

ДИФРАКЦІЯ SH-ХВИЛІ НА ТОНКОМУ МІЖФАЗНОМУ ДЕФЕКТІ СКІНЧЕНОЇ ШИРИНИ У З'ЄДНАННІ ПРУЖНОГО ШАРУ З ПІВПРОСТОРОМ

Д. Б. КУРИЛЯК, З. Т. НАЗАРЧУК, М. В. ВОЙТКО, Я. П. КУЛИНИЧ

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Розв'язано задачу дифракції пружної SH-хвилі на скінченному міжфазному дефекті, утвореному на межі жорсткого з'єднання шару з півпростором. Моделлю дефекту є смужка на поверхні з'єднання зі заданою на ній імпедансною граничною умовою. Методом Вінера–Гопфа задачу зведено до розв'язання нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь. Розв'язок використано для дослідження особливостей поведінки поля зміщень на вільній від напружень поверхні пружного шару.

Ключові слова: дифракція, дефект, імпеданс, пружний шар, метод Вінера–Гопфа.

The elastic SH-wave diffraction from the finite defect that is formed on the boundary of the rigid joint between a layer and a half-space is considered. The model of the defect is an impedance strip on the surface of the joint. Using the Wiener–Hopf technique, the problem is reduced to an infinite system of linear algebraic equations. Its solution is used to clarify the features of the displaced field on the surface of an elastic layer which is free from the stress.

Keywords: diffraction, defect, impedance, elastic layer, Wiener–Hopf technique.

Вступ. З розвитком оптичних методів візуалізації полів зміщень на поверхнях матеріалів і конструкцій виникає потреба створити ефективні засоби діагностування плоско-шаруватих структур [1]. Мета цього дослідження – вивчити закономірності формування таких полів за наявності міжфазних дефектів. Для цього використовували просту модель жорсткого з'єднання плоского пружного шару з півпростором (інтерфейсом), а дефект на поверхні з'єднання задавали імпедансною смужкою. Вважали, що таку структуру опромінює нормальна поперечна SH-хвиля плоского шару. Задачу про знаходження поля зміщень зводили до мішаної крайової задачі теорії дифракції для плоского хвильовода з різними властивостями поверхонь, яку розв'язали методом Вінера–Гопфа.

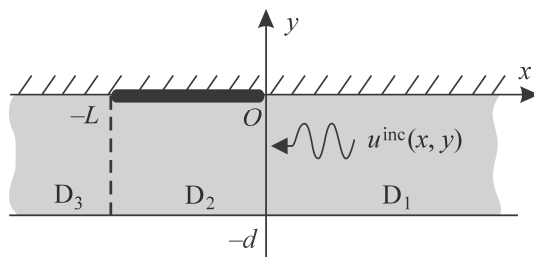


Рис. 1. Тонкий міжфазний дефект на межі з'єднання пружного шару з півпростором.

Fig. 1. Thin interface defect on the boundary of the joint of an elastic layer and the half-space.

Модель придатна для знаходження полів зміщень на вільній поверхні шару та інформаційних параметрів діагностування міжфазних дефектів. Раніше [1, 2] досліджували частковий випадок, коли таким дефектом є тріщина. Огляд літературних джерел, пов'язаних з вивченням дифракції SH-хвиль на дефектах типу тріщин, наведено в праці [3]. Вплив імпедансного параметра тріщин на характерис-

тики акустичного поля подано в огляді [4], а в працях [5–10] проаналізовано його використання для моделювання розсіювання хвиль у різних фізичних задачах. Загальні математичні підходи до розв’язання задач дифракції пружних хвиль наведено у працях [11–13], а основні методи розв’язування функціональних рівнянь типу Вінера–Гопфа – у публікаціях [14–16].

Формулювання задачі. Нехай у декартовій системі координат $O(x, y, z)$ задано абсолютно жорстке з’єднання плоского шару $P: \{x \in (-\infty, \infty), y \in [-d, 0], z \in (-\infty, \infty)\}$ з півпростором $S: \{x \in (-\infty, \infty), y > 0, z \in (-\infty, \infty)\}$. Імпедансна смужка $\Gamma: \{x \in (-L, 0), y = 0, z \in (-\infty, \infty)\}$ на плоскій поверхні цього з’єднання є моделлю міжфазного дефекту (рис. 1). Таку структуру розглядаємо як послідовне з’єднання трьох плоских хвилеводів $D_1: \{x > 0, y \in [-d, 0], z \in (-\infty, \infty)\}$, $D_2: \{x \in (-L, 0), y \in [-d, 0], z \in (-\infty, \infty)\}$ та $D_3: \{x < -L, y \in [-d, 0], z \in (-\infty, \infty)\}$. Дефект у хвилевідній області D_2 опромінює поперечна, горизонтально поляризована нормальна SH-хвиля $u^{\text{inc}}(x, y)$, яка поширюється з області D_1 у від’ємному напрямі осі Ox . Вважали, що залежність пружного поля від часу гармонічна $e^{-i\omega t}$; надалі цей множник опускали. Дифракційні процеси у такій системі описує одна скалярна функція $u = u(x, y)$, пов’язана з полем зміщень $\mathbf{u} \equiv \vec{e}_z u(x, y)$. Звідси відповідну крайову дифракційну задачу формулюємо так:

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u + k^2 u = 0, \quad (x, y) \in P, \quad (1)$$

$$\partial_y u^{\text{tot}}(x, y) + \eta u^{\text{tot}}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad (2)$$

$$\partial_y u^{\text{tot}}(x, y) = 0, \quad y = -d; \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (3)$$

$$u^{\text{tot}}(x, y) = 0, \quad y = 0; \quad x \in (-\infty, -L) \cup (0, \infty). \quad (4)$$

Тут $u^{\text{tot}} = u^{\text{tot}}(x, y) = u(x, y) + u^{\text{inc}}(x, y)$, $u^{\text{inc}} = u^{\text{inc}}(x, y) = e^{\gamma_j x} \sin(\beta_j y)$, де u^{inc} – падаюче поле, $\beta_j = \pi(2j-1)/2d$, $j=1, 2, 3, \dots$; $\gamma_j = (\beta_j^2 - k^2)^{1/2}$, $\text{Re } \gamma_j > 0$; $k = k' + ik''$ – хвильове число ($k', k'' > 0$, $k' \gg k''$); $\eta = \mu^{-1}Z$ – імпедансний параметр, μ – стала Ламе, Z – відома величина, яка характеризує зв’язок між напруженням $\tau_{yz} = \mu \partial_y u(x, y)$ і зміщенням на поверхні дефекту Γ ; загалом η є комплексною величиною [4], $\text{Im } \eta \leq 0$. Якщо $\eta \rightarrow 0$, то крайова задача (1)–(4) описує дифракцію пружної SH-хвилі на міжфазній тріщині (відшаруванні) [2]. Єдиність розв’язку забезпечували вибором класу функцій, що зникають на нескінченності, та умовою Мейкснера на вершинах дефекту:

$$u \sim \rho_{1(2)}^\delta, \quad \partial_y u \sim \rho_{1(2)}^{-(1-\delta)}, \quad \text{коли } \rho_1 = [x^2 + y^2]^{1/2} \rightarrow 0 \text{ і } \rho_2 = [(x+L)^2 + y^2]^{1/2} \rightarrow 0,$$

де $0 < \delta \leq 1/2$; $\rho_{1(2)}$ – відстані до вершин дефекту у локальних системах координат з центрами у цих вершинах.

Зведення задачі до рівняння Вінера–Гопфа. Шукане поле зміщень запишемо у вигляді інтеграла Фур’є:

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\alpha, y) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad (5)$$

де $U(\alpha, y)$ – невідома Фур’є-трансформанта поля зміщень, регулярна у смужі

$|\tau| < \tau_0 = \operatorname{Re} \gamma_1$, яка охоплює дійсну вісь комплексної площини $\alpha = \sigma + i\tau$.

Беручи до уваги вираз (5), зводимо крайову задачу (1)–(4) до функціонального рівняння типу Вінера–Гопфа:

$$M(\alpha)[e^{-i\alpha L}\Psi^-(\alpha) + \Psi^{(+)}(\alpha)] = J_1(\alpha). \quad (6)$$

Тут $\Psi^-(\alpha)$, $\Psi^{(+)}(\alpha)$ – невідомі Фур’є-трансформанти функцій, пропорційних полю напружень на межі з’єднання зліва та справа від дефекту; $J_1(\alpha)$ – невідома ціла функція, яка є Фур’є-трансформантою поля зміщення на поверхні дефекту; $M(\alpha)$ – відома характеристична функція:

$$\Psi^-(\alpha) = U'^-(\alpha, 0) - \frac{i\beta_j e^{-\gamma_j L}}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)}, \quad (7a)$$

$$\Psi^{(+)}(\alpha) = U'^+(\alpha, 0) + \frac{i\beta_j}{\sqrt{2\pi}(\alpha - i\gamma_j)}, \quad (7b)$$

$$U'^-(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-L} u'_y(x, 0) e^{i\alpha(x+L)} dx, \quad U'^+(\alpha, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} u'_y(x, 0) e^{i\alpha x} dx,$$

$$J_1(\alpha) = \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^0 u(x, 0) e^{i\alpha x} dx,$$

$$M(\alpha) = \frac{\operatorname{ch}(\gamma d)}{\gamma d \operatorname{sh}(\gamma d) + \bar{\eta} \operatorname{ch}(\gamma d)}, \quad (8)$$

$$\gamma = (\alpha^2 - k^2)^{1/2} = -i(k^2 - \alpha^2)^{1/2}, \quad \operatorname{Re} \gamma \geq 0, \quad \bar{\eta} = \eta d.$$

Функція $\Psi^-(\alpha)$ регулярна у комплексній півплощині $\tau < \tau_0$; а $\Psi^{(+)}(\alpha)$ – в області $\tau > -\tau_0$, за винятком точки $\alpha = i\gamma_j$, де вона має простий полюс; $M(\alpha)$ – парна мероморфна функція зі смугою регулярності, що охоплює дійсну вісь. Ширину цієї смуги, яка залежить від параметра η , визначає модуль уявної частини першого нуля знаменника формули (8). В частковому випадку, коли $\eta = 0$, функція $M(\alpha)$ регулярна в смузі $\alpha \in \Pi: \{-k'' < \tau < k''\}$. Покладаючи k'' достатньо малим і $k'' < \operatorname{Re} \gamma_1$, забезпечуємо справдження рівняння (6), принаймні, у смузі Π . В областях регулярності $M(\alpha) = O(\alpha^{-1})$, якщо $|\alpha| \rightarrow \infty$.

Асимптотична поведінка функцій $\Psi^-(\alpha)$, $\Psi^{(+)}(\alpha)$ в цих областях за умови $|\alpha| \rightarrow \infty$ така: $\Psi^{(+)}(\alpha) = O(\alpha^{-1/2})$, $\Psi^-(\alpha) = O(\alpha^{-1/2})$; $J_1(\alpha)$ і $e^{i\alpha L} J_1(\alpha)$, якщо $|\alpha| \rightarrow \infty$, загасають як $\alpha^{-3/2}$ відповідно у півплощинах $\tau < \tau_0$ і $\tau > -\tau_0$.

Розв’язок рівняння Вінера–Гопфа. Функція $M(\alpha)$ допускає факторизацію методом нескінченних добутків Вейерштраса і має вигляд [14, 15]

$$M(\alpha) = M_+(\alpha)M_-(\alpha).$$

Тут

$$M_{\pm}(\alpha) = \frac{\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 \pm \frac{\alpha}{i\gamma_{nc}} \right] e^{\pm i\alpha \frac{d}{\pi n}}}{\sqrt{\bar{\eta} - kd \operatorname{tg}(kd)} \left[1 \pm \frac{\alpha}{i\gamma_{1s}} \right] \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 \pm \frac{\alpha}{i\gamma_{(n+1)s}} \right] e^{\pm i\alpha \frac{d}{\pi n}}},$$

де $M_+(\alpha)$, $M_-(\alpha)$ – регулярні функції відповідно у півплощинах $\tau > -k''$, $\tau < k''$; $M_-(\alpha) = M_+(-\alpha)$ і $M_{\pm}(\alpha) = O(\alpha^{-1/2})$, якщо $|\alpha| \rightarrow \infty$ в областях регулярності; за їх межами вони мають прості нулі і полюси відповідно у точках $\alpha = \mp i\gamma_{nc}$ і $\alpha = \mp i\gamma_{ns}$:

$$\gamma_{nc} = d^{-1} \sqrt{\pi^2 (2n-1)^2 / 4 - k^2 d^2}, \quad \gamma_{ns} = d^{-1} \sqrt{\varphi_n^2 - k^2 d^2}, \quad n=1, 2, \dots,$$

де $\pm\varphi_n$ – корені трансцендентного рівняння $\varphi \sin(\varphi) - \bar{\eta} \cos(\varphi) = 0$, які загалом є комплексними. Їх числові приклади для різних значень параметра $\bar{\eta}$ наведено раніше [3].

За отриманими вище аналітичними властивостями функцій, які формують рівняння (6), можна методом факторизації та декомпозиції звести його до двох функціональних співвідношень:

$$M_+(\alpha) \Psi^{(+)}(\alpha) = \frac{i\beta_j}{\sqrt{2\pi}} \frac{M_+(i\gamma_j)}{\alpha - i\gamma_j} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^{-2} e^{-\gamma_{ns} L} \Psi^-(i\gamma_{ns}) V(\varphi_n)}{i\gamma_{ns} M_+(i\gamma_{ns}) (\alpha + i\gamma_{ns})}, \quad (9)$$

$$M_-(\alpha) \Psi^-(\alpha) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^{-2} e^{-\gamma_{ns} L} \Psi^{(+)}(i\gamma_{ns}) V(\varphi_n)}{i\gamma_{ns} M_+(i\gamma_{ns}) (\alpha - i\gamma_{ns})}. \quad (10)$$

Тут $V(\varphi_n) = [1 + (1 + \bar{\eta}) \operatorname{tg}(\varphi_n) / \varphi_n]^{-1}$.

Покладаючи далі у рівняннях (9) і (10), відповідно, $\alpha = i\gamma_{ms}$ і $\alpha = -i\gamma_{ms}$, $m = 1, 2, 3, \dots$, зводимо розв'язання функціонального рівняння (6) до нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь (НСЛАР) другого роду:

$$[I + A]X = F, \quad (11)$$

де $X = \{X_m\}_{m=1}^{\infty}$ – невідомий вектор; $A = \{a_{mr}\}_{m,r=1}^{\infty}$ – матриця коефіцієнтів; I – одинична матриця; $F = \{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ – відомий вектор;

$$\begin{aligned} X_{ms} &= M_+(i\gamma_{ms}) \Psi^{(+)}(i\gamma_{ms}), \\ a_{mr} &= - \frac{d^{-4} e^{-\gamma_{rs} L} V(\varphi_r)}{[M_+(i\gamma_{rs})]^2 \gamma_{rs}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V(\varphi_n) e^{-\gamma_{ns} L}}{[M_+(i\gamma_{ns})]^2 (\gamma_{ms} + \gamma_{ns}) (\gamma_{rs} + \gamma_{ns}) \gamma_{ns}}, \\ f_m &= \frac{\beta_j}{\sqrt{2\pi}} \frac{M_+(i\gamma_j)}{\gamma_{ms} - \gamma_j}. \end{aligned} \quad (12)$$

Якщо $m, r \rightarrow \infty$, то для матричних елементів (12) справедлива оцінка

$$|a_{mr}| \leq C \frac{e^{-\pi r L / d}}{mr}, \quad (13)$$

де C – відома стала, яка не залежить від індексів m та r .

За допомогою оцінки (13) знаходимо $\|A\| = \sum_{m,r} |a_{mr}|^2 < \infty$, а отже, НСЛАР (11) має єдиний розв'язок в просторі l_2 , за винятком дискретних значень хвильового параметра $k = \omega / c$ (c – швидкість поширення SH-хвилі у середовищі), для яких відповідне однорідне рівняння допускає ненульовий розв'язок.

Поле зміщень (5) виразимо через функції (7):

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-i\alpha L} \Psi^-(\alpha) + \Psi^{(+)}(\alpha) \right] \frac{d \operatorname{ch}(\gamma(y+d))}{\gamma d \operatorname{sh}(\gamma d) + \bar{\eta} \operatorname{ch}(\gamma d)} e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (14)$$

Інтеграл (14) подамо як суму лишків підінтегральної функції. У результаті вираз для поля зміщень в областях D_1 , D_2 , D_3 запишемо так:

$$u(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} R_m e^{-\gamma_{mc} x} \sin\left(\frac{\pi(2m-1)}{2d} y\right), \quad x, y \in D_1,$$

$$u(x, y) = -u^{\text{inc}}(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n^{(1)} e^{\gamma_{ns} x} + B_n^{(2)} e^{-\gamma_{ns}(x+L)} \right] \cos\left(\varphi_n \frac{y+d}{d}\right), \quad x, y \in D_2,$$

$$u(x, y) = -u^{\text{inc}}(x, y) + \sum_{m=1}^{\infty} T_m e^{\gamma_{mc}(x+L)} \sin\left(\frac{\pi(2m-1)}{2d} y\right), \quad x, y \in D_3.$$

Тут

$$R_m = N(m) \left[\frac{\beta_j M_+(i\gamma_j)}{\sqrt{2\pi}(\gamma_{mc} + \gamma_j)} + \frac{1}{d^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{ns} L} \Psi^-(i\gamma_{ns}) V(\varphi_n)}{\gamma_{ns} M_+(i\gamma_{ns}) \cos(\varphi_n) (\gamma_{ns} - \gamma_{mc})} \right],$$

$$B_n^{(1)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{d} \frac{\Psi^{(+)}(i\gamma_{ns}) V(\varphi_n)}{\gamma_{ns} \cos(\varphi_n)}, \quad B_n^{(2)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{d} \frac{\Psi^-(i\gamma_{ns}) V(\varphi_n)}{\gamma_{ns} \cos(\varphi_n)},$$

$$T_m = N(m) \frac{1}{d^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_{ns} L} \Psi^{(+)}(i\gamma_{ns}) V(\varphi_n)}{\gamma_{ns} M_+(i\gamma_{ns}) \cos(\varphi_n) (\gamma_{ns} - \gamma_{mc})},$$

де $N(m) = \pi^{3/2} (2m-1) M_+(i\gamma_{mc}) / (\sqrt{2d} \gamma_{mc})$.

Числові дослідження. Вивчали залежності модуля повного поля зміщень $|u^{\text{tot}}(x, y)| = |u(x, y) + u^{\text{inc}}(x, y)|$ на поверхні шару P при $y = -d$ від нормованої координати x/d за різних значень безрозмірної хвильової товщини шару (частоти) kd , нормованої ширини дефекту $p = L/d$ та імпедансного параметра $\bar{\eta}$ (рис. 2). Розрахунки виконували для двох значень $p = \{1; 3\}$ і $kd = \{2; 3, 5\}$, за яких справджується умова $\pi/2 < kd < 3\pi/2$, що гарантує поширення без загасання в областях $D_{1(3)}$ тільки першої SH-моди. Кількість біжучих мод в області D_2 залежить від параметра $\bar{\eta}$. Аналізували випадки, коли $\bar{\eta} = \{0; 1; 5\}$. За вибраних його значень $\bar{\eta}$ корені φ_1 , φ_2 є дійсні і становлять $\varphi_1 = \{0,000; 0,846; 1,314\}$, $\varphi_2 = \{3,141; 3,426; 4,033\}$. Тоді при $kd = 2$ в області D_2 формується одна біжуча мода для усіх вибраних $\bar{\eta}$. Коли $kd = 3,5$ тут збуджуються дві біжучі моди для $\bar{\eta} = \{0; 1\}$ і одна – для $\bar{\eta} = 5$.

За такою модовою структурою поля можна якісно пояснити характер поведінки кривих на рис. 2. Спостерігаємо осциляції модуля поля зміщень на вільній від напружень поверхні області D_1 для усіх значень вибраних параметрів, які викликані інтерференцією падаючої і відбитої від краю дефекту SH-хвилі. Водночас на поверхні області D_3 вони відсутні, оскільки там поширюється лише одна нормальна хвиля. В області D_2 характер поведінки амплітуди поля зміщень якісно змінюється, оскільки міняється його модова структура зі зміною $\bar{\eta}$. Крім того, в околі точок стику областей D_1 – D_2 і D_2 – D_3 на вільній поверхні шару змінюється поведінка модулів поля зміщень, що вказує на можливість ідентифікації країв дефекту.

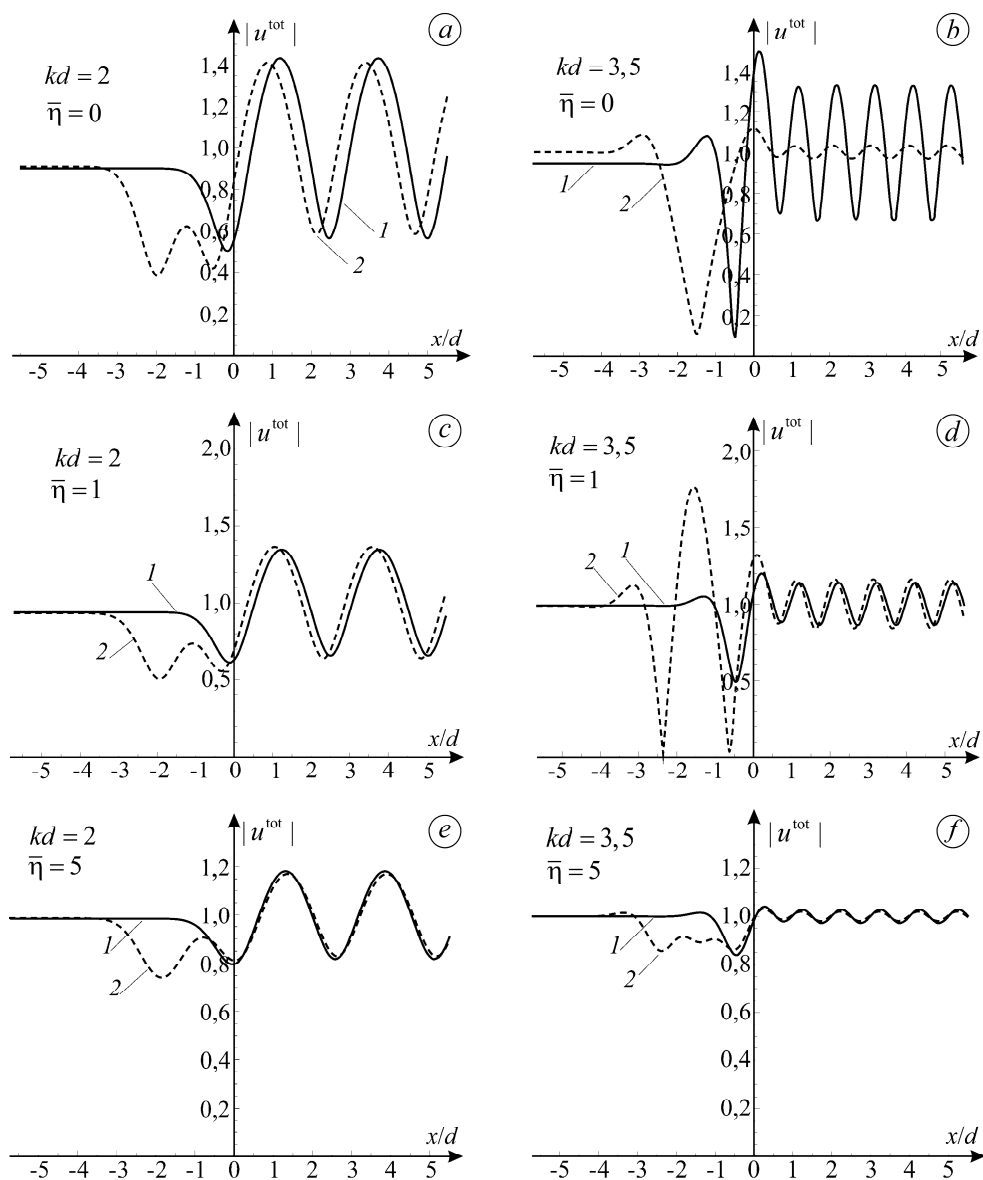


Рис. 2. Залежності полів зміщень $|u^{\text{tot}}|$ на вільній поверхні шару від нормованої координати x/d за різних значень імпедансного параметра, безрозмірної частоти і нормованої ширини дефекту: 1 – $p = 1$; 2 – 3.

Fig. 2. Dependences of the displacement fields $|u^{\text{tot}}|$ on the free face of the layer on the normalized coordinate x/d for different values of the impedance, dimensionless frequency and normalized width of the defect: 1 – $p = 1$; 2 – 3.

Коли в області D_2 формується одна біжуча мода (рис. 2а, с, е), то зі зростанням значень $\bar{\eta}$ зменшуються екстремуми осциляцій $|u^{\text{tot}}|$ і активізується проходження поля в цю область. Рівень поля найменший, якщо дефектом є тріщина ($\bar{\eta} = 0$). Таку його поведінку пов'язуємо зі зменшенням контрастності дефекту зі збільшенням значень $\bar{\eta}$.

Якщо в області D_2 формуються дві біжучі моди (рис. 2b, d), розподіл поля зміщень $|u^{\text{tot}}|$ на поверхні D_2 суттєво змінюється, що обумовлено інтерференцією двох різних мод. Зі зростанням параметра $\bar{\eta}$ одномодова структура поля в області D_2 (рис. 2f) повертається, що призводить до характерної для цього випадку поведінки поля зміщень.

ВИСНОВКИ

Розв'язано задачу дифракції нормальної SH-хвилі на тонкому міжфазному дефекті скінченної ширини у пружному шарі, жорстко з'єднаному з півпростором; дефект змодельовано імпедансною смужкою. Розв'язок задачі отримано методом Вінера–Гопфа. Досліджено залежності модуля поля зміщень на вільній поверхні шару від параметрів моделі за зондуванням біжучою модою пружного хвилевода, жорстко з'єданого з півпростором. Встановлено якісну зміну розподілу модуля поля в околі точок проекції дефекту на вільну від напружень поверхню шару, що можна використати для його ідентифікації. За одномодової структури поля зі збільшенням імпедансного параметра поле в хвилевідній області, яка охоплює дефект, зростає, що можна використати для оцінки пошкодження. За нульового значення імпедансного параметра поле в області під тріщиною мінімальне.

1. Nazarchuk Z., Muravsky L., and Kuryliak D. To the problem of the subsurface defects detection: theory and experiment // *Proc. Struct. Integrity*. – 2019. – **16**. – P. 11–18.
2. On the interaction of an elastic SH-wave with an interface crack in the perfectly rigid joint of a plate with a half-space / Z. T. Nazarchuk, D. B. Kuryliak, M. V. Voytko, and Ya. P. Kulynych // *J. Math. Sci.* – 2013. – **192**, № 6. – P. 609–622.
3. Diffraction of SH-waves on the interface defect in the joint of an elastic layer and half-space / D. B. Kuryliak, Z. T. Nazarchuk, M. V. Voytko, and Ya. P. Kulynych // *Materials Science*. – 2022. – **57**, № 5. – P. 612–625.
4. Kemppainen M. and Virkkunen I. Crack characteristics and their importance to NDE // *J. Nondestructive Evaluation*. – 2011. – **30**. – P. 143–157.
5. Rawlins A. D. Radiation of sound from an unflanged rigid cylindrical duct with an acoustically absorbing internal surface // *Proc. R. Soc. Lond. A*. – 1978. – **361**. – P. 65–91.
6. Dahl P. H. and Frisk G. V. Diffraction from the juncture of pressure release and locally reacting half-planes // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1991. – **90**. – P. 1093–1100.
7. Ivanov V. P. Influence of a wall impedance insertion on the behavior of the acoustic field in a waveguide // *Comp. Math. and Mathematical Phys.* – 2014. – **54**, № 2. – P. 368–378.
8. Tester B. J. The optimization of modal sound attenuation in ducts, in the absence of mean flow // *J. of Sound and Vibration*. – 1973. – **27**, № 4. – P. 477–513.
9. Nayfeh A. H., Kaiser J. E., and Telionis D. P. Acoustics of aircraft engine-duct systems // *Am. Inst. Aeronaut. Astronaut. J.* – 1975. – **13**, № 2. – P. 130–153.
10. Voytko M., Kulynych Ya., and Kuryliak D. Resonant scattering of the SH-wave by the interface impedance defect in an elastic layer // 2016 IEEE Int. Conf. on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory (MMET). – Lviv, 2016. – P. 264–267.
11. Miklowitz J. The theory of elastic waves and wave guides. – Amsterdam; New York: Oxford North-Holland Publication Company, 1978. – 618 p.
12. Auld B. A. Acoustic fields and waves in solids. – New York: John Wiley & Sons, 1973. – **Vol. 2**. – 416 p.
13. Graff K. F. Wave motion in elastic solids. – New York: Dover Publ., 1991. – 650 p.
14. Noble B. Methods based on the Wiener-Hopf technique for the solution of partial differential equations. – London: Pergamon Press., 1958. – 246 c.
15. Mittra R. and Le S. W. Analytical techniques in the theory of guided waves. – New York: Macmillan Company, 1971. – 302 p.
16. Weinstein L. A. The theory of diffraction and the factorization method (Generalized Wiener-Hopf Technique). – Golem Press., Boulder, Colorado, 1969. – 411 p.

Одержано 01.08.2022