln(\mathrm{ch}H) - H\mathrm{th}H\right)}{\lambda_{wr}^2\left(H/\mathrm{ch}^2 H - \mathrm{th}H\right)}.$$

Звідси, приймаючи λ_{wr} сталою впродовж одного циклу, отримуємо швидкість відшарування у вигляді

$$\frac{d\lambda_{wr}}{dn} = \frac{1}{2}\int_{H_{\min}}^{H_{\max}} \frac{dH}{f(H, \lambda_{wr})} \equiv F_2(H_{\max}, H_{\min}, \lambda_{wr}),$$

де $H_{\min} = \pi q_{\min}/(4\tau_{sf}^*)$, $H_{\max} = \pi q_{\max}/(4\tau_{sf}^*)$. Проінтегрувавши, знаходимо зв'язок між кількістю циклів навантаження та робочою довжиною підсилення

$$n = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \frac{d\lambda_{wr}}{F_2(H_{\max}, H_{\min}, \lambda_{wr})}, \qquad (7)$$

де λ_0, λ_1 – початкове (при $n = 0$) та кінцеве значення довжини робочої частини λ_{wr} підсилення.

Зі зменшенням початкової λ_0 робочої довжини підсилення швидкість його відшарування також знижується (рис. 2). При цьому повне відшарування не відбувається, за умов задачі підсилення в середній частині залишається зв'язаним з матрицею. Швидкість відшарування істотно залежить від максимального навантаження за цикл.

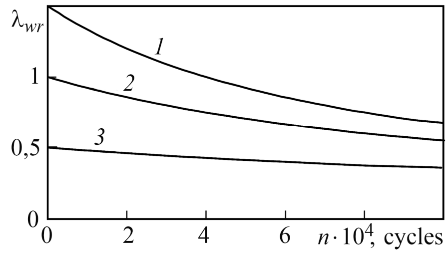

Рис. 2. Робоча довжина підсилення залежно від кількості циклів n за формулою (7): $H_{\min} = 0$, $H_{\max} = 0{,}1$, $\kappa = 2{,}2$, $\eta_1 = 1$; *1* – $\lambda_0 = 1{,}5$, *2* – $\lambda_0 = 1$, *3* – $\lambda_0 = 0{,}5$.

Fig. 2. Working lengths of reinforcement depending on the number of cycles n according to formula (7): $H_{\min} = 0$, $H_{\max} = 0.1$, $\kappa = 2.2$, $\eta_1 = 1$; *1* – $\lambda_0 = 1.5$, *2* – $\lambda_0 = 1$, *3* – $\lambda_0 = 0.5$.

ВИСНОВКИ

Запропонована математична модель відшарування гнучкого жорсткого підсилення від основного матеріалу матриці. Для заданого навантаження за цикл та наперед відомої кількості циклів за формулою (7) завжди можна підібрати довжину підсилювального елемента так, щоб його відшарування не перевищувало заданого наперед значення (чи не відбувалося зовсім). Швидкість відшарування істотно залежить від початкової робочої довжини підсилення (для довшої вона більша) та максимального навантаження за цикл, що і слід було очікувати. Підсилювальний елемент в середній частині завжди за умов задачі залишається зв'язаним з матрицею.

1. *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: ДВЦ НТШ, 2007. – 716 с.
2. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
3. *Kundrat M. M. and Delyavskii M. V.* Stresses in a half plane weakened by a crack and reinforced with a patch // Materials Science. – 2000. – **36**, № 6. – P. 817–824.

Одержано 17.02.2021