

УДК 539.3

## ВПЛИВ ТЕРМОЧУТЛИВОСТІ МАТЕРІАЛІВ НА ТЕРМО- НАПРУЖЕНИЙ СТАН ТРИШАРОВОГО ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА ЗА КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМІНУ

Г. Ю. ГАРМАТІЙ, Б. М. КАЛИНЯК

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів*

Розв'язано незв'язану квазістатичну осесиметричну задачу термопружності для нескінченного тришарового порожнистого циліндра з урахуванням залежності від температури термомеханічних характеристик ізотропних матеріалів кожного шару. Враховано складний теплообмін середовищ зі змінною в часі температурою. Використано числові та наближені аналітичні методи для розв'язування задачі. Досліджено вплив температурної залежності термомеханічних характеристик вибраних матеріалів шарів на термонапружений стан тришарового циліндра.

**Ключові слова:** *термочутливість, теплопровідність, термопружність, шаруваті тіла, конвективний теплообмін.*

The quasi-static axisymmetric thermoelasticity problem for an infinite three-layer hollow cylinder is solved, taking into account the temperature dependence of the thermomechanical characteristics of the isotropic materials in each layer. The complex heat exchange of media with variable temperature over time is taken into account and numerical. The numerical and approximate analytical methods are used to solve the problem. The influence of temperature dependence of thermomechanical characteristics of selected layer materials on the thermal stress state of a three-layer cylinder is investigated.

**Keywords:** *thermal sensitivity, thermal conductivity, thermal elasticity, layered bodies, convective heat transfer.*

**Вступ.** З розвитком техніки і нових технологій зросли вимоги до міцності та надійності конструкцій, які виготовляють та експлуатують за значної зміни температури та одночасної дії силових навантажень. За таких умов для визначення полів температури та напружень необхідно враховувати температурну залежність характеристик матеріалів [1, 2]. Неусталений розподіл температурного поля в циліндрі знайдено числово методом прямих [3] з подальшим розв'язуванням отриманої напівдискретної задачі, яка є задачею Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь [4].

Напружений стан, викликаний температурним полем та силовими навантаженнями, визначено зі сукупності інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду та інтегральних умов, до яких зведено розв'язування задачі термопружності для багатошарового порожнистого циліндра зі залежними від температури механічними характеристиками матеріалу кожного шару [5].

**Формулювання задачі.** Розглянемо віднесений до циліндричної системи координат  $(r, \varphi, z)$  порожнистий ізотропний безмежний у напрямі осі  $Z$  тришаровий циліндр (рис. 1), температура якого залежить лише від радіуса  $r$  та часу  $t$ . Коефіцієнти теплопровідності  $\lambda^{(j)}(t)$ , об'ємні теплоємності  $c_v^{(j)}(t)$ , модулі зсуву  $E^{(j)}(t)$ , коефіцієнти Пуассона  $\nu^{(j)}(t)$  та лінійного теплового розширення  $\alpha^{(j)}(t)$

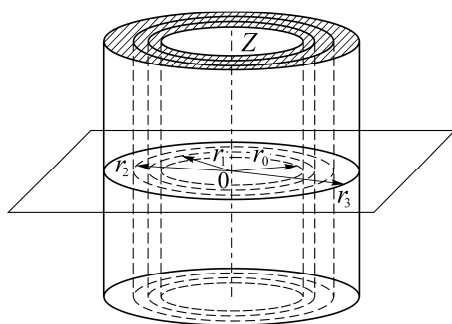


Рис. 1. Тришаровий неоднорідний термочутливий циліндр.

Fig. 1. Three-layer inhomogeneous thermosensitive cylinder.

( $j = 1, 2, 3$ ) матеріалів  $j$ -го шару є функціями температури  $t$ . Початкова температура циліндра  $t_p$  стала. На межах контакту шарів виконуються умови неперервності температури, теплового потоку та ідеального механічного контакту. Через поверхні циліндра  $r = r_0$ ,  $r = r_3$  відбувається конвективний теплообмін зі середовищами, температури яких  $t_{c_0}(\tau)$  і  $t_{c_R}(\tau)$  є функціями часу. На цих поверхнях також задані сталі навантаження. Необхідно визначити термонапружений стан у такому термочутливому циліндрі.

Перейдемо до відносних величин: координати  $\rho = r/l_0$  ( $l_0$  – характерний розмір), температури  $T = t/t_0$  ( $t_0$  – опорна температура) та часу  $Fo = \lambda_0^{(3)}\tau/c_0^{(3)}r_3^2$ . Термомеханічні характеристики матеріалу у кожному шарі подамо у вигляді  $\chi^{(j)}(t) = \chi_0^{(j)}\chi^{(j)}(T)$ , де  $\chi_0^{(j)}$  – розмірні величини,  $\chi^{(j)}(T)$  – безрозмірні функції.

Математична модель задачі термопружності охоплює [5]:  
рівняння рівноваги

$$\frac{d}{d\rho}(\rho^2\sigma_r^{(j)}) = \rho(\sigma^{(j)} - \rho f^{(j)}), \quad j = \overline{1,3}; \quad (1)$$

зв'язки між компонентами тензорів деформацій і напружень

$$E^{(j)}e_r^{(j)} = (1 + \nu^{(j)})[\sigma_r^{(j)} - \nu^{(j)}\sigma^{(j)}] - \nu^{(j)}E^{(j)}e_z + (1 + \nu^{(j)})E^{(j)}\Phi^{(j)}(t), \quad (2)$$

$$E^{(j)}e_\phi^{(j)} = (1 + \nu^{(j)})[(1 - \nu^{(j)})\sigma^{(j)} - \sigma_r^{(j)}] - \nu^{(j)}E^{(j)}e_z + (1 + \nu^{(j)})E^{(j)}\Phi^{(j)}(t), \quad (3)$$

$$E^{(j)}e_z = \sigma_z^{(j)} - \nu^{(j)}\sigma^{(j)} + E^{(j)}\Phi^{(j)}(t); \quad (4)$$

рівняння сумісності деформацій

$$\rho \frac{de_\phi^{(j)}}{d\rho} = e_r^{(j)} - e_\phi^{(j)},$$

які у напруженнях мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{1 - (\nu^{(j)})^2}{E^{(j)}} \sigma^{(j)} - \nu^{(j)}e_z + (1 + \nu^{(j)})\Phi^{(j)}(t^{(j)}) \right] = \\ = \sigma_r^{(j)} \frac{d}{d\rho} \left( \frac{1 + \nu^{(j)}}{E^{(j)}} \right) - f^{(j)} \frac{1 + \nu^{(j)}}{E^{(j)}}; \end{aligned} \quad (5)$$

умови на обмежувальних поверхнях і в перерізі циліндра

$$\sigma_r^{(1)}(\rho^{(j)}) = -p_1, \quad \sigma_r^{(3)}(\rho^{(3)}) = -p_2, \quad 2\pi \int_{\rho^{(0)}}^{\rho^{(3)}} \eta \sigma_z(\eta) d\eta = p,$$

$$\rho^{(m)} = \frac{r_m}{l_0} \quad (m = \overline{0,3}), \quad l_0 = r_3; \quad (6)$$

умови ідеального механічного контакту сусідніх шарів

$$u_r^{(j)}(\rho^{(j+1)}) = u_r^{(j+1)}(\rho^{(j+1)}), \quad \sigma_r^{(j)}(\rho^{(j+1)}) = \sigma_r^{(j+1)}(\rho^{(j+1)}), \quad j=1,2.$$

Тут  $\sigma_r^{(j)}$ ,  $\sigma_\phi^{(j)}$ ,  $\sigma_z^{(j)}$  – радіальна, колова та осьова компоненти тензора напружень;  $e_r^{(j)}$ ,  $e_\phi^{(j)}$  – радіальна та колова компоненти тензора деформацій;  $\sigma^{(j)} = \sigma_r^{(j)} + \sigma_\phi^{(j)}$ ;  $u_r^{(j)}$  – радіальна компонента вектора переміщень;  $f^{(j)}$  – масо-

ві сили, залежні від радіальної координати;  $\Phi^{(j)}(t) = t_0 \int_{t_p}^t \alpha^{(j)}(T) dT$  – теплова

деформація;  $e_z$  – стала осьова деформація циліндра;  $p_1$ ,  $p_2$  – задані сталі тиски на внутрішній і зовнішній поверхнях циліндра;  $p$  – задане на торцях циліндра зусилля, що діє уздовж його осі.

Температурне поле в термочутливому порожнистому тришаровому циліндрі визначили з рівняння теплопровідності

$$\frac{\Lambda_0}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \Lambda(\rho, T) \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) = C_0 C(\rho, T) \frac{\partial T}{\partial Fo} \quad (7)$$

з умовами ідеального теплового контакту

$$T|_{\rho=\rho^{(j)-0}} = T|_{\rho=\rho^{(j)+0}}, \quad \lambda_0^{(j)} \Lambda^{(j)}(T) \frac{\partial T}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho^{(j)-0}} = \lambda_0^{(j+1)} \Lambda^{(j+1)}(T) \frac{\partial T}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho^{(j)+0}}, \quad j=1,2 \quad (8)$$

та такими граничними і початковою умовами

$$\Lambda^{(1)}(T) \frac{\partial T}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho^{(0)}} - \text{Bi}_1 (T|_{\rho=\rho^{(0)}} - T_{c0}(Fo)) = 0, \quad (9)$$

$$\Lambda^{(3)}(T) \frac{\partial T}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho^{(3)}} + \text{Bi}_2 (T|_{\rho=\rho^{(3)}} - T_{cR}(Fo)) = 0, \quad T|_{Fo=0} = T_p, \quad (10)$$

де

$$\Lambda(\rho, T) = \begin{cases} \Lambda^{(1)}(T), & \rho^{(0)} \leq \rho < \rho^{(1)}, \\ \Lambda^{(2)}(T), & \rho^{(1)} < \rho < \rho^{(2)}, \\ \Lambda^{(3)}(T), & \rho^{(2)} < \rho \leq \rho^{(3)}, \end{cases} \quad C(\rho, T) = \begin{cases} C^{(1)}(T), & \rho^{(0)} \leq \rho < \rho^{(1)}, \\ C^{(2)}(T), & \rho^{(1)} < \rho < \rho^{(2)}, \\ C^{(3)}(T), & \rho^{(2)} < \rho \leq \rho^{(3)}, \end{cases}$$

$$\Lambda_0 = \begin{cases} \Lambda_0^{(1)} = \lambda_0^{(1)} / \lambda_0^{(3)}, & \rho^{(0)} \leq \rho < \rho^{(1)}, \\ \Lambda_0^{(2)} = \lambda_0^{(2)} / \lambda_0^{(3)}, & \rho^{(1)} < \rho < \rho^{(2)}, \\ \Lambda_0^{(3)} = 1, & \rho^{(2)} < \rho \leq \rho^{(3)}, \end{cases} \quad C_0 = \begin{cases} C_0^{(1)} = c_0^{(1)} / c_0^{(3)}, & \rho^{(0)} \leq \rho < \rho^{(1)}, \\ C_0^{(2)} = c_0^{(2)} / c_0^{(3)}, & \rho^{(1)} < \rho < \rho^{(2)}, \\ C_0^{(3)} = 1, & \rho^{(2)} < \rho \leq \rho^{(3)}. \end{cases}$$

Тут  $\text{Bi}_1 = \frac{\beta_1 r_3}{\lambda_0^{(1)}}$ ,  $\text{Bi}_2 = \frac{\beta_2 r_3}{\lambda_0^{(3)}}$ ,  $T_{c0}(Fo) = (T_c - T_p)(1 - e^{-k_1 Fo})$ ,  $T_{cR}(Fo) = (T_c - T_p) \times (1 - e^{-k_2 Fo})$ ,  $T_c = \frac{t_c}{t_o}$ ,  $T_p = \frac{t_p}{t_o}$ ;  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  – коефіцієнти теплообміну з поверхонь  $r = r_0$ ,  $r = r_3$ ;  $k_1, k_2$  – сталі величини.

**Розв'язок задачі теплопровідності.** Нелінійну крайову задачу (7)–(10) методом прямих звели до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь [6, 7]. Оскільки рівняння (7) містить розривні коефіцієнти, то напівдискретну задачу отримали за допомогою консервативної дискретизації за радіальною координатою на нерівномірній сітці інтегро-інтерполяційним методом [3]. Для цього на відрізку  $[\rho^{(0)}; \rho^{(3)}]$  ввели нерівномірну сітку  $\hat{\omega}_h = \{\rho_i; i = 1, 2, \dots, n+1\}$ ,  $h_i = \rho_i - \rho_{i-1}$ ,  $\rho_1 = \rho^{(0)}$ ,  $\rho_{n+1} = \rho^{(3)}$  та позначення  $\rho_{i-1/2} = \rho_i - 0,5h_i$ ,  $\rho_{i+1/2} = \rho_i + 0,5h_{i+1}$ ,  $w(\rho, T, Fo) = \rho \Lambda(\rho, T) \frac{\partial T}{\partial \rho}$ . Рівняння балансу тепла на відрізку  $[\rho_{i-1/2}; \rho_{i+1/2}]$  має вигляд

$$w\left(\rho_{i+1/2}, \frac{T_i + T_{i+1}}{2}, Fo\right) - w\left(\rho_{i-1/2}, \frac{T_i + T_{i-1}}{2}, Fo\right) = \frac{C_0}{\Lambda_0} \int_{\rho_{i-1/2}}^{\rho_{i+1/2}} C(\rho, T) \rho \frac{\partial T}{\partial Fo} d\rho.$$

На відрізку  $[\rho_{i-1/2}; \rho_{i+1/2}]$  в околі вузла  $\rho_i$  температуру  $T$  апроксимували у вигляді  $T = \text{const} = T_i$ . Замінили  $w$  та інтеграли, які містять цю температуру  $T$ , лінійними комбінаціями її значень у вузлах сітки. В результаті отримали різницеве рівняння [6]

$$\frac{dT_i}{dFo} = \frac{\Lambda_0}{\bar{h}_i \rho_i C_0 C(\rho_i, T_i)} \left( d_{i+1}(T) \frac{T_{i+1} - T_i}{h_{i+1}} - d_i(T) \frac{T_i - T_{i-1}}{h_i} \right), \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

де  $\bar{h}_i = (h_i + h_{i+1})/2$ ;  $C(\rho_i, T_i) = C^{(j)}(T_i)$  (на межі контакту  $j$ -го та  $j+1$ -го шарів циліндра ( $j=1, 2$ ) вузол  $\rho_i$  збігається з точкою дотику шарів);  $d_i(T) \approx \rho_{i-1/2} \Lambda(\rho_{i-1/2}, (T_i + T_{i-1})/2)$ .

Побудуємо напівдискретний аналог умови (9) на поверхні  $\rho = \rho^{(0)}$ . Для цього проінтегруємо рівняння (7) на відрізку  $[\rho^{(0)}; \rho_{1/2}]$  ( $\rho_{1/2} = \rho^{(0)} + 0,5h_1$ ):

$$w(\rho_{1/2}, \frac{T_1 + T_2}{2}, Fo) - w(\rho^{(0)}, T_1, Fo) = \frac{C_0^{(1)}}{\Lambda_0^{(1)}} \int_{\rho^{(0)}}^{\rho_{1/2}} C(\rho, T) \rho \frac{\partial T}{\partial Fo} d\rho,$$

де  $w\left(\rho_{1/2}, \frac{T_1 + T_2}{2}, Fo\right) = d_1(T) \frac{T_2 - T_1}{h_1}$ ,  $w(\rho_1, \frac{T_1 + T_2}{2}, Fo) \approx \text{Bi}_1 \rho_1 \left( T|_{\rho=\rho^{(0)}} - T_{c0}(Fo) \right)$ ,

$\int_{\rho_1}^{\rho_{1/2}} C(\rho, T) \rho \frac{\partial T}{\partial Fo} d\rho \approx \frac{h_1}{2} \rho_1 C(\rho_1, T_1) \frac{\partial T_1}{\partial Fo}$ . У результаті отримаємо:

$$\frac{dT_1}{dFo} = \frac{2\Lambda_0^{(1)}}{\rho_1 h_1 C_0^{(1)} C(\rho_1, T_1)} \left( d_1(T) \frac{T_2 - T_1}{h_1} - \text{Bi}_1 \rho_1 (T|_{\rho=\rho_1} - T_{c0}(Fo)) \right).$$

Аналогічно побудуємо різницевий аналог умови (10) на поверхні  $\rho = \rho^{(3)}$  і отримаємо задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dT_1}{dFo} = \frac{2\Lambda_0^{(1)}}{\rho_1 h_1 C_0^{(1)} C(\rho_1, T_1)} \left( d_1(T) \frac{T_2 - T_1}{h_1} - \text{Bi}_1 \rho_1 (T|_{\rho=\rho_1} - T_{c0}(Fo)) \right),$$

$$\frac{dT_i}{dFo} = \frac{\Lambda_0}{\bar{h}_i \rho_i C_0 C(\rho_i, T_i)} \left( d_{i+1}(T) \frac{T_{i+1} - T_i}{h_{i+1}} - d_i(T) \frac{T_i - T_{i-1}}{h_i} \right), i = \overline{2, n},$$

$$\frac{dT_{n+1}}{dFo} = \frac{2}{h_n C(1, T_{n+1})} \left( -\text{Bi}_2(T|_{\rho=1} - T_{cR}(Fo)) - d_{n+1}(T) \frac{T_{n+1} - T_n}{h_n} \right)$$

$$T_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n+1. \quad (11)$$

Система (11) є жорсткою [8] і для її розв'язання використали лінійні багатокрокові різницеві методи, зокрема, формули диференціювання назад [4].

Визначення напруженого стану циліндра звели до розв'язування сукупності інтегральних рівнянь Вольєра другого роду, які отримали безпосереднім інтегруванням задачі (1)–(6) [5]

$$\sigma_r^{(j)}(\rho) = \frac{1}{\rho^2} \left[ -\rho_1^2 p_1 + (1 - \delta_{j1}) \sum_{k=1}^{j-1} \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta (\sigma^{(k)}(\eta) - \eta f^{(k)}(\eta)) d\eta + \right. \\ \left. + \int_{\rho_j}^{\rho} \eta (\sigma^{(j)}(\eta) - \eta f^{(j)}(\eta)) d\eta \right], \quad j = \overline{1, 3},$$

$$\frac{1 - (v^{(j)}(\rho))^2}{E^{(j)}(\rho)} \sigma^{(j)}(\rho) = \int_{\rho_j}^{\rho} \sigma_r^{(j)}(\eta) (\varphi^{(j)}(\eta))' d\eta + \frac{1 - (v^{(1)}(\rho_1))^2}{E^{(1)}(\rho_1)} \sigma^{(1)}(\rho_1) + \\ + [v^{(j)}(\rho) - v^{(1)}(\rho_1)] e_z + (1 - \delta_{j1}) \sum_{k=1}^{j-1} \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \sigma_r^{(k)}(\eta) (\varphi^{(k)}(\eta))' d\eta + \\ + (1 - \delta_{j1}) \sum_{k=1}^{j-1} \beta^{(k)} \sigma_r^{(k)}(\rho_{k+1}) - F^{(j)}(\rho), \quad j = 1, \dots, n, \quad (12)$$

які задовольняють інтегральні умови

$$\rho_1^2 p_1 - \rho_{n+1}^2 p_2 = \sum_{k=1}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta (\sigma^{(k)}(\eta) - \eta f^{(k)}(\eta)) d\eta, \quad 2\pi \int_{\rho_1}^{\rho_{n+1}} \eta \sigma_z(\eta) d\eta = p, \quad (13)$$

де

$$\varphi^{(k)}(\rho) = \frac{1 + v^{(k)}(\rho)}{E^{(k)}(\rho)}, \quad (\varphi^{(k)}(\eta))' = \frac{d}{d\rho} \left( \frac{1 + v^{(k)}(\rho)}{E^{(k)}(\rho)} \right) \Big|_{\rho=\eta},$$

$$\beta^{(k)} = \varphi^{(k+1)}(\rho_{k+1}) - \varphi^{(k)}(\rho_{k+1}),$$

$$F^{(j)}(\rho) = (1 - \delta_{j1}) \sum_{k=1}^{j-1} \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta f^{(k)}(\eta) \varphi^{(k)}(\eta) d\eta + \int_{\rho_j}^{\rho} \eta f^{(j)}(\eta) \varphi^{(j)}(\eta) d\eta +$$

$$+ [(1 + v^{(j)}(\rho)) \Phi^{(j)}(t(\rho)) - (1 + v^{(1)}(\rho_1)) \Phi^{(1)}(t(\rho_1))], \quad \delta_{1j} - \text{символ Кронеккера.}$$

Наближений аналітичний розв'язок цих рівнянь для  $j$ -го шару після заміни інтегралів у рівняннях (12) за формулою трапецій [5] має вигляд

$$\sigma^{(j)}(\rho) = \gamma_{10}^{(j)}(\rho) \sigma^{(1)}(\rho_1) + \gamma_{20}^{(j)}(\rho) e_z + \gamma_{00}^{(j)}(\rho),$$

$$\sigma_r^{(j)}(\rho) = \gamma_{1r}^{(j)}(\rho) \sigma^{(1)}(\rho_1) + \gamma_{2r}^{(j)}(\rho) e_z + \gamma_{0r}^{(j)}(\rho), \quad j = \overline{1, 3}, \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned}
\gamma_{10}^{(j)}(\rho) &= \left\{ (1 - \delta_{1j}) \gamma_{1r}^{(j-1)}(\rho_j) \chi_2^{(j)}(\rho) + \left[ \frac{1 - (v^{(1)}(\rho_1))^2}{E^{(1)}(\rho_1)} + \right. \right. \\
&+ (1 - \delta_{j1}) \sum_{k=1}^{j-1} \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \gamma_{1r}^{(k)}(\eta) (\varphi^{(k)}(\eta))' d\eta + (1 - \delta_{j1}) \sum_{k=1}^{j-1} \beta^{(k)} \gamma_{1r}^{(k)}(\rho_{k+1}) \left. \right] \chi_1^{(j)}(\rho) \left. \right\} / \psi^{(j)}(\rho), \\
\gamma_{20}^{(j)}(\rho) &= \frac{1}{\psi^{(j)}(\rho)} \left\{ [v^{(j)}(\rho) - v^{(j)}(\rho_j)] + (1 - \delta_{1j}) \gamma_{2r}^{(j-1)}(\rho_j) \chi_2^{(j)}(\rho) + [v^{(j)}(\rho_j) - \right. \\
&- v^{(1)}(\rho_1) + (1 - \delta_{j1}) \sum_{k=1}^{j-1} \left( \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \gamma_{2r}^{(k)}(\eta) (\varphi^{(k)}(\eta))' d\eta + \beta^{(k)} \gamma_{2r}^{(k)}(\rho_{k+1}) \right) \left. \right] \chi_1^{(j)}(\rho) \left. \right\}, \\
\gamma_{00}^{(j)}(\rho) &= \frac{1}{\psi^{(j)}(\rho)} \left\{ [-\delta_{1j} p_1 + (1 - \delta_{1j}) \gamma_{0r}^{(j-1)}(\rho_j)] \chi_2^{(j)}(\rho) - \frac{\rho - \rho_j}{2} (\varphi^{(j)}(\rho))' \times \right. \\
&\times \frac{1}{\rho^2} \int_{\rho_j}^{\rho} \eta^2 f^{(j)}(\eta) d\eta + \left[ (1 - \delta_{j1}) \sum_{k=1}^{j-1} \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \gamma_{0r}^{(k)}(\eta) (\varphi^{(k)}(\eta))' d\eta + \right. \\
&+ (1 - \delta_{j1}) \sum_{k=1}^{j-1} \beta^{(k)} \gamma_{0r}^{(k)}(\rho_{k+1}) - F^{(j)}(\rho_j) \left. \right] \chi_1^{(j)}(\rho) - F^{(j)}(\rho) + F^{(j)}(\rho_j) \left. \right\}, \\
\gamma_{1r}^{(j)}(\rho) &= \frac{1}{\rho^2} \left[ (1 - \delta_{1j}) \rho_j^2 \gamma_{1r}^{(j-1)}(\rho_j) + \int_{\rho_j}^{\rho} \eta \gamma_{10}^{(j)}(\eta) d\eta \right], \\
\gamma_{2r}^{(j)}(\rho) &= \frac{1}{\rho^2} \left[ (1 - \delta_{1j}) \rho_j^2 \gamma_{2r}^{(j-1)}(\rho_j) + \int_{\rho_j}^{\rho} \eta \gamma_{20}^{(j)}(\eta) d\eta \right], \\
\gamma_{0r}^{(j)}(\rho) &= \frac{1}{\rho^2} \left[ -\rho_1^2 p_1 \delta_{1j} + (1 - \delta_{1j}) \rho_j^2 \gamma_{0r}^{(j-1)}(\rho_j) + \int_{\rho_j}^{\rho} \eta (\gamma_{00}^{(j)}(\eta) - \eta f^{(j)}(\eta)) d\eta \right], \\
\psi^{(j)}(\rho) &= \frac{1 - (v^{(j)}(\rho))^2}{E^{(j)}(\rho)} - \left( \frac{\rho - \rho_j}{2} \right)^2 \frac{1}{\rho} (\varphi^{(j)}(\rho))', \\
\chi_1^{(j)}(\rho) &= 1 + \left( \frac{\rho - \rho_j}{2} \right)^2 (\varphi^{(j)}(\rho))' \frac{\rho_j}{\rho^2} \frac{E^{(j)}(\rho_j)}{1 - (v^{(j)}(\rho_j))^2}, \\
\chi_2^{(j)}(\rho) &= \frac{\rho - \rho_j}{2} \left[ \frac{\rho_j^2}{\rho^2} (\varphi^{(j)}(\rho))' + (\varphi^{(j)}(\rho_j))' \right], \quad j = \overline{1, 3}. \quad (15)
\end{aligned}$$

**Числові дослідження.** Розглянемо безмежний тришаровий порожнистий циліндр (кераміка–вольфрам–кераміка). На рис. 2 подано відповідні розподіли температури, радіальних, колових та осьових напружень, викликаних температурним полем за сталої початкової температури 300 К, температурах  $T_{c0}(Fo) = (900 - 300) \cdot (1 - e^{-k_1 Fo}) / 300$ ,  $T_{cR}(Fo) = (900 - 300) \cdot (1 - e^{-k_2 Fo}) / 300$  на межах циліндр–середовище ( $r_0 = 0,5$  mm,  $r_3 = 1$  mm),  $r_1 = 0,748$  mm,  $r_2 = 0,752$  mm для

$k_1 = k_2 = 1000$ ,  $Bi_1 = Bi_2 = 10$ . Напруження обчислювали за формулами (14), (15) та (4). Термомеханічні характеристики вольфраму та кераміки мають вигляд [9]

$$\alpha_W(t) = (3,49 + 4,635 \cdot 10^{-3}t + 6,173 \cdot 10^{-6}t^2 + 5,031 \cdot 10^{-6}t^3) \cdot 10^{-6} \text{ [1/K]},$$

$$\alpha_C(t) = (5,494 + 4,504 \cdot 10^{-3}t - 8,682 \cdot 10^{-7}t^2) \cdot 10^{-6} \text{ [1/K]},$$

$$\lambda_W(t) = 181,02 - 0,0683t \text{ [W/(m}\cdot\text{K)]},$$

$$\lambda_C(t) = 68,073 - 0,1272t + 7 \cdot 10^{-5}t^2 \text{ [W/(m}\cdot\text{K)]},$$

$$E_W(t) = (4,02 - 4,455 \cdot 10^{-4}t) \cdot 10^{11} \text{ [Pa]}, \quad E_C(t) = (383,23 - 0,0444t) \cdot 10^{11} \text{ [Pa]},$$

$$\nu_W = 0,34, \quad \nu_C = 0,22 + 1,58 \cdot 10^{-5}t,$$

$$c_{vW}(t) = 2 \cdot 10^6 + 1661,3t - 1,8739t^2 + 0,0009t^3 \text{ [J/(m}^3\cdot\text{K)]},$$

$$c_{vC}(t) = 1 \cdot 10^6 + 7544,6t - 4,0253t^2 \text{ [J/(m}^3\cdot\text{K)]}.$$

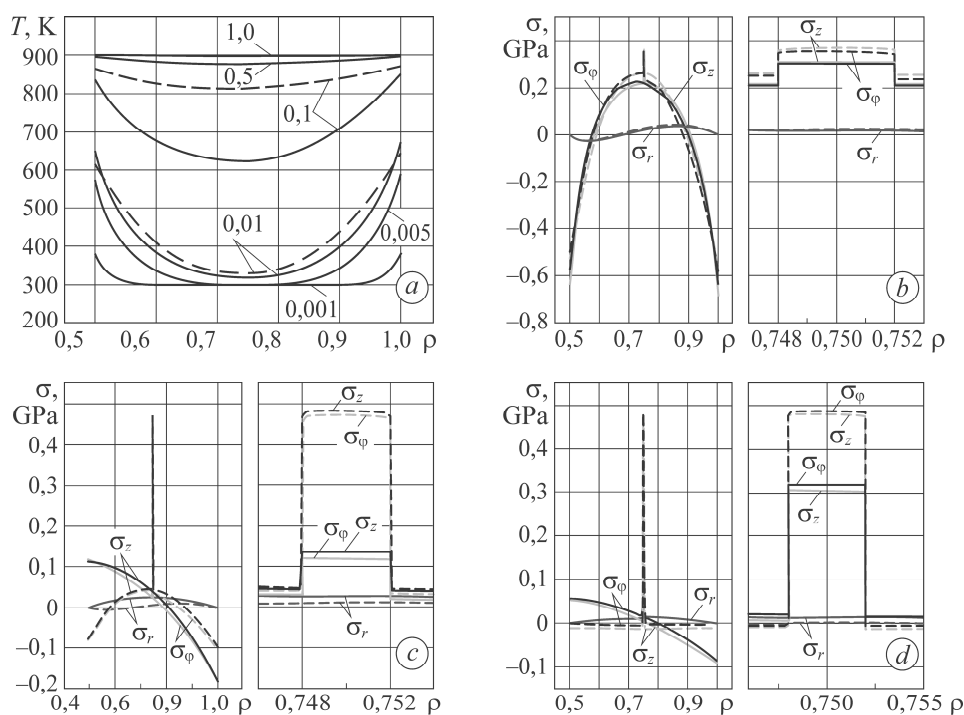


Рис. 2. Залежності температури (а) та напружень  $\sigma = \{\sigma_r, \sigma_\phi, \sigma_z\}$  (b-d) від координати  $\rho$  за різних значень  $Fo$ : b – 0,001; c – 0,1; d – 1.

Fig. 2. Dependences of temperature (a) and stresses  $\sigma = \{\sigma_r, \sigma_\phi, \sigma_z\}$  (b-d) on the coordinate  $\rho$  at different  $Fo$  values: b – 0.001; c – 0.1; d – 1.

Тут суцільні лінії – температура та напруження з урахуванням температурної залежності термомеханічних характеристик матеріалів, а штрихові – без урахування.

## ВИСНОВКИ

Нелінійну задачу теплопровідності зведено методом прямих до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь. Дискретизацію за радіальною координатою умов на межі та рівняння теплопровідності виконано зі застосуван-

ням консервативних різницевих схем, які збігаються у класі розривних коефіцієнтів. Отримана максимальна розбіжність між значеннями температури у термочутливому циліндрі та аналогічному нетермочутливому тришаровому для шарів кераміка–вольфрам–кераміка суттєво залежить від часу та не перевищує 21% ( $F_0 = 0,1$ ). Відповідні значення напружень з урахуванням термочутливості матеріалів змінюються приблизно на 80% проти таких за сталих термомеханічних характеристиках матеріалів і міняють характер (стиск–розтяг на розтяг). Результати досліджень свідчать про важливість брати до уваги температурну залежність теплофізичних і механічних характеристик матеріалів для визначення термопружного стану такого циліндра.

1. *Абрамов В. В.* Напряжения и деформации при термической обработке стали. – Киев; Донецк: Вища шк., 1985. – 136 с.
2. *Noda N.* Thermal stresses in functionally graded materials // Therm. Stresses'99: Proc. 3<sup>rd</sup> Int. Congr. on Thermal Stresses, Cracow (Poland), June 13–17, 1999. – Cracow: Cracow. Univ. of Techn., 1999. – P. 33–38
3. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
4. *Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений* / Под ред. Дж. Холла, Дж. Уатта. – М.: Мир, 1979. – 312 с.
5. *Попович В. С., Калиняк Б. М.* Математичне моделювання і методика визначення статичного термопружного стану багат шарових термочутливих циліндрів // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2014. – **57**, № 2. – С. 169–186.
6. *Гарматій Г. Ю., Калиняк Б. М., Кутнів М. В.* Незв'язана квазістатична задача термопружності для двошарового порожнистого термочутливого циліндра за умов конвективного теплообміну // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2018. – **61**, № 4. – С. 66–77.  
(*Harmatiy G. Yu., Kalynyak B. M., and Kutniv M. V.* Uncoupled quasistatic problem of thermoelasticity for a two-layer hollow thermally sensitive cylinder under the conditions of convective heat exchange // *J. Math. Sci.* – 2021. – **256**, № 4. – P. 439–454. <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05437-9>.)
7. *Гарматій Г. Ю.* Чисельне визначення неусталеного теплового стану тришарового порожнистого термочутливого циліндра за умов складного теплообміну // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2020. – **63**, № 2. – С. 129–136.
8. *Деккер К., Вервер Я.* Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1988. – 334 с.
9. *Зиновьев В. Е.* Теплофизические свойства металлов при высоких температурах: Справ. – М.: Металлургия, 1989. – 384 с.

Одержано 29.10.2021