

УДК 539.3

ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З АБСОЛЮТНО ЖОРСТКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ ЗА ВРАХУВАННЯ РОЗПОДІЛЕНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ЇЇ ПОВЕРХНІ

Т. В. ШОПА, О. І. ТУЖЕЛЯК

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Побудовано розв'язок задачі про усталені поперечні коливання ортотропної пластини складної форми з множиною абсолютно жорстких включень різної конфігурації за врахування гармонічного в часі довільного розподіленого навантаження на поверхні пластини на основі непрямого методу граничних елементів з використанням послідовнісного подання функцій Гріна. Застосовано уточнену теорію пластин, яка враховує поперечні зсуви та інерційні компоненти. Розглянуто різні типи з'єднань включень з пластиною та мішані гармонічні в часі крайові умови на зовнішній межі пластини. Вважаємо, що включення здійснюють переважно поступальний рух у нормальному напрямку до серединної поверхні пластини. Наведено тестові числові результати для часткових випадків задачі.

Ключові слова: *коливання, ортотропна пластинка, включення, розподілене навантаження, непрямий метод граничних елементів.*

The solution of the problem of steady-state transverse vibrations of an orthotropic plate of complex shape with a set of absolutely rigid inclusions of different configuration taking into account harmonic in time arbitrary distributed load on the surface of the plate is constructed on the basis of the indirect boundary elements method using sequential representation of the Green's functions. The refined plate theory which takes into account transverse shear deformation and inertial components is used. Different types of connections of inclusions with the plate and mixed harmonic in time boundary conditions on the outer boundary of the plate are considered. Inclusions are assumed to perform predominantly translational motion along the normal direction to the middle surface of the plate. Test numerical results for partial cases of the problem are presented.

Keywords: *vibrations, orthotropic plate, inclusions, distributed load, indirect boundary elements method.*

Вступ. Дослідження динамічної поведінки анізотропних структур складної форми є актуальною задачею механіки. Включення суттєво впливають на механічні властивості конструкцій. Є значна кількість праць, де розглядають динамічні задачі для необмежених пружних середовищ з включеннями, зокрема [1–4]. Однак відомо досить мало праць, в яких розглядають коливання скінченних пластин з включеннями. Раніше побудовано [5] розв'язки задач про усталені коливання трансверсально-ізотропної прямокутної в плані пологої шарнірно опертої оболонки та пластини з масивним абсолютно жорстким включенням довільної форми, яке жорстко закріплене або шарнірно оперте, в межах спрощеної моделі Тимошенка, яка враховує поперечні зсуви та не враховує жорсткі повороти навколо нормалі до серединної поверхні, на основі непрямого методу граничних елементів та послідовнісного подання дельта-функції Дірака для знаходження функцій Гріна. Знайдено [6] наближений аналітичний розв'язок задачі про поперечні

коливання ізотропної шарнірно опертої пластини з ортотропним включенням з використанням розв'язку типу Нав'є. Досліджено коливання перехресно шаруватих пластин з однонапрямленими включеннями та різними крайовими умовами в межах уточненої теорії пластин за використання теорії середнього поля Морі–Танаки на основі розв'язку типу Нав'є та методу Рітца [7]. Досліджено [8] коливання шаруватої пластини зі сфероїдальними включеннями за використання теорії середнього поля Морі–Танаки. Проаналізовано вплив початкового розтягу шарнірно опертої пластини з двома круглими включеннями на її вимушені коливання під дією гармонічних у часі згинаючих сил на верхню поверхню [9]. Крайова задача сформульована на основі тривимірної лінеаризованої теорії пружних хвиль у поперечно напружених тілах і розв'язана методом скінченних елементів.

Мета роботи – побудувати розв'язок загальнішої задачі, ніж у праці [10], де розглянуто поперечні коливання ортотропної пластини з множиною абсолютно жорстких включень довільної конфігурації з різними типами з'єднань з пластиною, врахувавши, що зовнішнє навантаження прикладене не тільки до включень, а й на поверхні пластини.

Формулювання задачі. Розглянемо задачу про усталені поперечні коливання ортотропної пластини, яка містить множину масивних наскрізних абсолютно жорстких включень довільної форми, які мають різні типи з'єднань з пластиною, як і в праці [10], але врахуємо, що довільне зовнішнє навантаження прикладене ще і на поверхні пластини і його можна задати функціями

$$q(\alpha, t) = q_0(\alpha) \sin(\omega t), \quad m_1(\alpha, t) = m_{01}(\alpha) \sin(\omega t), \quad m_2(\alpha, t) = m_{02}(\alpha) \sin(\omega t).$$

Для дослідження використовуємо рівняння уточненої теорії пластин, як у праці [11], з крайовими умовами на зовнішній межі пластини та на її контурах, де вона взаємодіє з включеннями через пружні прошарки типу Вінклера, з шарнірно опертими та жорстко закріпленими включеннями, як у праці [10]. Рівняння руху абсолютно жорстких включень матимуть такий ж вигляд, як і в праці [10].

Розв'язання задачі. Задачу розв'язуємо на основі непрямого методу граничних елементів, використовуючи такі ж функції Гріна, як раніше [10, 11]. Розв'язок подаємо у вигляді суми потенціалу простого шару та розв'язку, знайденого методом рядів Фур'є в прямокутній області Π за однорідних крайових умов типу шарнірного опирання на $\partial\Pi$ [11]. Систему інтегральних рівнянь та інтегральних співвідношень відносно невідомих функцій густин потенціалів простого шару та амплітуд переміщень включень будемо з використанням методу фіктивного контуру та розв'язуємо методом колокацій [10].

В результаті отримуємо систему $3 \sum_{j=1}^{N+3} S^{(j)} + N$ лінійних алгебричних рівнянь відносно дискретних значень функцій густин потенціалів простого шару $\{T^{(j)r}\}$, $j = \overline{1, N+3}$, $r = \overline{1, S^{(j)}}$ та амплітуд переміщень включень $\tilde{w}_0^{(j)}$, $j = \overline{1, N}$

$$\begin{aligned} & \left\{ w_0^{(j)}(\alpha^{(j)q}), \gamma_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) \right\}^T = \\ & = - \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) \left[\Omega_{km}^{(U)}(\alpha^{(j)q}) \right] \left[E_{km}(\alpha^{(f)r}) \right] \{ T^{(f)r} \} - \\ & - \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \left[\Omega_{km}^{(U)}(\alpha^{(j)q}) \right] \{ P_{km} \}, \alpha^{(j)q} \in L^{(j)}, j = \overline{N_1+1, N_1+N_2}, j = N+1, q = \overline{1, S^{(j)}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ Q_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), M_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}), M_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) \right\}^T = \\
& = - \sum_{f=1}^{N+3S^{(j)}} \sum_{r=1}^K \sum_{k=0}^M \sum_{m=0}^3 C_{km}(\varepsilon) \left[\Omega_{km}^{(P)}(\alpha^{(j)q}) \right] \left[E_{km}(\alpha^{(f)r}) \right] \left\{ T^{(f)r} \right\} - \\
& - \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \left[\Omega_{km}^{(P)}(\alpha^{(j)q}) \right] \left\{ P_{km} \right\}, \alpha^{(j)q} \in L^{\varepsilon(j)}, j = \overline{1, N_1}, j = N+2, q = \overline{1, S^{(j)}}; \\
& w_0^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = - \sum_{f=1}^{N+3S^{(j)}} \sum_{r=1}^K \sum_{k=0}^M \sum_{m=0}^3 \sum_{i=1}^3 C_{km}(\varepsilon) w_i(\alpha^{(j)q}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r} - \\
& \quad - \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^3 w_i(\alpha^{(j)q}) P_{km}^i, \\
& \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = - \sum_{f=1}^{N+3S^{(j)}} \sum_{r=1}^K \sum_{k=0}^M \sum_{m=0}^3 \sum_{i=1}^3 C_{km}(\varepsilon) \gamma_{i\tau}(\alpha^{(j)q}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r} - \\
& - \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^3 \gamma_{i\tau}(\alpha^{(j)q}) P_{km}^i, \alpha^{(j)q} \in L^{(j)}, j = \overline{N_1 + N_2 + 1, N}, j = N+3, q = \overline{1, S^{(j)}}, \\
& M_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = - \sum_{f=1}^{N+3S^{(j)}} \sum_{r=1}^K \sum_{k=0}^M \sum_{m=0}^3 \sum_{i=1}^3 C_{km}(\varepsilon) M_{in}(\alpha^{(j)q}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r} - \\
& - \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^3 M_{in}(\alpha^{(j)q}) P_{km}^i, \alpha^{(j)q} \in L^{\varepsilon(j)}, j = \overline{N_1 + N_2 + 1, N}, j = N+3, q = \overline{1, S^{(j)}}; \\
& P_0^{(j)} = \sum_{p=1}^{S^{(j)}} \sum_{f=1}^{N+3S^{(j)}} \sum_{r=1}^K \sum_{k=0}^M \sum_{m=0}^3 C_{km}(\varepsilon) \Psi_{km}^{ss}(\alpha^{(j)p}) w_{km}^i \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r} + \\
& + \sum_{p=1}^{S^{(j)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^3 \Psi_{km}^{ss}(\alpha^{(j)p}) w_{km}^i P_{km}^i + \tilde{w}_0^{(j)} \left(\sum_{p=1}^{S^{(j)}} \Theta(\alpha^{(j)p}) - \omega^2 \tilde{m}^{(j)} \right), \\
& \quad \alpha^{(j)p} \in L^{(j)}, j = \overline{1, N_1}; \\
& P_0^{(j)} = - \sum_{p=1}^{S^{(j)}} \sum_{f=1}^{N+3S^{(j)}} \sum_{r=1}^K \sum_{k=0}^M \sum_{m=0}^3 C_{km}(\varepsilon) \Psi_{in}(\alpha^{(j)p}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r} - \\
& - \sum_{p=1}^{S^{(j)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^3 \Psi_{in}(\alpha^{(j)p}) P_{km}^i - \omega^2 \tilde{m}^{(j)} \tilde{w}_0^{(j)}, \alpha^{(j)p} \in L^{\varepsilon(j)}, j = \overline{N_1 + 1, N}; \\
& \text{де } \gamma_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = \gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = 0, \quad w_0^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = \tilde{w}_0^{(j)}, \quad j = \overline{N_1 + 1, N_1 + N_2}, \\
& \quad M_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = M_{\tau 0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = 0, \\
& \quad Q_{n0}^{(j)}(\alpha^{(j)q}) = k^{(j)}(\alpha^{(j)q}) \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^3 w_i(\alpha^{(j)q}) P_{km}^i +
\end{aligned}$$

$$+k^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\left(\tilde{w}_0^{(j)} + \sum_{f=1}^{N+3} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^3 C_{km}(\varepsilon) w_i\left(\alpha^{(j)q}\right) \Phi_{km}^i\left(\alpha^{(f)r}\right) T_i^{(f)r}\right), j = \overline{1, N_1},$$

$$M_{n0}^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right) = \gamma_{\tau 0}^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right) = 0, \quad w_0^{(j)}\left(\alpha^{(j)q}\right) = \tilde{w}_0^{(j)}, \quad j = \overline{N_1 + N_2 + 1, N}.$$

Використано позначення статей [10, 11].

На основі знайдених дискретних значень функцій густин потенціалів простого шару $\left\{T^{(j)r}\right\}$, $j = \overline{1, N+3}$, $r = \overline{1, S^{(j)}}$ можна отримати характеристики напружено-деформованого стану пластини вздовж довільного напрямку з нормальним $\{n(\alpha)\}$ і тангенціальним вектором $\{\tau(\alpha)\}$ з формул праці [11].

Незважаючи на деяку схожість викладок, розглянута тут задача про коливання пластини з включеннями суттєво відрізняється від задачі про коливання пластини з отворами, розглянутої раніше [11], та є значно складнішою. У задачі про коливання пластини з отворами амплітуди компонент переміщень та зусиль на контурах отворів, тобто функції $w_0^{(j)}(\alpha)$, $\gamma_{n0}^{(j)}(\alpha)$, $\gamma_{\tau 0}^{(j)}(\alpha)$, $Q_{n0}^{(j)}(\alpha)$, $M_{n0}^{(j)}(\alpha)$, $M_{\tau 0}^{(j)}(\alpha)$ в крайових умовах, вважаємо відомими на етапі формулювання задачі. Водночас у задачі про коливання пластини з включеннями для задання прогину пластини на контурах, де пластини взаємодіє з жорстко закріпленими та шарнірно опертими включеннями, та для задання зрізувальної сили на контурах, де пластини взаємодіє з включеннями через пружні прошарки типу Вінклера, в крайових умовах використовуємо амплітуди переміщень включень, які на етапі формулювання задачі є невідомі і шукаємо їх під час розв'язку. Однак на зовнішній межі пластини, як в задачі про коливання пластини з отворами, так і в задачі про коливання пластини з включеннями, амплітуди компонент переміщень та зусиль в крайових умовах вважаємо відомими на етапі формулювання задачі. Для розв'язку задачі про коливання пластини з отворами використовуємо одну групу рівнянь – рівняння теорії пластин, які описують коливання пластини, а для розв'язку задачі про коливання пластини з включеннями – дві групи рівнянь (рівняння теорії пластин та рівняння руху включень), які разом утворюють зав'язану систему рівнянь, тобто їх не можна розв'язати окремо (в крайових умовах для рівнянь, які описують коливання пластини, використовуємо невідомі амплітуди переміщень включень, які входять у рівняння руху включень, а сили взаємодії пластини і включень у рівняннях руху включень моделюємо з використанням функцій, які входять у рівняння, які описують коливання пластини). Відповідно поведінка розв'язку в задачі про коливання пластини з включеннями суттєво відрізняється від поведінки розв'язку в задачі про коливання пластини з отворами. Зокрема, у задачі про коливання пластини з включеннями зміна їх форми, розмірів, розташування, частоти коливань, зовнішнього навантаження та інших параметрів впливатиме на амплітуду прогину пластини на її контурах, де вона взаємодіє з включеннями, а у задачі про коливання пластини з отворами зміна їх форми, розмірів, розташування, частоти коливань, зовнішнього навантаження та інших параметрів не впливатиме на амплітуду прогину пластини на контурах тих отворів, на яких її задано, оскільки, з точністю до обчислювальної похибки, повинні виконуватися крайові умови, в яких амплітуду прогину пластини вважаємо відомою на етапі формулювання задачі. Однак, як в задачі про коливання пластини з отворами, так і в задачі про коливання пластини з включеннями, зміна вхідних параметрів не впливатиме на амплітуду прогину пластини на

тих ділянках зовнішньої межі, де задано амплітуду прогину пластини в крайових умовах, оскільки вважаємо, що вона є відома на етапі формулювання задачі.

Числові результати. Для верифікації числової схеми розглянемо коливання ортотропної прямокутної шарнірно опертої пластини з двома круговими жорстко закріпленими включеннями за врахування рівномірно розподіленого навантаження, яке діє на прямокутну ділянку на поверхні пластини. Тут розширену область Π доцільно вибрати так, щоб її межа збігалася зі зовнішньою межею пластини. Нехай пластина товщиною $2h$, $h = 0,005$ м, зі сторонами довжиною $l_1 = 2$ м, $l_2 = 1$ м, має такі фізичні параметри: $E_1 = 110$ GPa, $E_2 = 70$ GPa, $G_{12} = G_{13} = 63,4$ GPa, $G_{23} = 25,5$ GPa, $\nu_{12} = 0,34$, $\nu_{21} = \frac{E_1}{E_2} \nu_{12}$, $\rho = 5500$ kg/m³. Частота усталених коливань $\bar{\omega} = \omega/2\pi = 5$ Hz. Використовуємо функцію $C_{km}(\epsilon)$ таку ж,

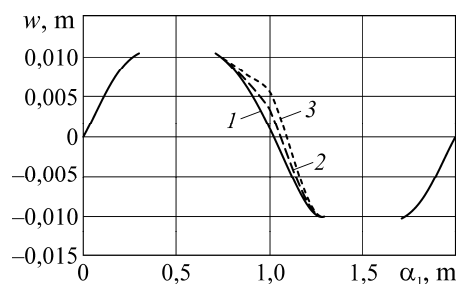
як у працях [10, 11]. Вибрано такі параметри апроксимації $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon^{(j)} = \frac{2\pi R^{(j)}}{3S^{(j)}}$,

$j = 1, 2$. Пластина містить два включення масою $\tilde{m}^{(1)} = \tilde{m}^{(2)} = 50$ kg, радіусами $R^{(1)} = R^{(2)} = 0,2$ м та центрами в точках $\alpha_1^{(1)} = 0,5$ м, $\alpha_2^{(1)} = 0,5$ м, $\alpha_1^{(2)} = 1,5$ м, $\alpha_2^{(2)} = 0,5$ м.

На рис. 1 зображено амплітуду прогину пластини за дії розподіленого навантаження з різним значенням на прямокутну ділянку зі сторонами $a = b = 0,2$ м та центром у точці $\alpha_1 = 1$ м, $\alpha_2 = 0,5$ м на поверхні пластини. На включення діють сили $P_0^{(1)} = -P_0^{(2)} = 50$ kN. Параметри апроксимації: $K = M = 60$, $S^{(1)} = S^{(2)} = 20$. Бачимо, що зі збільшенням розподіленого навантаження зростає амплітуда прогину пластини. Оскільки сили, які діють на включення, є домінуючими для забезпечення переважно поступального руху в нормальному напрямку до середньої поверхні пластини, то збільшення розподіленого навантаження на поверхні пластини вплинуло здебільшого на амплітуду прогину пластини в області дії розподіленого навантаження та на деякій відстані від неї.

Рис. 1. Амплітуда прогину пластини на лінії $\alpha_2 = 0,5$ м за розподіленого навантаження $q_0 = 2$ kN/m² (1), 6 kN/m² (2), 10 kN/m² (3).

Fig. 1. Deflection amplitude of the plate on the line $\alpha_2 = 0.5$ m in the case of distributed load $q_0 = 2$ kN/m² (1), 6 kN/m² (2), 10 kN/m² (3).



На рис. 2 показано амплітуду прогину пластини, коли на включення діють сили з різним значенням. Розподілене навантаження $q_0 = 7$ kN/m² діє на прямокутну ділянку зі сторонами $a = b = 0,2$ м та центром у точці $\alpha_1 = 1$ м, $\alpha_2 = 0,5$ м на поверхні пластини. Параметри апроксимації: $K = M = 60$, $S^{(1)} = S^{(2)} = 20$. Зі збільшенням сил, які діють на включення, амплітуда прогину пластини і, відповідно, амплітуди переміщень включень зростають.

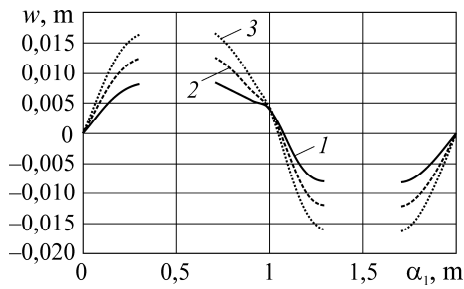


Рис. 2. Амплітуда прогину пластини на лінії $\alpha_2 = 0,5$ m, коли на включення діють сили $P_0^{(1)} = 40$ kN, $P_0^{(2)} = -40$ kN (1); $P_0^{(1)} = 60$ kN, $P_0^{(2)} = -60$ kN (2); $P_0^{(1)} = 80$ kN, $P_0^{(2)} = -80$ kN (3).

Fig. 2. Deflection amplitude of the plate on the line $\alpha_2 = 0.5$ m when forces are acting on the inclusions: $P_0^{(1)} = 40$ kN, $P_0^{(2)} = -40$ kN (1); $P_0^{(1)} = 60$ kN, $P_0^{(2)} = -60$ kN (2); $P_0^{(1)} = 80$ kN, $P_0^{(2)} = -80$ kN (3).

На рис. 3 зображено амплітуду прогину пластини з включеннями різного радіуса. На включення діють сили $P_0^{(1)} = -P_0^{(2)} = 70$ kN. Розподілене навантаження $q_0 = 5$ kN/m² діє на прямокутну ділянку зі сторонами $a = b = 0,2$ m та центром у точці $\alpha_1 = 1$ m, $\alpha_2 = 0,5$ m на поверхні пластини. Параметри апроксимації: крива 1 – $K = M = 80$, $S^{(1)} = S^{(2)} = 20$; крива 2 – $K = M = 60$, $S^{(1)} = S^{(2)} = 20$; крива 3 – $K = M = 200$, $S^{(1)} = S^{(2)} = 60$. Тут зі збільшенням радіусів включень амплітуда прогину пластини і, відповідно, амплітуди переміщень включень зменшуються.

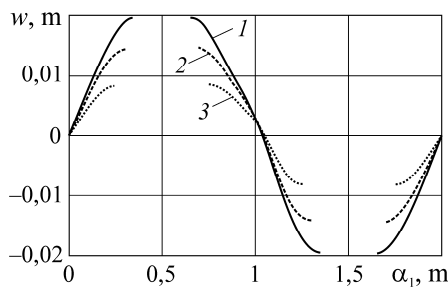


Рис. 3. Амплітуда прогину пластини на лінії $\alpha_2 = 0,5$ m за різних радіусів включень: 1 – $R^{(1)} = R^{(2)} = 0,15$ m; 2 – $R^{(1)} = R^{(2)} = 0,2$ m; 3 – $R^{(1)} = R^{(2)} = 0,25$ m.

Fig. 3. Deflection amplitude of the plate on the line $\alpha_2 = 0.5$ m in the case of different inclusions radii: 1 – $R^{(1)} = R^{(2)} = 0.15$ m; 2 – $R^{(1)} = R^{(2)} = 0.2$ m; 3 – $R^{(1)} = R^{(2)} = 0.25$ m.

Графіки (рис. 1–3) побудовані за малої частоти коливань, щоб підкреслити, що їх форма між включеннями змінилась в результаті дії розподіленого навантаження, а не через зміну форми коливань, як за значно вищих частот. Порівнюючи амплітуди прогину пластини на рис. 1–3 та у праці [10], бачимо, що розподілене навантаження помітно вплинуло на прогин пластини в зоні дії цього навантаження та з'явилася випуклість графіків вгору. Порівнюючи поведінку амплітуди прогину пластини на рис. 3 та у праці [11], бачимо, що зміна радіусів включень суттєво вплинула на амплітуду прогину пластини в точках на контурах, де вона взаємодіє з включеннями, а зміна радіусів отворів не вплинула на амплітуду прогину пластини в точках на контурах отворів, оскільки розглянуто випадок, коли на контурах отворів задано амплітуду прогину пластини в крайових умовах, в яких вона є відомою.

ВИСНОВКИ

У межах уточненої теорії пластин, яка враховує поперечні зсуви та інерційні компоненти, побудовано розв'язок задачі про усталені поперечні коливання ортотропної пластини, яка містить довільну кількість масивних наскрізних абсо-

лютно жорстких включень, за врахування гармонічного в часі довільного розподіленого навантаження на поверхні пластини. Включення та зовнішня межа пластини мають довільну конфігурацію. Розглянуто різні типи з'єднань включень з пластиною та мішані гармонічні в часі крайові умови на зовнішній межі пластини. Вважаємо, що включення здійснюють переважно поступальний рух у нормальшому напрямку до серединної поверхні пластини. Задачу розв'язано непрямим методом граничних елементів за використання послідовнісного подання функцій Гріна та методу рядів Фур'є. Систему інтегральних рівнянь та інтегральних співвідношень відносно функцій густин потенціалів простого шару та амплітуд переміщень включень розв'язано методом колокацій. Для верифікації числової схеми розглянуто прямокутну шарнірно оперту пластину з двома круговими жорстко закріпленими включеннями. Показано помітний вплив розподіленого навантаження на поверхні пластини на її прогин. На базі отриманої загальної числової схеми можна досліджувати поведінку розв'язків для різних випадків задачі для забезпечення надійної роботи конструкцій за дії динамічного навантаження.

1. *Elastic wave dispersion and attenuation caused by multiple types of disc-shaped inclusions* / V. Mykhas'kiv, Ya. Kunets, V. Matus, and O. Khay // *Int. J. of Struct. Integrity*. – 2018. – **9**, № 2. – P. 219–232.
2. *Mykhas'kiv V. Transient response of a plane rigid inclusion to an incident wave in an elastic solid* // *Wave Motion*. – 2005. – **41**, № 2. – P. 133–144.
3. *Kerr F. H. The scattering of a plane elastic wave by spherical elastic inclusions* // *Int. J. Eng. Sci.* – 1992. – **30**, № 2. – P. 169–186.
4. *Kanaun S. K., Levin V. M., and Sabina F. J. Propagation of elastic waves in composites with random set of spherical inclusions (effective medium approach)* // *Wave Motion*. – 2004. – **40**, № 1. – P. 69–88.
5. *Бурак Я. Й., Рудавський Ю. К., Сухорольський М. А. Аналітична механіка локально навантажених оболонок*. – Львів: Інтеллект-Захід, 2007. – 240 с.
6. *Ercoli L. and Laura P. A. A. Transverse vibrations of an isotropic, simply supported rectangular plate with an orthotropic inclusion* // *J. of Sound and Vibration*. – 1992. – **153**, № 2. – P. 217–221.
7. *Eruslu S. O. and Aydogdu M. Vibration analysis of inclusion reinforced composite square plates under various boundary conditions* // *J. of Reinforced Plastics and Composites*. – 2009. – **28**, № 8. – P. 995–1012.
8. *Huang J. H. Vibration response of laminated plates containing spheroidal inclusions* // *Composite Structures*. – 2000. – **50**, № 3. – P. 269–277.
9. *Babuscu Yesil U. Forced vibration analysis of prestretched plates with twin circular inclusions* // *J. of Eng. Mech.* – 2014. – **141**, № 1. – P. 04014099-1–04014099-16.
10. *Shopa T. V. Transverse vibration of an orthotropic plate with a collection of inclusions of any configuration with different types of connections with matrix* // *Materials Science*. – 2019. – **55**, № 1. – P. 94–104.
11. *Шопа Т. В., Тужеляк О. І. Поперечні коливання ортотропної пластини з множиною отворів довільної конфігурації за врахування розподіленого навантаження на поверхні* // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2021. – **57**, № 4. – С. 63–71.

Одержано 31.12.2021