

УДК 539.3

ЛОКАЛЬНЕ ФРИКЦІЙНЕ ЗНОШУВАННЯ ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ З ВИСТУПОМ

О. П. КОЗАЧОК

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Досліджено контакт двох пружних півплощин (плоска деформація), поверхня одного з яких – пологий симетричний виступ циліндричної форми, за локального зношування на основі моделі фрикційно-втомного руйнування. Сформульовану контактну задачу зведено до сингулярного інтегро-диференціального рівняння з ядром Коші для товщини зношеного матеріалу та рівнянь для визначення невідомих ділянок зношування. Проаналізовано зміну форми виступу та контактного тиску після зношування.

Ключові слова: *зносоконтакт, виступ, локальне зношування, сингулярне інтегро-диференціальне рівняння.*

The wear-contact of two elastic half-planes (plain deformation), the surface of one of which has a gentle symmetrical protrusion of a cylindrical shape under local wear on the basis of the model of frictional-fatigue fracture is investigated. The formulated contact problem is reduced to a singular integro-differential equation with a Cauchy nucleus with respect to the thickness of the worn material and equations for determining the unknown areas of wear. The shape of the protrusion and contact pressure at the beginning and after wear are analyzed.

Keywords: *wear-contact, protrusion, local wear, singular integro-differential equation.*

Вступ. Для поліпшення функціональних і трибологічних властивостей рухомих з'єднань сьогодні все частіше застосовують технології поверхневого оброблення і модифікування, що формують регулярну поверхневу структуру тіл. Тому необхідно розробляти методи дослідження фрикційної контактної взаємодії деформованих тіл з періодично змінними по поверхні фізико-механічними, триботехнічними і геометричними характеристиками, щоб теоретично обґрунтувати механічні аспекти створення з'єднань із прогнозованою контактною поведінкою і забезпечити контактну жорсткість, зносотривкість та міцність шляхом наведення оптимальної регулярної структури поверхневих шарів. Міжконтактне середовище у просвітах між контактуючими мікровиступами тіл з регулярним рельєфом, призводячи до перерозподілу контактного тиску, може суттєво впливати на фактичну площу контакту і зношування. У літературі [1–4] вивчено лише безфрикційний контакт хвилястих чи з періодичною системою виїмок тіл за наявності заповнювача між ними.

В останні десятиліття інтенсивно розвиваються методи розв'язання зносоконтактних задач [5–12]. Формулюючи їх, передбачають, що стирається вся поверхня контакту. Водночас у реальних умовах експлуатації вузлів машин і механізмів зношування починається, коли фрикційні параметри досягнуть порогових значень. Запропоновано критеріальні співвідношення, зокрема, модель фрикційного втомного руйнування [5, 13], термомеханічний критерій зношування [14]. Щоб розв'язати зносоконтактні задачі теорії пружності на основі цих критеріїв,

необхідно врахувати, що зношується лише частина ділянки фрикційного контакту. Нижче досліджено зносоконтакт двох тіл, на одному з яких є поодинокий виступ, частина якого зношується.

Формулювання задачі. Розглянемо два пружні ізотропні півпростори з однаковими механічними характеристиками. Поверхня нижнього плоска, а верхній має вздовж нескінченної смуги завширшки $2c$ симетричний циліндричний виступ (рис. 1). Вважаємо, що максимальна висота виступу A мала проти його основи ($A \ll c$). На нескінченності до півпросторів прикладено рівномірно розподілене навантаження P^∞ , за якого відбувається повне налягання поверхонь без просвітів між ними. Одне з тіл нерухоме, а інше рухається з постійною швидкістю V у напрямі твірної виступу (рис. 2). Сили тертя τ на поверхні спряження підпорядковані закону Амонтона: $\tau = \tau_{yz} = fP$, де f – коефіцієнт тертя, P – контактний тиск. Досліджуватимемо зношування спряжених поверхонь, керуючись моделлю фрикційно-втомного руйнування, згідно з якою стирання розпочинається на тих ділянках, де питома сила тертя перевищує порогове значення τ_0 . Вважаємо, що в початковий момент часу $t=0$ умова $\tau > \tau_0$ виконується на деякій ділянці $(-a; a)$ під виступом ($a < c$), де контактний тиск найбільший.

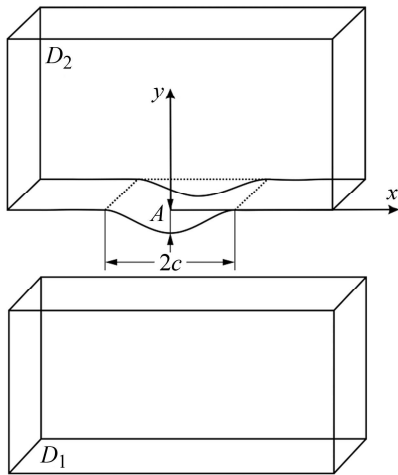


Рис. 1. Fig. 1.

Рис. 1. Тіла перед навантаженням.

Fig. 1. Bodies prior to loading.

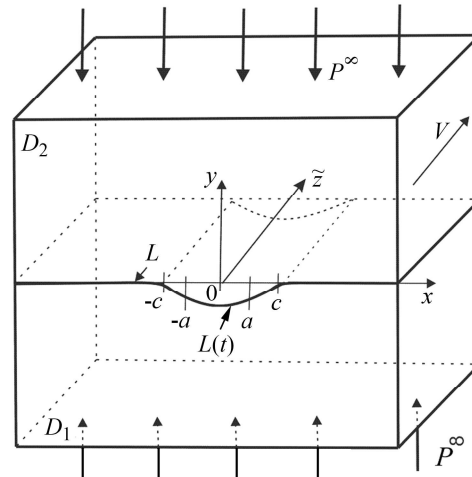


Рис. 2. Fig. 2.

Рис. 2. Контакт тіл.

Fig. 2. Contact between solids.

Ділянка локального зношування $(-a; a)$ розширюватиметься в часі $L(t) = (-a(t); a(t))$ внаслідок зміни геометрії тіл.

Швидкість зношування описуватимемо законом [5]

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = BV [fP(x, t) - \tau_0], \quad |x| \leq a(t), \quad (1)$$

де $h(x, t)$ – товщина зношеного матеріалу; B – стала.

Контактно-крайові умови сформульованої задачі мають вигляд

$$\begin{aligned}\sigma_{yy}^+ &= \sigma_{yy}^-, \quad \tau_{xy}^- = \tau_{xy}^+ = 0, \quad x \in L; \\ v^+ + r(x) &= v^-, \quad x \in L \setminus L(t); \\ v^+ + r(x) + h(x,t) &= v^-, \quad x \in L(t); \\ \sigma_{yy} &= -P^\infty, \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \tau_{xy} = 0.\end{aligned}$$

Тут $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ – компоненти тензора напружень; v – переміщення вздовж осі Oy ; $r(x)$ – функція форми виступу ($r(x) \ll c, r(-x) = r(x), r(\pm c) = 0, r'(\pm c) = 0$); знаки “+” і “-” вказують на граничні значення функції на межі поділу контактуючих тіл.

Розв’язання задачі. Використовуючи метод комплексних потенціалів та модифікований метод функцій міжконтактних просвітів [15–17], виразимо напруження і переміщення через початкову форму виступу $r(x)$ і товщину зношеного матеріалу $h(x,t)$:

$$\begin{aligned}\sigma_{yy} - i\tau_{xy} &= \Phi_n(z) - \Phi_n(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_n'(z)} - P^\infty, \quad n = 1, 2; \\ 2G(u' + iv') &= \kappa\Phi_n(z) + \Phi_n(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_n'(z)} + \frac{3 - \kappa}{4}P^\infty, \\ \Phi_n(z) &= \frac{(-1)^{3-n}}{\pi K} \int_{-a(t)}^{a(t)} \frac{h'_s(s,t)}{s-z} ds + \int_{-c}^c \frac{r'(s)}{s-z} ds, \quad z \in D_n,\end{aligned}\quad (2)$$

де $z = x + iy$ – комплексна змінна; $\kappa = 3 - 4\nu$; G – модуль зсуву; ν – коефіцієнт Пуассона; $K = (\kappa + 1)/G$; $r'(s) = dr(s)/ds$; $h'_s(s,t) = \partial h(s,t)/\partial s$, s – координата.

За формулами (2) для контактної тиску поверхонь $P(x,t) = -\sigma_{yy}^\pm(x,t)$ отримаємо:

$$P(x,t) = \frac{2}{\pi K} \left(\int_{-a(t)}^{a(t)} \frac{h'_s(s,t)}{s-x} ds + \int_{-c}^c \frac{r'(s)}{s-x} ds \right) + P^\infty. \quad (3)$$

Зауважимо, що функція товщини зношеного матеріалу $h(x,t)$ та ділянка зношення $a(t)$ у співвідношеннях (2), (3) заздалегідь невідомі. Підставляючи контактний тиск (3) у закон зношування (1), для визначення функції $h(x,t)$ отримаємо сингулярне інтегро-диференціальне рівняння (СІДР)

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} - \frac{2BfV}{\pi K} \int_{-a(t)}^{a(t)} \frac{h'_s(s,t)}{s-x} ds = \frac{2BfV}{\pi K} \int_{-c}^c \frac{r'(s)}{s-x} ds + BfV(P^\infty - \tau_0). \quad (4)$$

Функція $h(x,t)$ задовольняє початкову умову

$$h(x,0) = 0, \quad x \in L, \quad (5)$$

оскільки при $t = 0$ зношування відсутнє. Вважаємо, що під час зношування виступ змінює свою форму неперервно, залишаючись гладким. Тому функція $h(x,t)$ у кожен момент часу на кінцях ділянки стирання $L(t)$ задовольнятиме умови

$$h(\pm a(t), t) = 0, \quad t > 0, \quad (6)$$

$$h'(a(t), t) = 0, \quad t > 0. \quad (7)$$

Також приймаємо, що після припрацювання (якщо $t \rightarrow \infty$) контактний тиск на всій ділянці $L(t)$ стає рівним τ_0/f і зношування зупиняється, тобто $\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} \rightarrow 0$, якщо $t \rightarrow \infty$. Враховуючи це і здійснивши в СІДР (4) граничний перехід при $t \rightarrow \infty$, дістанемо рівняння для визначення товщини зношеного матеріалу $h(x, \infty)$

$$\frac{2}{\pi K} \int_{-a(\infty)}^{a(\infty)} \frac{h'_s(s, t)}{s-x} ds = -\frac{2}{\pi K} \int_{-c}^c \frac{r'(s)}{s-x} ds - P^\infty + \frac{\tau_0}{f} \quad (8)$$

з виконанням умов (6), (7) для $a(\infty) = a_\infty$.

Його розв'язок шукатимемо за формулою [18]

$$h'(x) = -\frac{K\sqrt{\alpha^2 - x^2}}{2\pi} \int_{-a_\infty}^{a_\infty} \frac{F(\eta) d\eta}{\sqrt{a_\infty^2 - \eta^2} (\eta - x)}, \quad (9)$$

де $F(x) = -\frac{2}{\pi K} \int_{-c}^c \frac{r'(s)}{s-x} ds - P^\infty + \frac{\tau_0}{f}$, який існує за виконання додаткової умови для правої його частини [17]

$$\int_{-a_\infty}^{a_\infty} \frac{F(\eta) d\eta}{\sqrt{a_\infty^2 - \eta^2}} = 0, \quad (10)$$

що визначає кінцеву півширину ділянки зношування a_∞ .

Розглянемо виступ, форму якого описує функція

$$r(x) = -A \left(1 - \frac{x^2}{c^2} \right)^{5/2}, \quad |x| \leq c.$$

Врахувавши форму виступу та умову (5), отримаємо контактний тиск на початку взаємодії тіл:

$$P(x, 0) = \begin{cases} \frac{10A}{Kc^5} \left[x^4 - \frac{3}{2}c^2x^2 + \frac{3}{8}c^4 \right] + P^\infty, & x \in (-c; c) \\ \frac{10A}{Kc^5} \left[|x|(x^2 - c^2)^{3/2} + x^4 - \frac{3}{2}c^2x^2 + \frac{3}{8}c^4 \right] + P^\infty, & x \notin (-c; c). \end{cases}$$

Рівняння для півширини початкової ділянки зношування a_0 матиме вигляд

$$\frac{10A}{Kc} \left(-\frac{a_0^4}{c^4} + \frac{3a_0^2}{2c^2} - \frac{3}{8} \right) = \frac{4A}{15cK} (\tau_0 - P^\infty),$$

Проінтегрувавши вираз (9) за виконання умови (6), одержимо товщину зношеного матеріалу та з умови (10) – кінцеву ділянку зношування:

$$h(x, \infty) = \frac{A \left(1 - \sqrt{\frac{4A}{15cK} (\tau_0 - P^\infty)} \right)^{5/2}}{2a_\infty^5} (a_\infty^2 - x^2)^{3/2} \times$$

$$\times \left(3a_\infty^2 - \frac{5a_\infty^2}{1 - \sqrt{\frac{4A}{15cK} (\tau_0 - P^\infty)}} + 2x^2 \right), \quad |x| \leq a_\infty, \quad (11)$$

$$a_\infty = \sqrt{1 + \sqrt{\frac{4A}{15cK} (\tau_0 - P^\infty)}}.$$

Підставивши вираз (11) у формулу (3), знайдемо тиск після припрацювання:

$$P(x, \infty) = P(x, 0) -$$

$$\begin{cases} \frac{10A \left(1 - \frac{4A}{15cK} (\tau_0 - P^\infty) \right)}{Kc} \left(\frac{x^4}{a_\infty^2} - \frac{3x^2}{2a_\infty^2} + \frac{3}{8} \right), & x \in (-a_\infty; a_\infty) \\ \frac{10A \left(1 - \frac{4A}{15cK} (\tau_0 - P^\infty) \right)}{Kc} \left(\left| \frac{x}{a_\infty} \right| \left(\frac{x^2}{a_\infty^2} - 1 \right) \right)^2 + \frac{x^4}{a_\infty^2} - \frac{3x^2}{2a_\infty^2} + \frac{3}{8} + P^\infty, & x \notin (-a_\infty; a_\infty). \end{cases}$$

Числові результати. Всі обчислення здійснювали для безрозмірних величин: координати $\tilde{x} = x/c$; максимальної висоти виступу $\tilde{A} = A/c$; зовнішнього навантаження на нескінченності $\tilde{P}^\infty = KP^\infty$; порогового значення питомої сили тертя $\tilde{\tau}_0 = \frac{K\tau_0}{f}$; півширини зношеної ділянки виступу $\tilde{a} = a/c$; функції

$\tilde{H} = \left| \frac{r(x) - h(x)}{c} \right|$; контактного тиску $\tilde{P}(\tilde{x}, t) = KP(x, t)$. Розраховували для виступу висотою $\tilde{A} = 0,001$. Виявили (рис. 3), що зі збільшенням зовнішнього навантаження розмір ділянок зношування зростає.

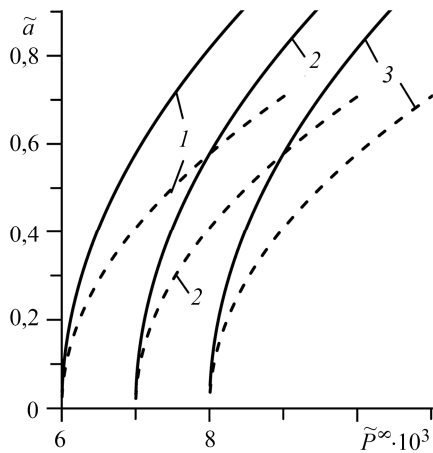


Рис. 3. Залежність початкової \tilde{a} (штрихові криві) і кінцевої \tilde{a}_∞ (суцільні) ділянок зношування виступу від зовнішнього навантаження \tilde{P}^∞ за різної питомої сили тертя: 1 – $\tilde{\tau}_0 = 0,009$; 2 – 0,01; 3 – 0,011.

Fig. 3. Dependence of the initial \tilde{a} (dashed curves) and final \tilde{a}_∞ (solid) section of wear of the protrusion on external load \tilde{P}^∞ at different specific friction forces: 1 – $\tilde{\tau}_0 = 0,009$; 2 – 0,01; 3 – 0,011.

Площа між штриховою і суцільними кривими відповідає зношеній частині виступу (рис. 4а). Щоб більше зовнішнє навантаження, то більша товщина зношеного матеріалу. Горизонтальна ділянка на суцільній кривій відповідає рівномірному тиску на ділянці припрацювання після зношування (рис. 4б). Точки перетину штрихової кривої з горизонтальною ділянкою вказують на контактну зону, звідки розпочнеться зношування. Контактний тиск після припрацювання зі збільшенням зовнішнього навантаження стає рівномірнішим, тобто зменшується перепад між максимальним і мінімальним його значеннями. Гострий пік на кінцях виступу відсутній і максимальний контактний тиск зсувається лівіше від його півширини ($\tilde{x} = 1$).

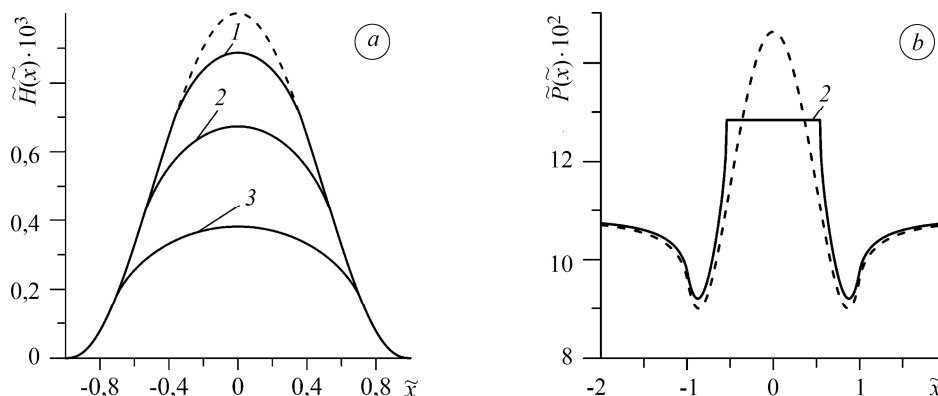


Рис. 4. Форма виступу $\tilde{H}(\tilde{x})$ (а) та розподіл контактної тиску $\tilde{P}(\tilde{x})$ (б) на початку (штрихові криві) і після зношування (суцільні) за $\tilde{\tau}_0 = 0,009$ та різних зовнішніх навантажень: 1 – $\tilde{P}^\infty = 0,006$; 2 – 0,007; 3 – 0,008.

Fig. 4. Shape of the protrusion $\tilde{H}(\tilde{x})$ (a) and the contact pressure distribution $\tilde{P}(\tilde{x})$ (b) at the zero time (dashed curves) and after wear (solid curves) for $\tilde{\tau}_0 = 0,009$ and different external load: 1 – $\tilde{P}^\infty = 0,006$; 2 – 0,007; 3 – 0,008.

ВИСНОВКИ

Контактну взаємодію двох пружних ізотропних півпросторів за плоскої деформації, поверхня одного з яких має пологий симетричний виступ циліндричної форми, досліджено за локального зношування. Використано модель фрикційно-втомного руйнування, згідно з якою стирання розпочинається на тих ділянках, де питома сила тертя перевищує деяке порогове значення. Сформульовану контактну задачу зведено до сингулярного інтегро-диференціального рівняння з ядром Коші для товщини зношеного матеріалу та рівнянь для визначення невідомих ділянок зношування. Розв'язок СІР побудовано в замкнутому вигляді та проаналізовано форму виступу, а також контактний тиск на початку та після зношування. Щоб більше зовнішнє навантаження, то більші ділянки початкового і кінцевого зношування та товщина зношеного матеріалу. Контактний тиск після припрацювання з підвищенням зовнішнього навантаження стає рівномірнішим уздовж ділянки контакту, тобто зменшується перепад між максимальним і мінімальним тисками.

1. Rabinovich Y. I., Esayanur M. S., and Moudgil B. M. Capillary forces between two spheres with a fixed volume liquid bridge: theory and experiment // *Langmuir*. – 2005. – **21**, № 24. – P. 10992–10997.
2. Кузнецов Е. А. О контакте шероховатых тел при наличии сжимаемой смазки // *Прикл. механика*. – 1988. – **24**, № 12. – С. 85–94.

3. *Kozachok O. P.* Influence of partial filling of the gaps with compressible liquid on the contact of elastic bodies with wavy surfaces // *Materials Science*. – 2020. – **56**, № 3. – P. 310–318.
4. *Kozachok O. P.* Contact of an elastic body with a rigid base containing grooves partially filled with nonwetting liquid // *Materials Science*. – 2020. – **55**, № 5. – P. 765–773.
5. *Андрейкив А. Е., Чернец М. В.* Оценка контактного взаимодействия трущихся деталей машин. – К.: Наук. думка, 1991. – 160 с.
6. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
7. *Грилицький Д. В.* Термопружні контактні задачі в трибології. – К.: ІЗМН, 1996. – 204 с.
8. *Пелех Б. Л., Максимук А. В., Коровайчук И. М.* Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. – К.: Наук. думка, 1988. – 280 с.
9. *Goryacheva I. G.* Contact mechanics in tribology. – Dordrecht: Kluwer, 1998. – 346 p.
10. *Goryacheva I. G. and Martynyak R. M.* Contact problems for textured surfaces involving frictional effects // *Proc. IMechE, Part J: J. Eng. Tribology*. – 2014. – **228**, № 7. – P. 707–716.
11. *Марчук В. Є., Ляшенко Б. А., Калініченко В. І.* Моделювання напружено-деформованого стану дискретної поверхні // *Проблеми тертя та зношування*. – 2008. – **2**, вип. 49. – С. 25–30.
12. *Ляшенко Б. А., Новиков Н. В., Клименко С. А.* Дискретное модифицирование поверхностного слоя деталей машин и инструментов. – К.: Ин-т сверхтвердых материалов им. В. Н. Бакуля, 2017. – 264 с.
13. *Andreikiv A. E., Panasyuk V. V., and Chernets M. V.* A theory of wear of materials in dry friction // *Soviet Materials Science*. – 1981. – **17**, № 2. – P. 153–158.
14. *Евтушенко А. А., Уханская О. М.* Термомеханический критерий изнашивания // *Трение и износ*. – 1994. – **15**, № 3. – С. 379–388.
15. *Мартиняк Р. М.* Метод функцій міжконтактних зазорів у задачах локального порушення контакту пружних півпросторів // *Мат. методи і фіз.-мех. поля*. – 2000. – **43**, № 1. – С. 102–108.
16. *Shvets R. M., Martynyak R. M., and Kryshchafovych A. A.* Discontinuous contact of an anisotropic half-plane and a rigid base with disturbed surface // *Int. J. Eng. Sci.* – 1996. – **34**, № 2. – P. 183–200.
17. *Kozachok O. P. and Martynyak R. M.* Contact problem for wavy surfaces in the presence of an incompressible liquid and a gas in interface gaps // *Math. and Mech. of Solids*. – 2019. – **24**, № 11. – P. 3381–3393.
18. *Мухелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 514 с.

Одержано 14.06.2021