УДК 539.4

ЗАЛІКОВУВАННЯ ТРІЩИН У ТРАНСТРОПНОМУ ПРУЖНОМУ ТІЛІ ЗА КРУЧЕННЯ

В. П. СИЛОВАНЮК, Н. А. ІВАНТИШИН, М. В. ФІЛІПОВ

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Побудовано математичну модель заліковування тріщин у трансверсально-ізотропному циліндрі, що підданий деформації кручення. Задачу зведено до розв’язування інтегрального рівняння відносно переміщень поверхонь тріщини. Коли тріщина заповнена в усьому об’ємі, отримано точний аналітичний розв’язок відповідного інтегрального рівняння. Встановлено ефективність зміцнення циліндра залежно від геометричних параметрів тріщини та механічних характеристик ін’єкційного матеріалу після затверднення.

Ключові слова: *заліковування тріщин, міцність, анізотропія, кручення.*

A mathematical model of crack healing in a transversely isotropic cylinder subjected to torsional deformation has been constructed. The problem is reduced to solving the integral equation with respect to the displacements of the crack surfaces. For the case when the crack is filled in the entire volume, an exact analytical solution of the corresponding integral equation is obtained. The effectiveness of cylinder strengthening depending on the geometric parameters of the crack and the mechanical characteristics of the injection material after solidification are determined.

Keywords: *crack healing, strength, anisotropy, torsion.*

Вступ. У будівельній галузі багато уваги приділяють ін’єкційним технологіям відновлення роботоздатності пошкоджених бетонних і залізобетонних конструкцій [1]. Для надійної експлуатації відновлених таким чином споруд важливо оцінити їх залишковий ресурс. Деякі дослідження в цьому напрямі виконані раніше [2, 3]. Нижче запропоновано математичну модель заліковування тріщин у транстропному циліндрі за умов кручення.

Загальний розв’язок крайових задач теорії пружності транстропних тіл. За відсутності об’ємних сил розв’язування крайових задач лінійної теорії пружності транстропних тіл зводять до встановлення трьох функцій φ_j (j = 1, 2, 3), які задовольняють рівняння [4]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+n_j\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi_j=0\,. \tag{1}$$

Циліндрична система координат (r, θ, z) вибрана так, що вісь z збігається з віссю ізотропії пружних властивостей; n_1, n_2 є коренями рівняння:

$$A_{11}A_{44}n^2+\left[A_{13}(A_{13}+2A_{44})-A_{11}A_{33}\right]n+A_{33}A_{44}=0\,, \tag{2}$$

а $n_3=2A_{44}/\left(A_{11}-A_{12}\right)$; A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{33}, A_{44} – пружні сталі транстропного тіла.

Компоненти вектора переміщень встановлюють на основі співвідношень

Контактна особа: В. П. СИЛОВАНЮК, e-mail: vsylovanyuk@gmail.com

$$u_r(r,\theta,z)=\frac{\partial}{\partial r}(\varphi_1+\varphi_2)-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_3}{\partial\theta}, \quad u_\theta(r,\theta,z)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\varphi_1+\varphi_2)+\frac{\partial\varphi_3}{\partial r},$$

$$u_z(r,\theta,z)=\frac{\partial}{\partial z}(m_1\varphi_1+m_2\varphi_2), \tag{3}$$

а компоненти тензора напружень у площині z = const:

$$\sigma_{zz}=A_{44}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[(1+m_1)n_1\varphi_1+(1+m_2)n_2\varphi_2\right],$$

$$\sigma_{rz}=A_{44}\left(\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}\left((1+m_1)\varphi_1+(1+m_2)\varphi_2\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial\theta\partial z}\right),$$

$$\sigma_{\theta z}=A_{44}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial z}\left((1+m_1)\varphi_1+(1+m_2)\varphi_2\right)+\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial r\partial z}\right),$$

$$m_i=\frac{A_{11}n_i-A_{44}}{A_{13}+A_{44}}=\frac{(A_{13}+A_{44})n_i}{A_{33}-A_{44}n_i}, \quad i=1,\ 2. \tag{4}$$

Тут рівняння рівноваги задовольняються автоматично, а гармонічні в різних системах координат функції $\varphi_j(r,\theta,z)$ встановлюють із крайових умов.

У теорії кручення транстропних тіл обертання з віссю ізометрії, яка збігається з віссю обертання, припускають, що поперечні перерізи не викривляються і переміщення в радіальних напрямках відсутні, тобто

$$u_r=u_z=0; \quad u_\theta=u_\theta(r,z). \tag{5}$$

Тоді очевидно, що

$$\varphi_1=0, \ \ \varphi_2=0 \quad \text{і} \quad u_\theta=\frac{\partial\varphi_3}{\partial r}, \quad \sigma_{\theta z}=A_{44}\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial r\,\partial z}. \tag{6}$$

Зазначимо, що функція φ_3 є гармонічною в системі координат (r, θ, z_3), $z_3=zn_3^{-1/2}$. Ця обставина дає можливість записати функцію φ_3 у вигляді інтегрального розкладу Ганкеля

$$\varphi_3(r,z_3)=\int_0^\infty A(\xi)\xi^{-1}\exp\left(-\xi|z_3|\right)J_0(r\xi)\,d\xi, \tag{7}$$

де $J_0(r\xi)$ – функція Бесселя першого роду; $A(\xi)$ – невідома функція, яку встановлюють з крайових умов.

Міцність кругового циліндра з тріщиною за кручення. Нехай у площині ізотропії довгого транстропного циліндра міститься дископодібна тріщина з радіусом a (див. рисунок). Циліндр зазнає скруту зусиллями з моментом M. Циліндричну систему координат (r, θ, z) вибираємо з початком в центрі тріщини так, щоб площина z = 0 збігалася з площиною ізотропії пружних властивостей. Для такої схеми навантаження тіла граничне значення навантаження M_C розраховують за формулою [5]

$$M_C=\frac{3K_{\mathrm{III}C}R^4\pi^{3/2}}{8a^{3/2}}, \tag{8}$$

тут $K_{\mathrm{III}C}$ – тріщиностійкість матеріалу за поздовжнього зсуву в площині ізотропії; R – радіус циліндра.

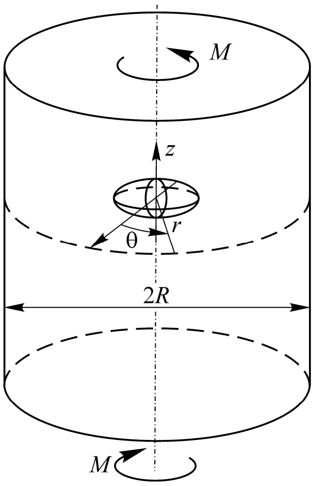

Схема кручення транстропного циліндра з дископодібною тріщиною.

Torsion scheme of a transtropical cylinder with a disk-shaped crack.

Зазначимо, що співвідношення (8) отримано в результаті наближеного розв'язку сформульованої вище задачі за припущення, що $R >> a$.

Інтегральні рівняння задачі про заліковану тріщину. Припустимо, що внаслідок заліковування тріщини введенням під тиском рідкого матеріалу, здатного полімеризуватись чи кристалізуватись через певний час, поверхні тріщини в області $0 \le r \le a_0$ $(a_0 \le a)$ перебувають в умовах механічного контакту з тонким прошарком пружного ін'єкційного матеріалу. Встановимо ефект зміцнення тіла в результаті заліковування дефекту.

У суцільному транстропному циліндрі напруження кручення $\sigma_{z\theta}$ визначають за виразом [6]

$$\sigma_{z\theta} = \frac{2Mr}{\pi R^4}. \qquad (9)$$

Компонента вектора переміщень u_0, враховуючи формулу (6), набуде значення

$$u_\theta(r,z) = \frac{2M\, r\, z}{A_{44}\, \pi\, R^4}. \qquad (10)$$

Використаємо принцип суперпозиції і розіб'ємо задачу про кручення циліндра із заповненою іншим матеріалом тріщиною на дві допоміжні: про кручення моментом M суцільного тіла без дефекту (розв'язок наведено вище) і для тіла з тріщиною, до берегів якої прикладені зусилля

$$\sigma_{z\theta}(r,0) = -\frac{2Mr}{\pi R^4} + \frac{\left[u_\theta^*(r)\right]\mu_*}{2h(r)} H(a_0 - r), \qquad \sigma_{zr}(r) = \sigma_{zz}(r) = 0, \quad 0 \le r \le a. \qquad (11)$$

Тут тонкий пружний прошарок, утворений в результаті твердження ін'єкційного матеріалу, змодельовано згідно зі зсувною гіпотезою типу Вінклера [7]; $2h$ – товщина прошарку; μ^* – модуль зсуву ін'єкційного матеріалу після затвердіння; u_θ^* – переміщення точок поверхні прошарку, за які приймаємо суму $u_\theta^*(r) = u_\theta(r) + {}$ $+u_\theta^0(r)$; $u_\theta^0(r) = \dfrac{2M\, r\, h(r)}{A_{44}\, \pi\, R^4}$; $H(r)$ – функція Гевісайда; квадратна дужка означає стрибок функції за перетину поверхні тріщини.

Для розв'язку крайової задачі (11) приймаємо, що $R >> a$ і розглядатимемо циліндр як нескінченний простір, напруження в якому задовольняють умови (11) в області $(0 \le r \le a,\ z = 0)$ і прямують до напружень у циліндрі радіуса R, що скручується моментом M.

Внаслідок симетрії крайову задачу (11) можна звести до встановлення гармонічної функції $\varphi_3(r,\ z_3)$ у півпросторі $z_3 \ge 0$ із крайових умов у площині $z_3 = 0$

$$\sigma_{z\theta}(r,0) = -\frac{2M\, r}{\pi\, R^4} + \frac{u_\theta\, \mu_*}{h} H(a_0 - r) + \frac{2M\, r\mu_*}{A_{44}\, \pi\, R^4} H(a_0 - r), \quad 0 \le r \le a,$$

$$u_\theta(r,0) = 0, \quad a < r < \infty. \qquad (12)$$

Задовольняючи ці крайові умови і використовуючи співвідношення (6), (7), для встановлення невідомої функції $A(\xi)$ отримуємо парні інтегральні рівняння:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \xi A(\xi) J_1(r\xi)\,d\xi = \frac{f(r)}{\sqrt{\mu\tilde{\mu}}}, \qquad 0 \le r < a; \\ &\int_0^\infty A(\xi) J_1(r\xi)\,d\xi = 0, \qquad a \le r < \infty. \end{aligned} \tag{13}$$

Тут

$$f(r) = \frac{2Mr}{\pi R^4} - \frac{u_\theta \mu_*}{h} H(a_0 - r) - \frac{2M\, r\mu_*}{A_{44}\,\pi R^4} H(a_0 - r). \tag{14}$$

На основі результатів праці [8] розв'язок такого роду парних інтегральних рівнянь має вигляд

$$A(\xi) = \sqrt{\frac{2\xi}{\pi\mu\tilde{\mu}}} \int_0^a \frac{J_{3/2}(\xi\eta)}{\sqrt{\eta}} d\eta \int_0^\eta \frac{r^2 f(r) dr}{\sqrt{\eta^2 - r^2}}, \tag{15}$$

де μ і $\tilde{\mu}$ – модулі зсуву транстропного матеріалу в площині тріщини і в поперечних площинах, відповідно. Оскільки невідомі переміщення поверхні тріщини u_θ встановлюють залежністю

$$u_\theta(r, 0) = \int_0^\infty A(\xi) J_1(r\xi), \qquad 0 \le r \le a, \tag{16}$$

то, враховуючи вираз (15), отримуємо рівняння для розрахунку цих переміщень:

$$u_\theta(r) = \frac{\sqrt{2}\, r}{\pi\sqrt{\mu\tilde{\mu}}} \int_r^a \frac{d\eta}{\eta^2\sqrt{\eta^2 - r^2}} \int_0^\eta \frac{\rho^2 f(\rho) d\rho}{\sqrt{\eta^2 - \rho^2}}. \tag{17}$$

Якщо тріщина заповнена повністю, тобто $a_0 = a$ і форму прошарку можна вважати сфероїдом з півосями a і c ($a >> c$), то переміщення $u_\theta(r)$ можна виразити простою аналітичною залежністю

$$u_\theta(r) = \frac{8M\, rc\beta(1-\varepsilon)}{\pi R^4 \sqrt{\mu\tilde{\mu}}(3\pi + 4\beta\varepsilon)} \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}, \qquad \varepsilon = \frac{\mu_*}{A_{44}}. \tag{18}$$

В загальному випадку розв'язок рівняння (17) можна отримати асимптотичними аналітичними або числовими методами. Коефіцієнт інтенсивності напружень в околі контуру тріщини можемо розрахувати, якщо відомі переміщення $u_\theta(r)$:

$$K_{\mathrm{III}} = \frac{A_{44}}{\sqrt{n_3}} \lim_{r \to a} \sqrt{\frac{\pi}{2(a - r)}} u_\theta(r). \tag{19}$$

Зміцнення тіла внаслідок заліковування тріщини. На прикладі повного заповнення тріщини покажемо ефективність відновлення міцності циліндра ін'єктуванням. Будемо виходити із силового критерію Ірвіна $K_{\mathrm{III}} = K_{\mathrm{III}C}$, звідки, враховуючи співвідношення (18), (19), отримаємо граничне значення навантаження

$$M_* = \frac{K_{\mathrm{III}C}\sqrt{\pi} R^4 (3\pi + 4\beta\varepsilon)}{8a^{3/2}(1-\varepsilon)}. \tag{20}$$

Звідси видно, що підбором параметра ε, який виражає відношення модуля зсуву матеріалу заповнювача до модуля зсуву основного матеріалу в поперечному напрямі, можна досягти відновлення несучої здатності циліндра до рівня граничного навантаження циліндра без тріщини $M_*^0 = \pi\tau_B R^3/2$; τ_B – границя міцності ін'єкційного матеріалу за зсуву.

Дотичні напруження, які виникають на поверхні розділу матеріалів, а згідно з розглянутою моделлю і в ін'єкційному матеріалі, такі:

$$\sigma_{r\theta}(r) = -\frac{2M\, r\mu_*}{\pi R^4\sqrt{\tilde{\mu}}}\left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{\mu}}} + \frac{4(1-\varepsilon)\beta}{\sqrt{\mu}(3\pi + 4\beta\varepsilon)}\right). \tag{21}$$

За інтенсивності зовнішніх навантажень

$$M \ge M_*^i = \frac{\pi\tau_B R^4\sqrt{\tilde{\mu}}}{2\mu_*\, a}\left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{\mu}}} + \frac{4(1-\varepsilon)\beta}{\sqrt{\mu}(3\pi + 4\beta\varepsilon)}\right)^{-1} \tag{22}$$

можливе руйнування ін'єкційного матеріалу від контуру тріщини. Для практики важливий вибір ін'єкційного матеріалу з міцністю, яка забезпечила б виконання умови $M_*^i > M_*$, тобто, щоб він не зруйнувався раніше основного. Зі співвідношень (20), (22) отримуємо необхідну міцність на зсув ін'єкційного матеріалу:

$$\tau_B \ge -\frac{K_{\mathrm{III}C}(3\pi + 4\beta\varepsilon)\mu_*}{4\sqrt{a}(1-\varepsilon)\sqrt{\pi\tilde{\mu}}}\left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{\mu}}} + \frac{4(1-\varepsilon)\beta}{\sqrt{\mu}(3\pi + 4\beta\varepsilon)}\right). \tag{23}$$

ВИСНОВКИ

Для встановлення ефективності заліковування тріщин поздовжнього зсуву розглянута схема кручення товстого циліндра із залікованою ін'єктуванням дископодібною тріщиною. За використання моделі пружного прошарку типу Вінклера задачу зведено до розв'язування інтегрального рівняння відносно функції переміщення поверхонь тріщини. Показано, що ефективність відновлення міцності циліндра з тріщиною залежить від геометричних параметрів дефекту та відношення модулів зсуву матеріалів. Із отриманих результатів слідує, що підбором ін'єкційного матеріалу можна досягти повного відновлення міцності пошкодженого тріщиною циліндра.

1. *Czarnecki L., Emmons P. H.* Naprava i ochrona konstrukcji betonowych. – Krakow: Polski Cement, 2002. – 434 s.
2. *Panasyuk V. V., Marukha V. I., and Sylovanyuk V. P.* Injection Technologies for the Repair of Damaged Concrete Structures. – Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer, 2014. – 230 p.
3. *Sylovanyuk V. P. and Ivantyshyn N. A.* Healing of cracks in anisotropic bodies // Materials Science. – 2020. – **55**, № 6. – P. 804–811.
4. *Hu H. C.* On the three-dimensional problems of the theory of elasticity of a transversely isotropic body // Deta Sci. Sinica. – 1953. – **2**. – P. 145–151.
5. *Chen E. P. and Sih G. C.* Torsional and anti-plane strain delamination of an orthotropic layered composite // Proc. of the 13th Midwestern Mechanics Conf. (Pittsburgh, Pennsylvania, August 13–15, 1973). – Pittsburgh, 1973. – P. 763–776.
6. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат, 1957. – 464 с.
7. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. – М. Наука, 1977. – 640 с.
8. *Sneddon I. H.* Mixed Boundary Value Problems in Potential Theory. – Amsterdam: North Holland Publishing Company, 1986. – 284 p.

Одержано 07.07.2022