

УДК 539.3

РОЗРАХУНОК НАПРУЖЕНЬ У КОМПОЗИТНИХ СМУГАХ ІЗ ТРІЩИНАМИ НА ОСНОВІ МОДИФІКОВАНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З УРАХУВАННЯМ КОНТАКТУ ЇХ БЕРЕГІВ

М. О. МАКСИМОВИЧ¹, О. В. МАКСИМОВИЧ^{1,2}, М. ДУТКЕВИЧ²

¹ Університет технологічно-природничий, Бидгощ, Польща;

² Національний університет "Львівська політехніка"

Розроблено алгоритм дослідження напружень біля тріщин в анізотропній смугі, який ґрунтується на методі сингулярних інтегральних рівнянь. Ядра рівнянь записано на основі розв'язку типу Гріна, тому граничні умови на прямолінійних межах смуги виконуються тотожно. Розв'язок Гріна подано як суму аналітичних функцій, які мають полюси, та функцій, які визначають через швидкозбіжні інтеграли. Інтегральні рівняння розв'язано числово методом механічних квадратур. Досліджено напруження у композитних смугах з тріщинами, які перебувають під дією розтягу, чистого згину, триточкового згину та зосереджених сил, в тому числі за врахування контакту берегів тріщин.

Ключові слова: *анізотропна смуга, тріщини, розв'язок Гріна, контакт берегів тріщин, сингулярні інтегральні рівняння.*

An algorithm for studying stresses near curvilinear cracks in an anisotropic strip is developed, which is based on the method of singular integral equations. The kernels of the integral equations are written on the basis of a Green's-type solution, so the boundary conditions on the rectilinear boundaries of the strip are fulfilled identically. Green's solution is obtained for isolated and periodically placed cracks. Stresses in composite strips with cracks under the action of tension, pure bending, three-point bending and concentrated forces are determined.

Keywords: *anisotropic strip, cracks, Green's solution, contact of crack's edge, singular integral equations.*

Вступ. Під час вивчення напружень в ізотропних смугах часто застосовують метод інтегральних рівнянь з ядрами, побудованими на розв'язках типу Гріна [1, 2], коли умови на прямолінійних межах виконуються тотожно. Аналогічний підхід використовують також і для анізотропних смуг з тріщинами. Досліджували здебільшого ортотропні матеріали [3, 4] з прямолінійними тріщинами, які перпендикулярні або паралельні до горизонтальних меж, що пов'язано зі спрощенням інтегральних рівнянь. Ядра цих рівнянь для смуг за загальної анізотропії побудовано раніше [5] і використано для вивчення напружень біля прямолінійної тріщини.

Ядра інтегральних рівнянь будують, як правило, застосовуючи інтегральне перетворення Фур'є, і виражають через невласні повільно збіжні інтеграли від коливних функцій [3]. Тому розроблено способи поліпшення збіжності таких інтегралів, засновані на виділенні розв'язку відповідної задачі для півплощини. Для смуг зі загальною анізотропією такий розв'язок наведено в праці [5]. Зазначимо, що він ґрунтується на формалізмі Стро і достатньо складний.

За згину смуги тріщини знаходяться на ділянках стиску, тому необхідно враховувати контакт їх берегів. Такі задачі вивчені недостатньо [6]. Нижче інте-

гральні рівняння для смуг з тріщинами [7, 8] розв'язані числово. Досліджено концентрацію напружень у смугах за різних типів навантаження, в тому числі з урахуванням контакту берегів тріщин.

Формулювання задачі. Розглянемо анізотропну смугу шириною H , яка займає область $-H < y < 0$ з ненавантаженими межами. Вважаємо, що смуга послаблена тріщинами, які розглядаємо як розрізи вздовж кривих L_j , $j = 1, \dots, J$, і навантажена зосередженими силами та зусиллями на нескінченності, береги тріщин можуть контактувати. Розв'язок запишемо через потенціали Лехніцького $\Phi(z_1)$, $\Psi(z_2)$, де $z_j = x + s_j y$, s_j – корені з додатною уявною частиною характеристичного рівняння $\alpha_{11}s^4 - 2\alpha_{16}s^3 + (2\alpha_{12} + \alpha_{66})s^2 - 2\alpha_{26}s + \alpha_{22} = 0$, α_{ij} – пружні сталі в законі Гука [7].

Модифіковане інтегральне зображення. Розглянемо смугу із вільними від навантаження межами. Побудуємо інтегральні рівняння для смуги з тріщинами так, щоб умови на межі виконувались автоматично. Для цього знайдемо [7] комплексні потенціали Лехніцького Φ_j^D , Ψ_j^D ($j = 1, 2$), які є розв'язком задачі теорії пружності для суцільної смуги з однорідними умовами на межі за умови, що ці функції мають такі особливості в довільній точці смуги (x_0, y_0) :

$$\Phi_j^D \sim -\frac{A_j}{z_1 - z_{10}}, \quad \Psi_j^D \sim -\frac{B_j}{z_2 - z_{20}}, \quad j = 1, 2, \quad (1)$$

де $z_{10} = x_0 + s_1 y_0$, $z_{20} = x_0 + s_2 y_0$,

$$A_1 = -\frac{is_1}{2\pi\Delta_1}, \quad A_2 = \frac{i}{2\pi\Delta_1}, \quad B_1 = -\frac{is_2}{2\pi\Delta_2}, \quad B_2 = \frac{i}{2\pi\Delta_2},$$

$$\Delta_1 = \alpha_{11}(s_1 - s_2)(s_1 - \bar{s}_1)(s_1 - \bar{s}_2), \quad \Delta_2 = \alpha_{11}(s_2 - s_1)(s_2 - \bar{s}_1)(s_2 - \bar{s}_2). \quad (2)$$

Позначимо ці потенціали $\Phi_j^D(z_1, T)$, $\Psi_j^D(z_2, T)$, де T – точка з координатами (x_0, y_0) . Тоді потенціали Лехніцького для смуги з тріщинами з вільними від навантаження межами такі [7, 8]:

$$\Phi(z_1) = \int_L [\Phi_1^D(z_1, T)g_1'(s) + \Phi_2^D(z_1, T)g_2'(s)]ds + \Phi_D(z_1),$$

$$\Psi(z_2) = \int_L [\Psi_1^D(z_2, T)g_1'(s) + \Psi_2^D(z_2, T)g_2'(s)]ds + \Psi_D(z_2), \quad (3)$$

де $g_1' = d(u^+ - u^-)/ds$, $g_2' = d(v^+ - v^-)/ds$, u^\pm , v^\pm – переміщення на лівому і правому берегах тріщини відносно вибраного на ній напрямку, $L = L_1 + \dots + L_J$, T – точка $T(\xi, \eta) \in L$, за якою інтегруємо, ds – диференціал дуги. Тут потенціали Φ_D , Ψ_D – розв'язки задачі теорії пружності для суцільної смуги з ненавантаженою межею за дії прикладених на нескінченності зусиль та (або) зосереджених сил. Інтегральні рівняння для знаходження невідомих $g_{1,2}'$ отримуємо після підставлення потенціалів з рівняння (3) у граничні умови, які забезпечують відсутність зусиль на берегах тріщин. Алгоритм їх розв'язування наведено раніше [7, 9].

Розв'язок типу Гріна для смуги. Спочатку знайдемо потенціали Лехніцького для смуги з полюсами:

$$\Phi^D \sim \frac{A}{z_1 - z_{10}}, \quad \Psi^D \sim \frac{B}{z_2 - z_{20}}, \quad \text{де } A, B - \text{ сталі.}$$

Потенціали $F(z) = (\Phi^D(z) \quad \Psi^D(z))^T$, за яких межі смуги ненавантажені, можна записати у вигляді [8]

$$F(z) = \sum_{n=1}^{2N} F_n(z) + \int_0^{\infty} [g_N(\lambda) \exp(-i\zeta\lambda) + C(i\lambda)\bar{g}_N(\lambda) \exp(i\zeta\lambda)] d\lambda, \quad (4)$$

де N – довільно вибране ціле число ($N > 0$),

$$g_N(\lambda) = M(-i\lambda)^N M'(-i\lambda) S(\lambda), \quad M(D) = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix},$$

$$M_{11} = c_1 \bar{c}_1 \exp(\bar{\beta}_1 D) + c_2 \bar{d}_1 \exp(\bar{\beta}_3 D), \quad M_{12} = c_1 \bar{c}_2 \exp(\bar{\beta}_2 D) + c_2 \bar{d}_2 \exp(\bar{\beta}_4 D),$$

$$M_{21} = d_1 \bar{c}_1 \exp(\beta_1 D) + d_2 \bar{d}_1 \exp(\beta_3 D), \quad M_{22} = d_1 \bar{c}_2 \exp(\beta_2 D) + d_2 \bar{d}_2 \exp(\beta_4 D),$$

$$C(D) = \begin{pmatrix} c_1 \exp(\beta_1 D) & c_2 \exp(\beta_2 D) \\ d_1 \exp(\beta_3 D) & d_2 \exp(\beta_4 D) \end{pmatrix}, \quad M'(D) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} M_{22} - 1 & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{11} - 1 \end{pmatrix},$$

$$\Delta = (M_{11} - 1)(M_{22} - 1) - M_{12} M_{21}, \quad S(\lambda) = \begin{pmatrix} S_1(\lambda) \\ S_2(\lambda) \end{pmatrix}, \quad F_k(z) = \begin{pmatrix} \Phi_k(z) \\ \Psi_k(z) \end{pmatrix},$$

$$S_1 = \frac{i}{H} [A \exp(i\zeta_{10}\lambda) + c_1 \bar{A} \exp(i\bar{\zeta}_{10}\lambda) + c_2 \bar{B} \exp(i\bar{\zeta}_{20}\lambda)],$$

$$S_2 = \frac{i}{H} [B \exp(i\zeta_{20}\lambda) + d_1 \bar{A} \exp(i\bar{\zeta}_{10}\lambda) + d_2 \bar{B} \exp(i\bar{\zeta}_{20}\lambda)], \quad \zeta_{j0} = z_{j0} / H,$$

$$c_1 = \beta_3 / \delta, \quad c_2 = \beta_4 / \delta, \quad d_1 = -\beta_1 / \delta, \quad d_2 = -\beta_2 / \delta, \quad \delta = s_1 - s_2,$$

$$\beta_1 = s_1 - \bar{s}_1, \quad \beta_2 = s_1 - \bar{s}_2, \quad \beta_3 = s_2 - \bar{s}_1, \quad \beta_4 = s_2 - \bar{s}_2.$$

Функції Φ_k, Ψ_k з непарними номерами визначаємо за рекурентними формулами

$$\Phi_1(z) = \frac{A}{z - z_{10}} + c_1 \frac{\bar{A}}{z - z_{10}} + c_2 \frac{\bar{B}}{z - z_{20}}, \quad \Psi_1(z) = \frac{B}{z - z_{20}} + d_1 \frac{\bar{A}}{z - z_{10}} + d_2 \frac{\bar{B}}{z - z_{20}}, \quad (5)$$

$$\Phi_{2k+1}(z) = c_1 \bar{c}_1 \Phi_{2k-1}(z + \bar{\beta}_1 H) + c_2 \bar{d}_1 \Phi_{2k-1}(z + \bar{\beta}_3 H) + c_1 \bar{c}_2 \Psi_{2k-1}(z + \bar{\beta}_2 H) + c_2 \bar{d}_2 \Psi_{2k-1}(z + \bar{\beta}_4 H),$$

$$\Psi_{2k+1}(z) = d_1 \bar{c}_1 \Phi_{2k-1}(z + \bar{\beta}_1 H) + d_2 \bar{d}_1 \Phi_{2k-1}(z + \bar{\beta}_3 H) + d_1 \bar{c}_2 \Psi_{2k-1}(z + \bar{\beta}_2 H) + d_2 \bar{d}_2 \Psi_{2k-1}(z + \bar{\beta}_4 H), \quad k = 1, 2, \dots,$$

а з парними – через функції з непарними номерами:

$$\Phi_{2k}(z) = c_1 \bar{\Phi}_{2k-1}(z + \beta_1 H) + c_2 \bar{\Psi}_{2k-1}(z + \beta_2 H),$$

$$\Psi_{2k}(z) = d_1 \bar{\Phi}_{2k-1}(z + \beta_3 H) + d_2 \bar{\Psi}_{2k-1}(z + \beta_4 H).$$

Функції в зображеннях (3) будуть:

$$\Phi_j^D = \Phi^D, \quad \Psi_j^D = \Psi^D, \quad \text{якщо } A = -A_j, \quad B = -B_j, \quad j = 1, 2.$$

В інтегралах (4) підінтегральні функції експоненційно загасають за великих значень аргументу λ , причому тут вони мають порядок $O(\exp(-2\gamma N\lambda))$, де $\gamma = \min(\text{Im } s_1, \text{Im } s_2)$ [8]. Потенціали за дії зосереджених сил у смузі наведено раніше [8].

Результати розрахунків. Обчислювали для ізотропного матеріалу, скло- та бор-епоксиду, модулі пружності E_1, E_2 , модуль зсуву G та коефіцієнти Пуассона ν_{12}, ν_{21} для яких, відповідно, такі [7]: для скло-епоксиду 54; 18 та 9 GPa; 0,0833 та 0,25; бор-епоксиду 207; 21 і 7 GPa; 0,0304 та 0,3.

Проаналізуємо також випадки, коли кут між напрямком з максимальним модулем пружності і віссю Ox дорівнює φ .

Тестування алгоритму. Для цього розглянемо ортотропну смугу з такими характеристиками [3]: $E_1 = 170,65$ GPa, $E_2 = 55,16$ GPa, $G = 4,83$ GPa, $\nu_{12} = 0,1114$ (рис. 1).

Вважаємо, що півдовжина прямолінійної вертикальної тріщини $a = 0,25H$, а її центр розміщений в точці $(0, -0,45H)$.

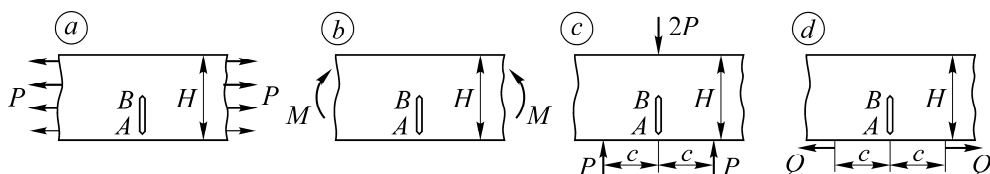


Рис. 1. Схеми навантаження смуги: *a* – поздовжній розтяг зусиллями p ; *b* – згин моментами M ; *c* – триточковий згин силою $(0, -2P)$, прикладеною в точці $(0, 0)$, та силами $(0, P)$, прикладеними в точці $(\pm 2H, -H)$; *d* – розтяг пластини двома горизонтальними силами $(\mp P, 0)$, прикладеними в точці $(\pm 2H, -H)$; A, B – нижня і верхня вершини тріщини.

Fig. 1. Strip loading schemes: *a* – longitudinal tension by forces p ; *b* – bending moments M ; *c* – three-point bending by force $(0, -2P)$, applied at the point $(0, 0)$ and forces $(0, P)$, applied at the point $(\pm 2H, -H)$; *d* – the tension of the plate by two horizontal forces $(\mp P, 0)$, applied at the point $(\pm 2H, -H)$; A, B are the lower and upper peaks of the crack.

Розраховані значення відносних коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) $F_I(A)$ і $F_I(B)$ у нижній і верхній вершинах A, B тріщини наведено в табл. 1. Тут $F_I = K_I / (p\sqrt{\pi a})$ – за розтягу смуги; $F_I = H^2 K_I / (6M\sqrt{\pi a})$ – за згину моментом; $F_I = HK_I / (12P\sqrt{\pi a})$ – за триточкового згину; $F_I = HK_I / (4P\sqrt{\pi a})$ – за розтягу силами.

Таблиця 1. Відносні КІН для вертикальної тріщини

Навантаження	$F_I(A)$	$F_I(B)$
Розтяг	1,1778 (1,1778)	1,1257 (1,1255)
Згин	0,3771 (0,3771)	-0,1399 (-0,1399)
Триточковий згин	0,2608 (0,2607)	0,0444 (0,449)
Розтяг силами	0,5367 (0,5363)	0,1443 (0,1439)

У дужках – значення, розраховані [3] іншим методом. Як бачимо, вони практично не відрізняються.

Криволінійна тріщина. Розглянемо центральну тріщину, розміщену на параболі. Рівняння для тріщини має вигляд

$$x = k(t^2 - 1), \quad y = bt - H/2, \quad -1 < t < 1,$$

де k – стала, яка характеризує викривлення тріщини (якщо $k=0$, тріщина прямолінійна), $2b$ – відстань між її вершинами.

Розраховували для ізотропного матеріалу та бор-епоксиду при $b = 0,3H$, $0 < k < 0,3H$. Відносні значення КІН $F_{I,II} = K_{I,II} / (p\sqrt{\pi b})$ у верхній вершині тріщини за розтягу смуги зусиллями p залежно від відношення k/H наведено на рис. 2.

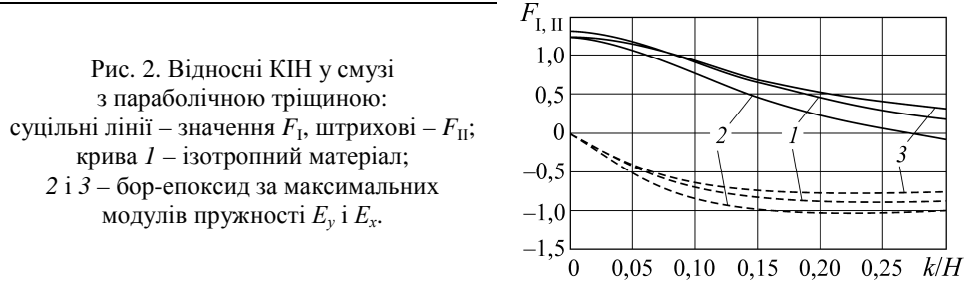


Рис. 2. Відносні КІН у смугі з параболічною тріщиною: суцільні лінії – значення F_I , штрихові – F_{II} ; крива 1 – ізотропний матеріал; 2 і 3 – бор-епоксид за максимальних модулів пружності E_y і E_x .

Fig. 2. Relative stress intensity coefficients (SIF) in a strip with a parabolic crack: solid lines – F_I value, dashed – F_{II} ; curve 1 is an isotropic material; curves 2 and 3 are boron-epoxide, when the modulus of elasticity E_y and E_x are maximum.

КІН для анізотропного матеріалу з максимальною жорсткістю у горизонтальному напрямку виявились близькі до КІН для ізотропного (рис. 2). Найменші значення КІН за максимальної жорсткості у вертикальному напрямку.

Врахування контакту берегів тріщин. Береги тріщин, які перебувають у зонах стиску, можуть контактувати. Задача про визначення напружень біля них ускладнюється, оскільки нелінійна. Тому для дослідження КІН у смугах, в тому числі ізотропних, як правило, використовують прямі алгоритми, застосовні до лінійних задач. За такого підходу розглядають тільки тріщини у смугах, які розміщені лише в зонах розтягу [6].

Загалом стрибки переміщень повинні задовольняти нерівність $[u_n] \geq 0$ (u_n – проекція вектора переміщень на нормаль до тріщини), що забезпечує умову непроникності берегів тріщин, яку можна записати через КІН, використовуючи співвідношення [7, 9, 10]

$$[u_n] = 4a_{11} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2\pi}} D, \quad (6)$$

де $D = u_{11}K_I + u_{12}K_{II}$; r – відстань від вершини, $u_{11} = -\text{Re} \left[i(s_1 - \bar{s}_2) g_2 \bar{g}_1 \right]$, $u_{12} = \text{Re} \left[i(s_1 - \bar{s}_2) d_2 \bar{g}_1 \right]$, $d_j = \cos \alpha + s_j \sin \alpha$, $g_j = \sin \alpha - s_j \cos \alpha$, α – кут між дотичною до тріщини у вершині і віссю Ox . Отже, знайдені КІН мають фізичний сенс, якщо визначена на їх основі величина D є додатна. За контакту берегів тріщини біля вершини справедлива умова $D = 0$. Зазначимо, що для ізотропних матеріалів (для яких $s_1 = s_2 = i$) звідси випливає відома умова контакту берегів тріщини біля її вершини: $K_I = 0$ [1].

Результати розрахунків. Для розв'язування задач за врахування контакту берегів тріщин використаємо алгоритм, який для анізотропних пластин наведений у працях [9, 10].

Розглянемо смугу з центральною вертикальною тріщиною півдовжиною a , яка перебуває під дією згинних моментів M , коли береги контактують біля верхньої її вершини (див. рис. 1b). Відомий наближений розв'язок цієї задачі за припущення відсутності контакту берегів тріщин. Оцінимо похибки, які виникають при цьому. Дослідимо ізотропний матеріал, бор- та скло-епоксидну пластини. В табл. 2 наведено відносні КІН у нижній вершині: $F_I^{(0)}$ – без урахування контакту

берегів тріщин; F_I – з урахуванням. Тут $F_{I,II} = K_{I,II} / (\sigma_M \sqrt{\pi a})$, де $\sigma_M = 6M / H^2$ – напруження у суцільній смузі на нижній її межі. Подано також значення $s_{\max} = |\sigma|_{\max} / \sigma_M$, де $|\sigma|_{\max}$ – максимальні контактні напруження на тріщині.

Таблиця 2. Відносні КІН та контактні напруження у смузі за згину

a/H	Ізотропія				Бор-епоксид, $\varphi = 90^\circ$			Скло-епоксид, $\varphi = 90^\circ$		
	$F_I^{(0)}$	$F_I^{(0)}$ [6]	F_I	$ \sigma _{\max} / \sigma$	$F_I^{(0)}$	F_I	$ \sigma _{\max} / \sigma$	$F_I^{(0)}$	F_I	$ \sigma _{\max} / \sigma$
0,05	0,05	0,005	0,0545	0,0961	0,05	0,0545	0,0961	0,05	0,0545	0,0961
0,1	0,1001	0,1001	0,1095	0,1917	0,1001	0,1094	0,1918	0,1001	0,1095	0,1917
0,2	0,2023	0,2022	0,2243	0,3805	0,2018	0,223	0,3809	0,2021	0,2239	0,3803
0,3	0,3196	0,3196	0,3603	0,5705	0,3161	0,3542	0,5713	0,3183	0,3582	0,5709
0,4	0,5183	0,5185	0,5895	0,8087	0,4987	0,5643	0,7956	0,5119	0,5815	0,8037

У таблиці для ізотропного матеріалу наведені відносні КІН без урахування контакту берегів тріщин [6]. Значення КІН, розраховані за різними методами, практично однакові. За малих довжин тріщин (якщо $a/H < 0,22$) їх можна визначати наближено, не враховуючи контакту берегів.

Виявили, що значення КІН для бор-епоксидної смуги за кута $\varphi = 0^\circ$ такі ж, як і за кута 90° (табл. 2). Аналогічні результати отримали і для інших матеріалів ортотропних смуг з вертикальними тріщинами за згину та розтягу.

Розглянемо смугу з центральною тріщиною півдовжиною a , яка нахилена під кутом α до осі Ox . Вважаємо, що смуга перебуває під дією згинного моменту M та врахуємо контакт берегів тріщин. Розрахували відносні значення КІН $F_{I,II} = K_{I,II} / (\sigma_M \sqrt{\pi a})$ для нижньої вершини тріщини в ізотропній смузі залежно від кута α (рис. 3а).

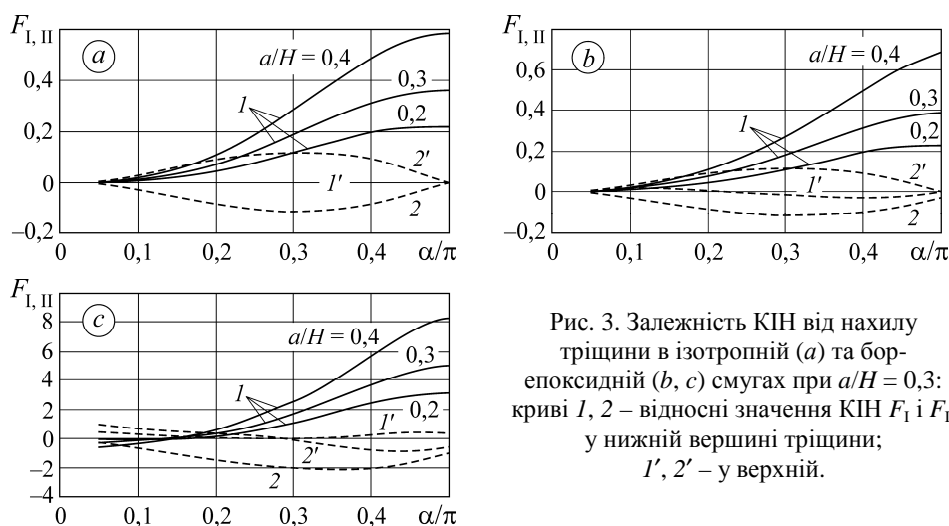


Рис. 3. Залежність КІН від нахилу тріщини в ізотропній (а) та бор-епоксидній (b, c) смугах при $a/H = 0,3$: криві 1, 2 – відносні значення КІН F_I і F_{II} у нижній вершині тріщини; $1', 2'$ – у верхній.

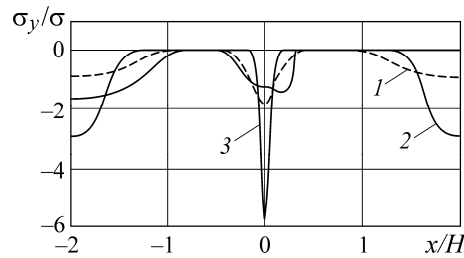
Fig. 3. Dependence of SIF on the slope of the crack in the isotropic (a) and boron-epoxy strips (b, c) at $a/H = 0,3$: curves 1, 2 – relative values of SIF F_I and F_{II} in the lower crack tips; $1', 2'$ – in the upper tips.

Аналогічні результати розрахунків для бор-епоксидної пластини з повернутими осями ортотропії на 45° до осі Ox ілюструє рис. 3b. На рис. 3c наведені результати визначення КІН за триточкового згину, де за відносні КІН прийнято $F_{I,II} = HK_{I,II} / (P\sqrt{\pi a})$. Тут описано характерний для анізотропних пластин випадок, коли за малих кутів нахилу тріщин у нижній вершині КІН K_I є від'ємним і береги не контактують.

Контактні напруження в анізотропних пластинах можуть бути достатньо великі. Їх розраховували для горизонтальної центральної тріщини півдовжиною $2H$ у бор-епоксидній смузі за триточкового згину за кута φ (рис. 4).

Рис. 4. Контактні напруження на горизонтальній тріщині:
1 – $\varphi = 0^\circ$; 2 – 45° ; 3 – 90° .

Fig. 4. Contact stresses at a horizontal crack:
1 – $\varphi = 0^\circ$; 2 – 45° ; 3 – 90° .



Найбільші напруження виникають тоді, коли жорсткість матеріалу максимальна в напрямку осі Oy .

Оцінка достовірності розрахунку контактних напружень. Для обох вершин тріщини розраховували величину D , яку містить умова непроникливості (6). Для вершини, де контакт відсутній, отримували $D > 0$, а для вершин, біля яких береги контактують, $0 \leq D < 10^{-4}$. Точність розрахунків перевіряли так: розв'язували задачу для смуги з тріщиною за відомим алгоритмом [9, 10] та знаходили контактні напруження, КІН та стрибки нормальних переміщень, а також цю ж задачу, коли додатково до берегів тріщини прикладені нормальні зусилля, які дорівнюють знайденим заздалегідь контактним напруженням. Її розв'язували як класичну в лінійній поставі. Проілюструємо цей підхід для бор-епоксидної смуги з центральною тріщиною півдовжиною $0,4H$, нахиленою під кутом $\pi/12$ до осі Ox , коли максимальним є модуль пружності E_y , за триточкового згину (рис. 5).

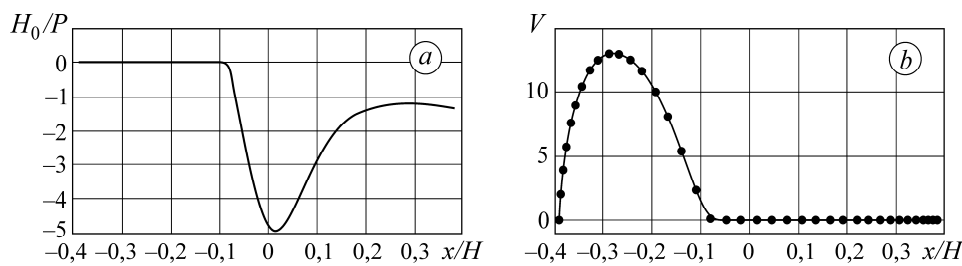


Рис. 5. Зіставлення стрибків переміщень: *a* – контактні напруження; *b* – нормальні переміщення $V = v_n / (PH) \cdot 10^{-12}$; точки – переміщення, розраховані за класичним методом за дії прикладеного навантаження та додаткових зусиль на берегах тріщини, що дорівнюють визначеним контактним напруженням з рис. 5a.

Fig. 5. Comparison of displacement discontinuity: *a* – contact stresses; *b* – normal displacements $V = v_n / (PH) \cdot 10^{-12}$; points – displacements calculated according to the classical method under the action of the applied load and additional forces on the edges of the crack, which are equal to the determined contact stresses from Fig. 5a.

Як бачимо, знайдені значення нормальних переміщень практично збігаються, що вказує на ефективність використаного методу [9, 10] для дослідження контактної взаємодії берегів тріщин.

ВИСНОВКИ

Розроблено підхід для дослідження напружень у композитній смузі з тріщинами, який ґрунтується на методі інтегральних рівнянь. Ядра сингулярних рівнянь побудовано на розв'язках типу Гріна для смуги, тому граничні умови на прямолінійних межах виконуються тотожно. Розв'язок Гріна зображено у вигляді суми полюсів та інтегралів від експоненційно загасальних функцій на нескінченності. Вивчено напруження у композитних смугах з тріщинами, які виникають під дією розтягу, чистого згину, триточкового згину та зосереджених сил. Встановлено, що для анізотропних смуг з параболічною тріщиною за максимальної жорсткості матеріалу у горизонтальному напрямку КІН близькі до таких для ізотропного. Найменшими виявились їх значення за максимальної жорсткості у вертикальному напрямку: на тріщинах максимальні контактні напруження виникають від зосереджених сил, які діють у напрямку з максимальним модулем пружності.

Детально досліджено задачі для смуг, в яких береги тріщин контактують. Наведено умови непроникнення та контакту берегів тріщин в анізотропних матеріалах. Для прилеглих до вершин ділянок їх записано через КІН. Запропоновано підхід перевірки достовірності знайдених контактних напружень, який полягає у повторному розв'язуванні допоміжних задач для тріщин у смузі у лінійній поставі. У центральних нахилених тріщинах в анізотропних і ізотропних смугах за чистого та триточкового згинів береги контактують. За малих довжин тріщин КІН в анізотропних смугах близькі до КІН в ізотропній.

1. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
2. *Theotokoglou E. N. and Tsamasphyros G. J.* Integral equations for any configuration of curved cracks and holes in an elastic strip // *Ingenieur-Archiv.* – 1987. – **57**. – P. 3–15.
3. *Kaya A. C. and Erdogan F.* Stress intensity factors and COD in an orthotropic strip // *Int. J. of Fract.* – 1980. – **16**, № 2. – P. 171–190.
4. *Baghestani A. M., Fotuhi A. R., and Fariborz S. J.* Multiple interacting cracks in an orthotropic layer // *Archive of Appl. Mech.* – 2013. – **83**, № 11. – P. 1549–1567.
5. *Huang H. and Kardomateas G. A.* Stress intensity factors for a mixed mode center crack in an anisotropic strip // *Int. J. of Fract.* – 2001. – **108**, № 4. – P. 367–381.
6. *Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: в 2-х т. /* Под ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – Т. 1. – С. 448.
7. *Vozhydarnyk V. and Maksymovych O.* Elastic equilibrium of an anisotropic half plane with periodic system of holes and cracks // *Materials Science.* – 2001. – **37**, № 6. – P. 857–865.
8. *Максимович М. О., Харченко Є. В.* Визначення напружень у анізотропній смузі з отворами на основі сингулярних інтегральних рівнянь та розв'язку Гріна // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2020. – **63**, № 3. – С. 69–77.
9. *Calculation of trajectories and the rate of growth of curvilinear fatigue cracks in isotropic and composite plates /* H. Pokhmurska, O. Maksymovych, A. Dzyubyk, and I. Dzyubyk // *Mater. Sci. and Eng.* – 2018. – **373**, № 1. – P. 012024.
10. *Божидарнік В. В., Максимович О. В.* Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами. – Луцьк: ЛДТУ, 2003. – 226 с.

Одержано 26.02.2021