

УДК 539.3

УСТАЛЕНІ КОЛИВАННЯ ПРУЖНОГО БІМАТЕРІАЛУ З ТОНКИМ ПОДАТЛИВИМ ПРОШАРКОМ ТА КРУГОВОЮ ТРІЩИНОЮ

В. З. СТАНКЕВИЧ¹, В. М. БОЙКО², Ю. В. ТЕРЕЦЬАК³

¹ Львівський національний університет ім. Івана Франка;

² Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів;

³ Національний університет "Львівська політехніка"

Розв'язано задачу про усталені в часі коливання пружного біматеріалу з двох півпросторів, спряжених тонким податливим прошарком, та з круговою тріщиною закруту. Пружний прошарок змодельовано інтерфейсною фізичною площиною зі заданими на ній пружинними крайовими умовами. Для розв'язування задачі використано метод граничних інтегральних рівнянь. У низькочастотній області коливань встановлено вплив фізичних, геометричних параметрів біматеріалу та прошарку на динамічні коефіцієнти інтенсивності напружень в околі контуру тріщини.

Ключові слова: біматеріал, тонкий податливий прошарок, тріщина, усталені коливання, метод граничних інтегральних рівнянь.

The problem of the steady-state vibrations of an elastic bimaterial consisting of two half-spaces conjugated by a thin soft layer and with a circular torsion crack is solved. The elastic layer is modeled by an interface physical plane with given spring boundary conditions. To solve the problem, the method of boundary integral equation is used. In the low-frequency region of vibrations, the influence of the physical and geometric parameters of the biomaterial and the interlayer on the values of dynamic stress intensity factors in the vicinity of the crack contour is shown.

Keywords: bimetals, thin compliant layer, crack, harmonic oscillations, boundary integral method equations.

Вступ. Часто під час досліджень напружено-деформованого стану (НДС) кусково-однорідних тіл з тріщинами в умовах динамічних навантажень потрібно враховувати тонкий пружний прошарок (пошкоджений інтерфейс, клейове з'єднання тощо) на межі спряження різних матеріалів. Для розв'язування таких задач у точній поставі необхідні громіздкі математичні викладки з урахуванням реальної геометрії прошарку та задоволенням умов контакту на його інтерфейсних поверхнях [1, 2]. Щоб уникнути цього, запропоновано [3–6] використовувати "модель пружинного контакту" для опису динамічного впливу тонкого прошарку на хвильові поля в кусково-однорідних тілах за припущення малості його товщини проти довжини згенерованих пружних хвиль, що справедливо для низькочастотного спектра навантаження. Вплив тонкого прошарку враховано пружинними крайовими умовами (ПКУ), які встановлюють залежності міжфазних напружень від стрибків переміщень на поверхнях суміжних півпросторів [7–12]. Модель застосовували для дослідження параметрів хвильового поля переміщень, але інформації про вплив проміжного шару на перерозподіл напружень у тілі з тріщиною недостатньо.

Нижче розглянуто задачу про взаємодію тріщини з тонким проміжним прошарком у пружному біматеріалі під дією усталених крутих навантажень. Для її

Контактна особа: В. З. СТАНКЕВИЧ, e-mail: stan_volodja@yahoo.com

розв'язання використано метод граничних інтегральних рівнянь (ГІР), який ефективний для вивчення динамічних задач теорії тріщин [1, 2].

Формулювання задачі. Розглянемо пружний композит, який складається з двох ізотропних півпросторів A і B , спряжених між собою тонким пружним прошарком завтовшки h (рис. 1а). Матеріали півпросторів володіють пружними параметрами $\rho_D, \nu_D, G_D, D = A, B$, а прошарку – $\rho_0, \nu_0, G_0 \ll G_D$.

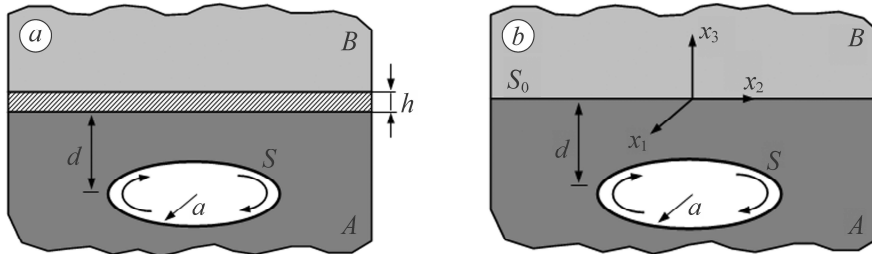


Рис. 1. Схема задачі про тріщину закруту у біматеріалі з тонким пружним прошарком.

Fig. 1. Scheme of the problem on torsion crack in a bimaterial with a thin elastic layer.

Півпростір A містить плоску тріщину, яка займає кругову область S радіусом a , розташовану на відстані d паралельно до прошарку. Протилежні поверхні S^\pm тріщини зазнають дії самозрівноважених усталених у часі t з частотою ω крутних зусиль:

$$N_j^+(\mathbf{x}, t) = -N_j^-(\mathbf{x}, t) = (-1)^{j+1} (x_{(3-j)}/a) N_0 \exp(-i\omega t), \quad j=1, 2,$$

де $N_0 = \text{const}$ – амплітудні значення прикладених навантажень.

Задачу про дослідження НДС композиту звели до розв'язування диференціальних рівнянь Гельмгольца для амплітуд зсувних переміщень u_j^D ($j=1, 2$) [1]:

$$\Delta_3 u_j^D + k_{2D}^2 u_j^D = 0, \quad j=1, 2, \quad u_3^D(\mathbf{x}) = 0, \quad D = A, B, \quad (1)$$

де $k_{2D} = \omega/c_{2D}$ – хвильове число; $c_{2D} = \sqrt{G_D/\rho_D}$ – швидкість поширення у півпросторі D поперечної пружної хвилі; Δ_3 – тривимірний Лапласів оператор.

Для довгохвильової проти товщини прошарку асимптотики неklasичні крайові умови спряження півпросторів формулюємо на інтерфейсній поверхні S_0 [10, 13] їх контакту (рис 1b) у вигляді ПКУ

$$\sigma_{j3}^A(\mathbf{x}) = \sigma_{j3}^B(\mathbf{x}) = \frac{G_0}{h} [u_j^B(\mathbf{x}) - u_j^A(\mathbf{x})], \quad j=1, 2, \quad \mathbf{x} \in S_0; \quad (2)$$

крайові умови на поверхнях тріщини задаємо для амплітудних значень дотичних напружень:

$$\sigma_{j3}^A(\mathbf{x}) = (-1)^{j+1} (x_{(3-j)}/a) N_0, \quad j=1, 2, \quad \sigma_{33}^A(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x}(x_1, x_2, -d) \in S. \quad (3)$$

Зведення задачі до ГІР. Тотальне поле переміщень у півпросторі D біматеріалу спричинене взаємним зміщенням протилежних поверхонь тріщини та горизонтальними інтерфейсу S_0 внаслідок відбитих та заломлених на ньому хвиль. Переміщення та напруження у кожному півпросторі вибираємо у вигляді інтегральних подань [11, 13]:

$$u_j^D(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\partial}{\partial x_3} \left\{ \iint_{S_0} \alpha_j^D(\xi, \omega) \Phi_D(\mathbf{x}, \xi) dS_\xi + \delta_{AD} \iint_S \Delta u_j^A(\xi, \omega) \Phi_A(\mathbf{x}, \xi) dS_\xi \right\}, \quad j=1, 2, \quad (4)$$

$$\sigma_{j3}^D(\mathbf{x}, \omega) = G_D (\Delta_2 + k_{2D}^2) \times \left\{ \iint_{S_0} \alpha_j^D(\xi, \omega) \Phi_D(\mathbf{x}, \xi) dS_\xi + \delta_{AD} \iint_S \Delta u_j^A(\xi, \omega) \Phi_A(\mathbf{x}, \xi) dS_\xi \right\}, \quad (5)$$

де $\Phi_D(\mathbf{x}, \xi) = \frac{\exp(ik_{2D} |\mathbf{x} - \xi|)}{|\mathbf{x} - \xi|}$; δ_{AD} – Кронекерів символ; Δ_2 – двовимірний Лапласів оператор; невідомі функції $\Delta u_j^A(\mathbf{x}) = (u_j^{A-}(\mathbf{x}) - u_j^{A+}(\mathbf{x})) / 4\pi$ характеризують стрибок зміщень протилежних поверхонь S^\pm тріщини в напрямку координатних осей Ox_j [1], а густини α_j^D – зміщення точок інтерфейсу S_0 . Вибором подань (4), (5) у вигляді потенціалів Гельмгольца задовольняємо умови випромінювання Зоммерфельда на безмежності.

Задачу розв'язуємо у два етапи. На першому подаємо невідомі густини α_j^D через Δu_j^A . Для цього, задовольняючи ПКУ (2) з використанням подань (4), (5), отримуємо систему чотирьох двовимірних інтегральних рівнянь для густини α_j^D

$$G_D (\Delta_2 + k_{2D}^2) \iint_{S_0} \alpha_j^D(\xi, \omega) \Phi_D(\mathbf{x}_0, \xi) dS_\xi - \frac{G_0}{h} \frac{\partial}{\partial x_3} \iint_{S_0} \alpha_j^B(\xi, \omega) \Phi_B(\mathbf{x}_0, \xi) dS_\xi + \frac{G_0}{h} \frac{\partial}{\partial x_3} \iint_{S_0} \alpha_j^A(\xi, \omega) \Phi_A(\mathbf{x}_0, \xi) dS_\xi = H_{Dj}(\mathbf{x}, \omega), \quad j=1,2, \quad D=A,B, \quad \mathbf{x} \in S_0, \quad (6)$$

де праві їх частини виражено через невідомі функції стрибка зміщень протилежних поверхонь тріщини:

$$H_{Dj}(\mathbf{x}_0, \xi) = -\delta_{AD} G_D (\Delta_2 + k_{2D}^2) \iint_S \Delta u_j^A(\xi, \omega) \Phi_A(\mathbf{x}_{10}, \xi) dS_\xi - \frac{G_0}{h} \frac{\partial}{\partial x_{310}} \iint_S \Delta u_j^A(\xi, \omega) \Phi_A(\mathbf{x}_{10}, \xi) dS_\xi.$$

Застосувавши до рівнянь (6) двовимірне інтегральне перетворення Фур'є за змінними x_1, x_2 , одержуємо систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) для Фур'є-трансформант функцій $\tilde{\alpha}_j^D$:

$$\begin{cases} \left(G_B R_{2B}(\tau) + \frac{G_0}{h} \right) \tilde{\alpha}_j^B + \frac{G_0}{h} \tilde{\alpha}_j^A = -\frac{1}{2\pi} \tilde{H}_{Aj}(\xi, \omega), \\ \frac{G_0}{h} \tilde{\alpha}_j^B + \left(G_A R_{2A}(\tau) + \frac{G_0}{h} \right) \tilde{\alpha}_j^A = -\frac{1}{2\pi} \tilde{H}_{Bj}(\xi, \omega), \end{cases} \quad (7)$$

де $R_{2D} = \sqrt{\tau^2 - k_{2D}^2}$.

Вживши до розв'язків цих СЛАР обернене двовимірне інтегральне перетворення Фур'є, отримуємо подання густин α_j^D через функції Δu_j^A :

$$\alpha_j^A(\xi, \omega) = -\int_0^\infty \frac{\tau}{\Delta(\tau)} \frac{e^{-d|R_{2A}(\tau)|}}{R_{2A}(\tau)} \times$$

$$\times \iint_S \Delta u_j^A(\mathbf{z}) \{G_0 (G_B R_{2B}(\tau) - G_A R_{2A}(\tau)) - h G_B R_{2B}(\tau) G_A R_{2A}(\tau)\} \times \\ \times e^{-d|R_{2A}(\tau)} J_0(\tau g) dS_{\mathbf{z}} \} d\tau, \quad (8)$$

де $g = \sqrt{(\xi_1 - z_1)^2 + (\xi_2 - z_2)^2}$.

На другому етапі задовольняємо крайові умови на поверхнях тріщини. Підставивши інтегральні подання (5) для напружень у крайові умови (3) на поверхнях тріщини з урахуванням (8) та скориставшись методикою аналітичного обчислення безмежних інтегралів [14], дістаємо систему двох незв'язаних двовимірних ГІР Гельмгольцевого типу для невідомих функцій Δu_j^A стрибка тангенційних зміщень поверхонь дефекту:

$$(\Delta_2 + k_{2A}^2) \iint_S \Delta u_j^A(\xi) \frac{e^{ik_{2A}|\mathbf{x}-\xi|}}{|\mathbf{x}-\xi|} dS_{\xi} + \\ + \iint_S \Delta u_j^A(\xi) \int_0^{\infty} \frac{\tau R_{2A}(\tau) \Omega(\tau)}{\Delta(\tau)} e^{-2dR_{2A}(\tau)} J_0(\tau q) d\tau dS_{\xi} = \frac{N_j(\mathbf{x})}{G_A}, \quad \mathbf{x} \in S, \quad j=1,2, \quad (9)$$

$$q = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}.$$

Тут ядра $\Omega(\tau)$, $\Delta(\tau)$ мають таку структуру:

$$\Omega(\tau) = G_0 [G_B R_{2B}(\tau) - G_A R_{2A}(\tau)] - h G_B R_{2B}(\tau) G_A R_{2A}(\tau),$$

$$\Delta(\tau) = G_0 [G_A R_{2A}(\tau) + G_B R_{2B}(\tau)] + h G_A G_B R_{2A}(\tau) R_{2B}(\tau).$$

Інтегрували в цих рівняннях лише по скінченній області S тріщини. Другий доданок ГІР є модифікованою функцією Гріна, яка характеризує внесок у тотальне хвильове поле напружень у біматеріалі тонкого інтерфейсу. Для граничної товщини $h = 0$ ГІР (9) трансформуються у свої аналоги для задачі про тріщину закруту у пружному біматеріалі, в якому контакт півпросторів ідеальний. Для граничного значення модуля зсуву матеріалу прошарку $G_0 = 0$ отримуємо відповідне ГІР задачі про тріщину у пружному півпросторі.

Інтегральні рівняння (9) належать до гіперсингулярних, статичні ядра яких містять слабку $|\mathbf{x}-\xi|^{-1}$ і сильну $|\mathbf{x}-\xi|^{-3}$ особливості. Невідомі функції Δu_j^A подаємо у вигляді [11]

$$\Delta u_j^A(\mathbf{x}, \omega) = \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2} \beta_j(\mathbf{x}, \omega), \quad j=1,2,$$

де $\beta_j(\mathbf{x}, \omega)$ – невідомі, обмежені та неперервно диференційовні в області S функції. Подальшу регуляризацію ГІР (9) описано раніше [1]. Інтегральні рівняння розв'язували числово. Дискретизували область S дефекту в полярній системі координат. При цьому вибирали фіксовані кроки розбиття: $0,1a$ – за радіальною координатою r і 15° – за кутовою φ . Область S тріщини покривали сіткою чотирикутних граничних елементів, в межах кожного з яких функції $\beta_j(\mathbf{x}, \omega)$ вважали постійними. З урахуванням цього ГІР зводили до розв'язування СЛАР для дискретних значень $\beta_j(\mathbf{x}, \omega)$. За допомогою цих функцій на контурі тріщини визначали динамічні коефіцієнти інтенсивності напружень (ДКІН) повздожнього зсуву:

$$K_{III}^d(\varphi, t) = -2G\pi\sqrt{\pi a} [\beta_1(a, \varphi, \omega) \sin \varphi - \beta_2(a, \varphi, \omega) \cos \varphi] \exp[-i\omega t] .$$

Числове дослідження. На рис. 2 подано залежності амплітудних значень нормованого ДКІН $\bar{K}_{III} = |K_{III}^d| / K_{III}^{st}$ ($K_{III}^{st} = (4/3)N_0 \sqrt{a/\pi}$ – статичний КІН по-вздовжнього зсуву для кругової тріщини в безмежному однорідному тілі під дією заданих на її поверхнях зусиль $N_j(\mathbf{x}_1) = (-1)^{j+1} (x_{3-j}/a) N_0$, $j=1, 2$) від приведеної частоти $k_{2A}a$, глибини d залягання дефекту від інтерфейсу та товщини прошарку $h = 0,01a$. Під час розрахунків приймали $\rho_A = \rho_B = \rho_0$, контрастність жорсткості матеріалів півпросторів і прошарку оцінювали за співвідношеннями $G = G_A/G_B$ і $G^* = G_B/G_0$ модулів зсувів матеріалів.

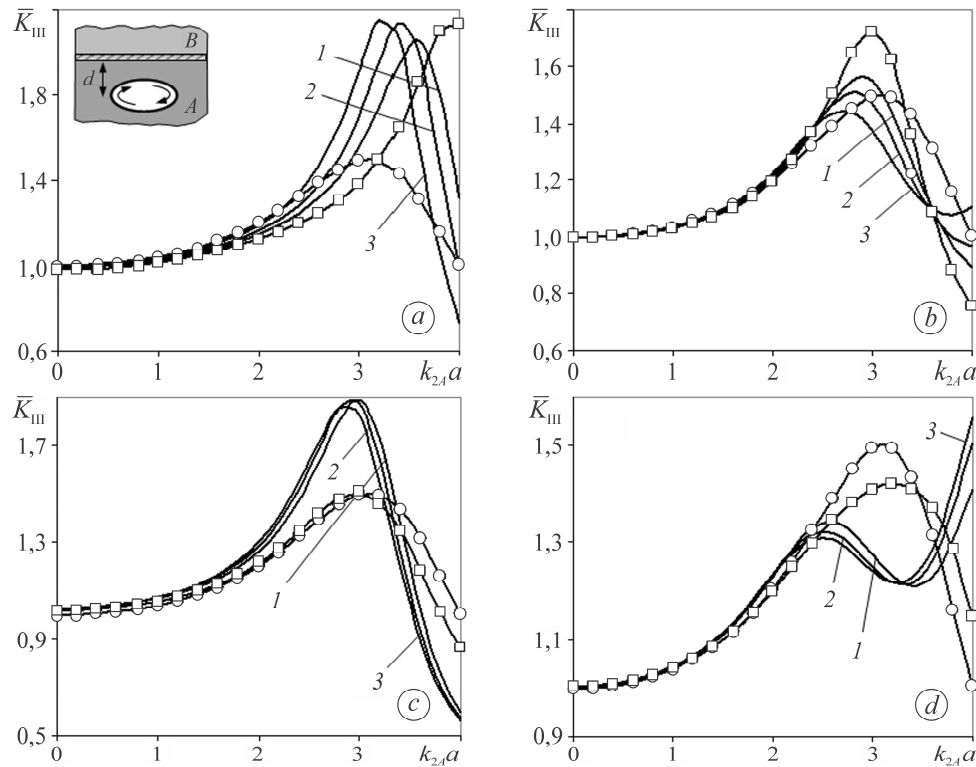


Рис. 2. Частотні залежності нормованих амплітуд параметра \bar{K}_{III} від відношення значень жорсткості матеріалів за фіксованої товщини прошарку $h = 0,01a$: \circ – тріщина у безмежному однорідному тілі; \square – у біматеріалі без прошарку ($1 - G^* = 50$; $2 - 100$; $3 - 200$). $a, b - G = G_A/G_B = 0,25$; $c, d - 4$; $a, c - d = 0,5a$; $b, d - 1,0a$.

Fig. 2. Frequency dependences of normalized amplitudes of parameter \bar{K}_{III} on the values of the materials rigidity at a fixed interlayer thickness $h = 0.01a$: \circ – the crack in an infinite homogeneous body; \square – the crack in a bimaterial without an interlayer ($1 - G^* = 50$; $2 - 100$; $3 - 200$). $a, b - G = G_A/G_B = 0.25$; $c, d - 4$; $a, c - d = 0.5a$; $b, d - 1.0a$.

Вплив прошарку на амплітуди ДКІН \bar{K}_{III} у розглядуваному діапазоні хвильового числа слабший за розташування тріщини у складнику біматеріалу з більшою жорсткістю. Для відстані $d = 0,5a$ його локальні максимуми вищі, ніж для безмежного однорідного тіла [15] та біматеріалу без прошарку. Також встановили значення параметра G контрастності матеріалів півпросторів, за яких амплітуди ДКІН не залежать від податливості прошарку, що свідчить про відсутність відбитих хвиль та повне перенесення хвильової енергії через міжфазну поверхню

на цих частотах (рис. 2с). Якщо $d = a$, ДКІН \bar{K}_{III} досягає двох пікових значень (рис. 2d) проти одного у біматеріалі за ідеального контакту півпросторів на інтерфейсі (маркована квадратами крива). Існує діапазон частот, де піки амплітуд ДКІН менші, ніж у композиті з тріщиною без прошарку (зафіксовано ефект екранування динамічних напружень, тобто зміцнення біматеріалу тонким прошарком). Для тріщини в жорсткішому складнику збільшення податливості прошарку супроводжується зменшенням перших максимумів коефіцієнта \bar{K}_{III} .

На рис. 3 побудовано залежності максимумів амплітуд ДКІН \bar{K}_{III}^{\max} у вибраному діапазоні хвильового числа $k_{2A}a$ від глибини d залягання тріщини. Збільшення контрастності жорсткості матеріалів півпросторів може супроводжуватися як зменшенням пікових максимумів \bar{K}_{III}^{\max} (рис. 3a), так і їх збільшенням (рис. 3b). Для тріщини у жорсткішому складнику біматеріалу пікові значення \bar{K}_{III}^{\max} періодично повторюються зі зростанням глибини d залягання дефекту.

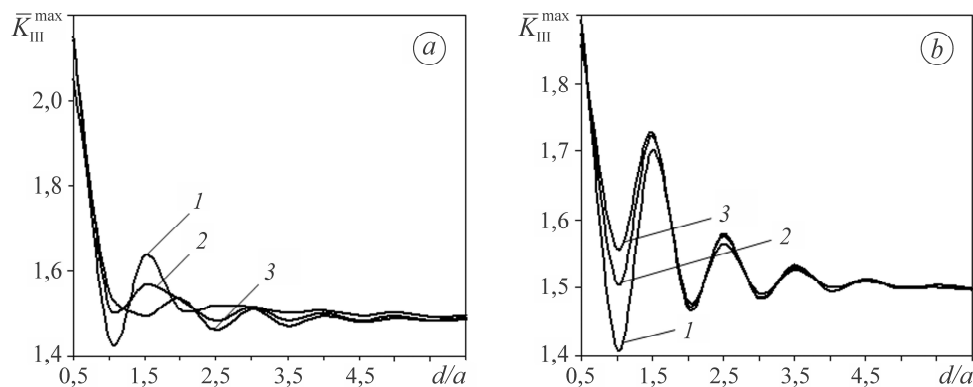


Рис. 3. Залежності нормованих амплітуд ДКІН \bar{K}_{III}^{\max} у вибраному спектрі хвильового числа $k_{2A}a$ від нормованої глибини d/a залягання тріщини і відношення значення жорсткості матеріалів композиту за фіксованої товщини прошарку $h = 0,01a$ ($1 - G^* = 50$; $2 - 100$; $3 - 200$): $a - G = G_A/G_B = 0,25$; $b - 4,0$.

Fig. 3. Dependences of the normalized amplitudes DSIF \bar{K}_{III}^{\max} in the selected wave number spectrum $k_{2A}a$ on the normalized depth d/a and the ratio of the value of the composite materials rigidity of the composite at a fixed interlayer thickness $h = 0.01a$ ($1 - G^* = 50$; $2 - 100$; $3 - 200$): $a - G = G_A/G_B = 0.25$; $b - 4.0$.

ВИСНОВКИ

Розв'язано тривимірну динамічну задачу про гармонійне навантаження пружного біматеріалу з двох півпросторів, який містить кругову тріщину закату. Півпростори з'єднані тонким податливим прошарком, для моделювання якого у низькочастотному спектрі коливань використано пружинні крайові умови. Задачу зведено до розв'язування двовимірних ГР для невідомих функцій стрибків тангенційних зміщень поверхонь дефекту. За допомогою розв'язків рівнянь досліджено частотні залежності амплітуд ДКІН в околі тріщини від параметрів співвідношення жорсткості компонент тіла та глибини залягання дефекту. За певних співвідношень фізичних та геометричних параметрів компонент тіла виявлено ефект зміцнення біматеріалу тонким прошарком.

1. Mykhas'kiv V. V. and Stankevych V. Z. Elastodynamic problem for a layered composite with penny-shaped crack under harmonic torsion // Z. Angew. Math. Mech. – 2019. – **99**, № 5. – e201800193. <https://doi.org/10.1002/zamm.201800193>.

2. *Yu H. Y. and Cooper K. P.* Dynamic penny-shaped cracks in multilayer sandwich composites // *Theor. and Appl. Fract. Mech.* – 2009. – **51**. – P. 181–188.
3. *Boström A., Bövik P., and Olsson P.* A comparison of exact first order and spring boundary conditions for scattering by thin layers // *J. of Nondestr. Eval.* – 1992. – **11**. – P. 175–184.
4. *Lavrentyev A. I. and Rokhlin S. I.* Models for ultrasonic characterization of environmental degradation of interfaces in adhesive joints // *J. Appl. Phys.* – 1994. – **76**. – P. 4643–4650.
5. *Huang W. and Rokhlin S.L.* Generalized spring boundary conditions and scattering coefficient for interface imperfections with arbitrary orientations // *Review of Progress in Quantitative Nondestr. Eval.* – 1995. – **14**. – P. 107–114.
6. *Margetan F. J., Thompson R. B., and Gray T. A.* Interfacial spring model for ultrasonic interactions with imperfect interfaces: Theory of oblique incidence and application to diffusion-bonded butt joints // *J. of Nondestr. Eval.* – 1998. – **7**. – P. 131–152.
7. *Effective* spring stiffness for a periodic array of interacting coplanar penny-shaped cracks at an interface between two dissimilar isotropic materials / H. Lekesiz, N. Katsube, S. I. Rokhlin, and R.R. Seghi // *Int. J. of Solids and Struct.* – 2013. – **50**. – P. 2817–2828.
8. *Leiderman R. and Castello D.* Scattering of ultrasonic waves by heterogeneous interfaces: Formulating the direct scattering problem as a least-squares problem // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 2014. – **135**, № 1. – P. 5–16.
9. *Investigation* of interfacial stiffnesses of a tri-layer using Zero-Group Velocity Lamb modes / S. Mezil, F. Bruno, S. Raetz, J. Laurent, D. Royer, and C. Prada // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 2015. – **138**. – P. 3202–3209.
10. *Golub M. V., Doroshenko O. V., and Boström A.* Effective spring boundary conditions for a damaged interface between dissimilar media in three-dimensional case // *Int. J. of Solids and Struct.* – 2016. – **81**. – P. 141–150.
11. *Golub M. V. and Doroshenko O. V.* Effective spring boundary conditions for modelling wave transmission through a composite with a random distribution of interface circular cracks // *Int. J. Solids Struct.* – 2019. – **165**. – P. 115–126.
12. *Wilde M. V., Golub M. V., and Eremin A. A.* Elastodynamic behaviour of laminate structures with soft thin interlayers: Theory and Experiment // *Materials.* – 2022. – **15**. – <https://doi.org/10.3390/ma15041307>.
13. *Stankevych V. Z., Zhabdys'kyi I. Ya., and Tereshchak Yu. V.* Interaction of the crack and thin elastic layer in the solid under the action of time-harmonic loading // XXIVth Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED) (September 12–14, 2019, Lviv, Ukraine). – Lviv, 2019. – P. 172–176.
14. *Stankevich V. Z.* Computation of certain double integrals that are characteristic of dynamic problems of the theory of cracks in a semi-infinite body // *J. Math. Sci.* – **81**, № 6. – P. 3048–3052.
15. *Sih G. C. and Loeber J. F.* Normal compression and radial shear waves scattering at a penny shaped crack in an elastic solid // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1968. – **46**. – P. 711–721.

Одержано 29.03.2022