

УДК 359.3

## МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ ОПТИМАЛЬНИХ РЕЖИМІВ ВІДПАЛУ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНИХ ТІЛ

М. Г. СТАЦУК<sup>1,2</sup>, Б. Д. ДРОБЕНКО<sup>3</sup>, Є. М. ІРЗА<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів;

<sup>2</sup> Національний університет "Львівська політехніка";

<sup>3</sup> Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Сформульовано задачу розрахунку оптимальних режимів відпалу функціонально-градієнтних тіл. Розроблено оригінальну методику числового її розв'язування на основі методу поетапної параметричної оптимізації. Для розв'язування прямих задач під час ітераційної побудови оптимальних режимів нагрівання-охолодження використано метод скінченних елементів. Пошук оптимального значення функції керування не потребує нульового наближення і на кожному часовому кроці можна мінімізувати функцію однієї змінної.

**Ключові слова:** *термонапружений стан, тіло обертання, функціонально-градієнтний матеріал, метод скінченних елементів, порожнистий циліндр, оптимальні режими відпалу.*

The problem of calculating the optimal annealing modes of functional-gradient bodies is proposed. An original method of its numerical solution based on the principle of stepwise parametric optimization has been developed. Use of the finite element method to solve direct problems in the process of iterative construction of optimal heating-cooling modes makes it possible to solve a wide class of problems for bodies of complex geometric shape and structure. The search for the optimal value of the control function does not require zero approximation in time and at each time step the function of one variable can be minimized.

**Keywords:** *thermal stress state, body of rotation, functional-gradient material, finite element method, hollow cylinder, optimization modes.*

**Вступ.** Матеріали, механічні характеристики яких рівномірно або стрибкоподібно змінюються хоча б у напрямі одного виміру тіла (надалі називатимемо їх функціонально-градієнтними), все частіше використовують в інженерній практиці. Елементи конструкцій з таких матеріалів під час виготовлення володіють підвищеними залишковими напруженнями, які суттєво впливають на експлуатаційні характеристики готового виробу. Щоб їх зменшити, застосовують відпал – спеціальне температурне оброблення всього виробу. Тому необхідно розробити ефективні математичні моделі і методи дослідження напружено-деформованого стану таких тіл, забезпечити оптимальне управління режимами відпалу за обмежень на напруження і деформації в них, а також технологічні умови температурного навантаження.

Розроблено оригінальну методику числового розв'язування сформульованої задачі з використанням принципу поетапної параметричної оптимізації. Для опису термомеханічної поведінки тіл з функціонально-градієнтних матеріалів використали тривимірну модель термочугливого в'язкопружного тіла, беручи до уваги релаксацію початкових (вихідних) залишкових напружень за підвищених температур. Для урахування структури матеріалу тіла застосували фізико-механічні характеристики, залежні від просторової координати і температури.

Контактна особа: Є. М. ІРЗА, e-mail: Evgen\_Irza@ukr.net

Методом скінченних елементів розв'язано задачі для тіл складних геометричної форми та структури, а пошук оптимального значення функції керування не потребує нульового наближення і зводиться на кожному кроці за часом до параметричної мінімізації функції однієї змінної.

**Формулювання оптимізаційної задачі.** Вважали, що за розглядуваних теплових навантажень напружений стан не впливає на температуру тіла, тобто задачу про визначення напружень і деформацій у тілі формулювали в квазістатичній поставі (в переміщеннях) [1–3].

Тіло обертання займає область  $\Omega$  евклідового простору  $R^3$  і обмежене неперервною за Ліпшицем поверхнею  $\Gamma$  та віднесене до криволінійної системи координат  $Ox^1x^2x^3$ . На частині  $\Gamma_u$  поверхні  $\Gamma$  тіла задані переміщення  $\vec{u} = \vec{u}_0$ , а на частині  $\Gamma_\sigma$  – силове навантаження, яке характеризує вектор  $\vec{p}$ ,  $\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \Gamma$ . Структуру матеріалу тіла описують фізико-механічні характеристики його складників.

Тіло нагрівали зовнішнім середовищем з температурою  $t_c(\tau)$  через частину поверхні  $\Gamma_t$  ( $\vec{r} \in \Gamma_t$ ), тепловим потоком  $q(\tau)$  – через частину поверхні  $\Gamma_q$  ( $\vec{r} \in \Gamma_q$ ), ( $\Gamma_t \cup \Gamma_q = \Gamma$ ), а також розподіленими джерелами тепла потужності  $Q(\vec{r}, \tau)$ , ( $\vec{r} \in \Omega$ ).

Температурне поле в області  $\Omega$  описує рівняння теплопровідності

$$\vec{\nabla}(k\vec{\nabla}t) + Q - \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = 0 \quad (1)$$

за початкової  $t(\vec{r}, 0) = t_0(\vec{r}) \quad (2)$

і крайових

$$k\vec{\nabla}t \cdot \vec{n} + \alpha(t - t_c) = 0 \quad \text{на } \Gamma_t, \quad k\vec{\nabla}t \cdot \vec{n} + q = 0 \quad \text{на } \Gamma_q \quad (3)$$

умов. Тут  $\vec{\nabla} = \nabla_1 \vec{e}^1 + \nabla_2 \vec{e}^2 + \nabla_3 \vec{e}^3$  – векторний оператор Гамільтона в криволінійній системі координат  $Ox^1x^2x^3$ ;  $\nabla_i$  – коваріантна похідна за просторовою координатою  $x^i$ ;  $(\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3)$  – контраваріантний базис криволінійної системи координат  $Ox^1x^2x^3$ ;  $k(\vec{r}_s, t)$  – коефіцієнт теплопровідності;  $\rho(\vec{r}_s, t)$  – питома густина;  $c(\vec{r}_s, t)$  – питома теплоємність;  $\tau$  – біжучий час;  $\vec{r}$  – радіус-вектор точки;  $\vec{n}$  – зовнішня нормаль до поверхні;  $\alpha$  – коефіцієнт тепловіддачі;  $\vec{r}_s$  – радіус-вектор точки в напрямку неоднорідності фізико-механічних властивостей матеріалу тіла.

Поведінку термов'язкопружного тіла описує система рівнянь

$$\begin{cases} d\{\tilde{\epsilon}\} = d\{\tilde{\epsilon}^e\} + d\{\tilde{\epsilon}^c\}, \\ \sigma_0 = 3K_0(\epsilon_0 - \epsilon^t), \end{cases} \quad (4)$$

де  $d\{\tilde{\epsilon}^e\} = d(\{\tilde{\sigma}\}/(2G))$  – закон пружного деформування Гука;  $d\{\tilde{\epsilon}^c\} = \{\tilde{\sigma}\}/(2\eta)$  – закон в'язкого течіння Ньютона;  $\{\tilde{\sigma}\}$ ,  $\{\tilde{\epsilon}\}$  – компоненти девіатора напружень і деформацій, відповідно;  $\sigma_0 = (\sigma^{11} + \sigma^{22} + \sigma^{33})/3$  – середнє нормальне напруження;  $\epsilon_0 = (\epsilon^{11} + \epsilon^{22} + \epsilon^{33})/3$  – середнє відносне видовження;  $\{\epsilon^t\} = [111000]^T \times \int_{t_0}^t \alpha_t(s, \zeta) d\zeta$  – тензор температурних деформацій;  $\eta(\vec{r}_s, t)$  – динамічна в'язкість;

$G(\vec{r}_s, t)$  – модуль пружності за зсуву;  $K_0(\vec{r}_s, t)$  – модуль об'ємного стиску.

Система рівнянь (4) для тензора напружень має вигляд

$$\{\sigma\} = [D](\{\epsilon\} - \{\epsilon^t\}) - \int_{\tau_0}^{\tau} R(\tau, \nu)[D_0]\{\epsilon\} d\nu + R_0(\tau)[D_0]\{\sigma_{\text{ost}}\}. \quad (5)$$

$$\text{Тут } R(\tau, \nu) = \frac{2G(s, \tau)G(s, \nu)}{\eta(s, \nu)} e^{-\int_{\nu}^{\tau} \frac{G}{\eta} du} ; R_0(\tau) = e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{G}{\eta} du} ;$$

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2\nu \end{bmatrix} ;$$

$$[D_0] = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

$\{\sigma_{\text{ost}}\}$  – компоненти тензора залишкових початкових напружень.

В області  $\Omega$  повинні виконуватися рівняння рівноваги

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\sigma}^i + X^i = 0, \quad i = \overline{1,3} \quad (6)$$

і граничні умови

$$\bar{n} \cdot \bar{\sigma}^i = p^i \quad \text{на } \Gamma_{\sigma}, \quad i = \overline{1,3}, \quad \bar{u} = \bar{u}^0 \quad \text{на } \Gamma_u. \quad (7)$$

Тут  $X^i$  – контраваріантні компоненти вектора об'ємних сил у криволінійних координатах.

Зосередимо увагу на малих деформаціях. Зв'язок між компонентами тензора деформацій  $\{\epsilon\}$  і вектора переміщень  $\{u\}$  беремо у вигляді

$$\{\epsilon\} = [Z]\{u\}, \quad (8)$$

$$\text{де } [Z] = \begin{bmatrix} \nabla_1 & 0 & 0 \\ 0 & \nabla_2 & 0 \\ 0 & 0 & \nabla_3 \\ \nabla_2 & \nabla_1 & 0 \\ \nabla_3 & 0 & \nabla_1 \\ 0 & \nabla_3 & \nabla_2 \end{bmatrix} \quad \text{– матриця диференціального оператора геометричних}$$

співвідношень;  $\{u\} = [u^1 \ u^2 \ u^3]^T$ .

Залежності (1)–(8) складають повну систему рівнянь для визначення температурного поля  $t$ , компонент вектора переміщень  $\{u\}$ , компонент тензорів деформацій  $\{\epsilon\}$  і напружень  $\{\sigma\}$  за заданих температури навколишнього середовища  $t_c\{\tau\}$ , потужності внутрішніх джерел тепла  $Q(\bar{r}, \tau)$ , теплового потоку  $q(\tau)$ , об'ємних сил  $\bar{X}$  і зовнішнього силового навантаження  $\bar{p}$ .

Сформулюємо задачу про оптимальне керування тепловими режимами відпалу тіла. За функціонал оптимізації  $J$  беремо тривалість відпалу  $\tau^*$ , тобто

$$J = \tau^*(h), \quad (9)$$

а за критерій оптимальності – мінімальне значення функціонала (9), тобто

$$I = \min_h \tau^* . \quad (10)$$

Функцію керування  $h(\tau)$  вибирали, враховуючи технологічні можливості керування фізико-механічними процесами під час відпалу. Зокрема, нею може бути температури довкілля  $t_c(\tau)$  або зовнішньої поверхні  $t_z(\tau)$ . Обмеження на температуру  $t(\vec{r}, \tau)$ , функцію керування  $h(\tau)$ , швидкість її зміни, термонапружений стан  $\sigma_{ij}(\vec{r}, \tau)$  і залишкові напруження за розглянутих припущень набувають вигляду

$$t_0 \leq t(\vec{r}, \tau) \leq t_{\max} , \quad (11)$$

$$h_0 \leq h(\tau) \leq h_{\max} , \quad (12)$$

$$v_0 \leq \frac{dh(\tau)}{d\tau} \leq v_{\max} , \quad (13)$$

$$\max_{\Omega, \tau} \Phi(\sigma_{ij}(\vec{r}, \tau)) \leq \sigma_d(\vec{r}, \tau) , \quad (14)$$

$$\max \sigma_{\text{ost}} = \sigma_{\text{zad}} , \quad (15)$$

де в умові (14) фігурує певний критерій міцності (критерій максимальних головних напружень, критерій Мізеса, критерій Тсаї Ву тощо), який обирають, беручи до уваги використані матеріали.

У наведеному формулюванні задача оптимізації режиму відпалу функціонально-градієнтного тіла полягає в мінімізації функціонала (9) за в'язей (1)–(8) і обмежень (11)–(15).

**Методика розв'язування задачі.** Тут ключовим є розв'язування прямих задач. Оскільки геометрична конфігурація області, яку займає тіло, часто складна і система розглядуваних диференціальних рівнянь нелінійна, поєднали метод зважених залишків з кінцево-елементним [4]. За такого підходу область, яку займає тіло, розбивали на елементи; апроксимували невідомі функції на елементі розбиття; отримали на цій основі систему алгебричних рівнянь для невідомих функцій у вузлах елементів та вибирали алгоритм її розв'язання.

Задачі теплопровідності (1)–(3) і термов'язкопружності (4)–(8) за методикою, викладеною раніше [2,3], звели до систем нелінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{aligned} ([C_t] + \theta \Delta \tau_n [K_t]) \{T\}_{n+1} = ([C_t] - (1 - \theta) \Delta \tau_n [K_t]) \{T\}_n + \\ + (1 - \theta) \{f_t\}_n \Delta \tau_n + \theta \{f_t\}_{n+1} \Delta \tau_n , \end{aligned} \quad (16)$$

$$\left( [K_u] - \frac{\Delta \tau}{2} [F_1(\tau, \tau)] \right) \{U(\tau)\} = \{F_0\} + \Delta \tau \left( \frac{1}{2} [F_1(\tau, 0)] \{U(0)\} + \sum_{i=1}^{n-1} [F_1(\tau, \tau_i)] \{U(\tau_i)\} \right) , \quad (17)$$

які розв'язали методом послідовних наближень.

За відомими переміщеннями, використовуючи формулу (5), де інтеграл виражено за допомогою формули трапецій, знаходили напруження. Тоді

$$\begin{aligned} \{\sigma\} = [D][B] \{U(\tau)\} - [D]\{\varepsilon_t\} + R_0(\tau)[D_0]\{\sigma_{\text{ost}}\} - \\ - \Delta \tau \left( \frac{1}{2} R(\tau, 0)[D_0][B]\{U(0)\} + \sum_{i=1}^{n-1} R(\tau, \tau_i)[D_0][B]\{U(\tau_i)\} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} R(\tau, \tau)[D_0][B]\{U(\tau)\} \right) . \end{aligned} \quad (18)$$

Розв'язок сформульованої задачі будуємо на принципі поетапної параметричної оптимізації [5]. Тоді функцію керування на часовому проміжку  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$  апроксимувемо лінійною функцією, а її значення у момент часу  $\tau_{i+1}$  задає співвідношення

$$h_{i+1} = h_i + a_i \Delta \tau , \quad (19)$$

де  $a_i$  – максимально можлива швидкість зростання (спадання) функції керування під час нагрівання (охолодження) за врахування в'язей (1)–(8) і обмежень (11)–(15).

Таким чином, оптимізаційну задачу на проміжку часу  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$  звели до задачі пошуку максимуму швидкості зміни функції керування, а практично – до параметра  $a_i$ , значення якого знаходили з множини допустимих значень його зміни на основі інформації про напруження в тілі і задані обмеження на розглядуваному кроці. Іншими словами, не шукаємо траєкторію зміни функції керування, яка належить множині потужності континууму, а знаходимо значення кусково-лінійної функції у вузлових точках часової дискретизації розглядуваної задачі.

**Оптимальний режим відпалу порожнистого циліндра.** Запропоновану модель використали для розрахунку оптимального режиму відпалу циліндра, виготовленого з в'язкопружного функціонально-градієнтного матеріалу в напрямку осі  $Oz$  [3] (рис. 1, де  $z_1 = 0,1$  м,  $r_1 = 0,206$  м,  $r_2 = 0,211$  м,  $r_3 = 0,216$  м). Заміри теплофізичних характеристик для точок  $r_1, r_2, r_3$  наведені раніше [2].

Відпалювали циліндр у три етапи. На першому – нагрівали від початкової температури  $t_0$  до температури  $t_{\max}$ , на другому – витримували певний час при температурі  $t_{\max}$  (для релаксації залишкових напружень до заданого рівня) і на третьому – охолоджували до початкової температури.

За функцію керування вибрали температуру на зовнішній його поверхні  $t_z(\tau)$ , а на внутрішній та торцях задавали умови теплоізоляції. У початковий момент часу температура у тілі дорівнює  $t_0$ . Термонапружений стан циліндра визначали зі співвідношень (16)–(18).

Під час термооброблення повинні виконуватися технологічні обмеження:

– на першому і третьому етапах

$$t_0 \leq t(r, z, \tau) \leq t_{\max}; \quad \frac{dt}{d\tau} \leq v_{\max}; \quad \sigma_{\text{фрф}} \leq \sigma_d(r, z, t); \quad (20)$$

– на другому

$$t_z = t_{\max}; \quad \max \sigma_{\text{ост}} = \sigma_{\text{зад}}. \quad (21)$$

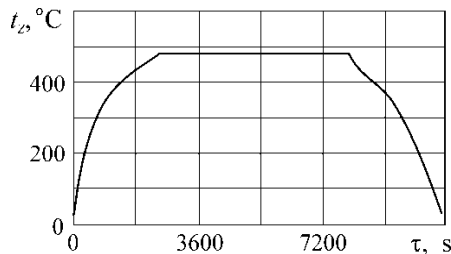


Рис. 1. Fig. 1.

Рис. 1. Оптимальний температурний режим відпалу порожнистого циліндра.

Fig. 1. Optimal annealing temperature mode of a hollow cylinder.

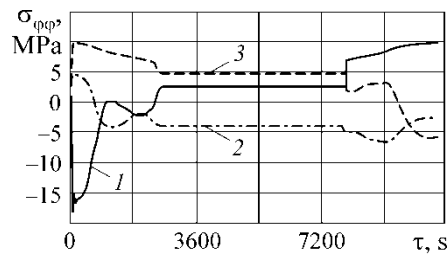


Рис. 2. Fig. 2.

Рис. 2. Термонапружений стан циліндра: 1–3 – точки заміру напружень, які відповідають координатам  $r_1, r_2, r_3$ .

Fig. 2. Thermal stress state of the cylinder:

1–3 – stress measurement points that correspond to coordinates  $r_1, r_2, r_3$ .

Критерієм оптимізації служить мінімальний час нагрівання-охолодження (10). Задачу розв'язували за розробленою методологією.

Рис. 1 ілюструє оптимальний режим відпалу; рис. 2 – відповідну зміну напружень функціонально-градієнтного за координатою  $r$  циліндра, а рис. 3 – релаксацію залишкових напружень.

Таким чином, запропоновані моделі й методи дають можливість адекватніше (порівняно з існуючими) прогнозувати реальну термомеханічну поведінку функціонально-градієнтних в'язкопружних тіл у широкому температурному діапазоні і будувати на цій основі оптимальні за швидкістю режими їхнього термооброблення за практично довільної кількості технологічних обмежень, а також враховувати їх під час автоматизації процесів. Методика числової оптимізації розвиває дослідження, описані раніше [6, 7].

Слід також враховувати залежність допустимих напружень  $\sigma_d$  від температури і просторових координат (рис. 4).

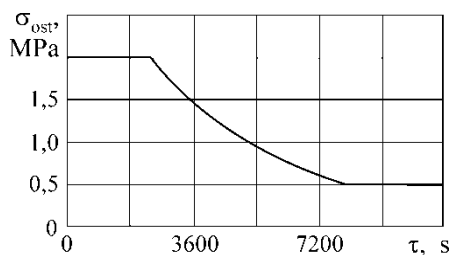


Рис. 3. Fig. 3.

Рис. 3. Релаксація залишкових напружень.

Fig. 3. Relaxation of residual stresses.

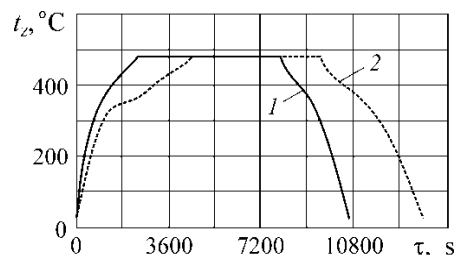


Рис. 4. Fig. 4.

Рис. 4. Оптимальні температурні режими відпалу порожнистого циліндра:  
1 – змінні по товщині і температурі допустимі напруження;  
2 – постійні, мінімальні на інтервалі відпалу.

Fig. 4. Optimal temperature modes of annealing of the hollow cylinder:  
1 – allowable stress, variable in thickness and temperature;  
2 – constants, minimum in the annealing interval.

## ВИСНОВКИ

Запропонована числова модель оптимізації дає можливість розв'язувати задачі, пов'язано з вибором оптимальних теплових режимів навантаження елементів конструкцій, які виготовлені з функціонально-градієнтних матеріалів, а також порівнювати результати з отриманими іншими методиками.

1. Кушнір Р. М., Попович В. С., Ясінський А. В. Оптимізація та ідентифікація в термомеханіці неоднорідних тіл. – Львів: Сполом, 2011. – 5. – 256 с.
2. Stashchuk M. H. and Irza E. M. Thermal stressed states of the bodies of revolution made of functionally graded materials // Materials Science. – 2019. – 55, № 3. – P. 311–319.
3. Stashchuk M. H. and Irza Ye. M. Thermal stresses in functionally graded bodies subjected to annealing // Materials Science. – 2022. – 57, № 4. – P. 511–519.
4. Zienkiewicz O. C. and Taylor R. L. Finite Element Method: Vol. 1. The Basis. – London: Butterwoth Heinemann, 2000. – 690 p.
5. Stashchuk M. H. and Irza E. M. Optimization of the modes of heat treatment of structural elements made of functionally graded materials // Materials Science. – 2020. – 56, № 1. – P. 106–111.
6. Influence of gaseous hydrogen on the strength and plasticity of high-temperature strength nickel alloys / L. Ivas'kevich, G. Maksimovich, V. Kholodnyi, V. Belov, I. Tretyak, T. Slipchenko // Soviet Materials Science. – 1984. – 20, № 3. – P. 252–255.
7. Qin F., Hembara O. V., and Chepil O. Y. Modeling of the influence of hydrogen on the bearing ability of elements of the power-generating equipment under the conditions of temperature creep // Materials Science. – 2018. – 53, № 4. – P. 532–540.

Одержано 29.03.2022