УДК 539.3

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ БІЛЯ ОТВОРІВ З ГОСТРИМИ ТА ЗАКРУГЛЕНИМИ ВЕРШИНАМИ

М. П. САВРУК [1], *А. КАЗБЕРУК* [2], *В. С. КРАВЕЦЬ* [1], *А. Б. ЧОРНЕНЬКИЙ* [1]

[1] *Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів;*
[2] *Білостоцька політехніка, Польща*

Методом сингулярних інтегральних рівнянь побудовано розв'язки плоских задач про концентрацію напружень біля криволінійних отворів в ортотропній площині з гладким та кусково-гладким контурами. Числові результати отримано для ортотропних пластин з отворами різних форм за одновісного симетричного навантаження на нескінченності. Порівняно розподіли контурних нормальних напружень для фізичної щілини та еліптичного отвору в ортотропній та квазіортотропній площинах з однаковим відношенням головних модулів пружності матеріалу. Коефіцієнти концентрації та інтенсивності напружень розраховано для ортотропної пластини з квадратним та ромбічним отворами із закругленими та гострими вершинами.

Ключові слова: *ортотропний та квазіортотропний матеріал, гострі та закруглені вирізи, коефіцієнти концентрації та інтенсивності напружень.*

Using the method of singular integral equations, the solutions of the plane problems about stress concentration near curvilinear holes in an orthotropic plane with smooth and piece-smooth contours are constructed. Numerical results for orthotropic plates with holes of various shapes under uniaxial symmetric loading at infinity have been obtained. The distributions of contour normal stresses for a narrow slot and an elliptical hole in orthotropic and quasi-orthotropic planes with the same ratio of the main elastic module of the material are compared. The stress concentration and intensity factors for an orthotropic plate with square and rhombic holes with rounded and sharp tips are calculated.

Keywords: *orthotropic and quasi-orthotropic material, sharp and rounded notches, stress concentration and intensity factors.*

Вступ. Плоскі задачі про концентрацію напружень біля отворів вивчали різними методами. Для одного криволінійного отвору в ізотропній площині ефективним виявився метод конформних відображень [1–4], який в поєднанні із методом рядів використовували також для багатозв'язної анізотропної області [5–8]. Під час дослідження напружено-деформованого стану пружних анізотропних пластин застосовують аналітичні та числові методи. Одним із найефективніших для багатозв'язної плоскої пружної області з отворами та тріщинами виявився метод сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) [9–11]. Замкнені аналітичні розв'язки отримано для деяких часткових задач, зокрема, для визначення концентрації напружень у ортотропній площині з еліптичним [3, 4, 12], трикутним та ромбічним отворами із закругленими вершинами [3, 4]. Числові методи застосовано до низки відповідних задач ортотропії [9–11, 13–16] та окремих видів ортотропного матеріалу – квазіортотропного [9, 10] та псевдоізотропного [11, 17]). Досліджено оптимальні форми отворів (з мінімальною концентрацією напружень) в ортотропній [13] та квазіортотропній [18] площинах.

Нижче методом СІР досліджено розподіл напружень біля гострих та закруглених вершин криволінійних отворів у ортотропних та квазіортотропних пласти-

Контактна особа: А.Б. ЧОРНЕНЬКИЙ, e-mail: A.B.Chornenkyi@gmail.com

нах. Для аналізу напружень біля отворів з негладкою межею використано асимптотичний підхід [9], коли коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) біля гострих вершинах вирізів знаходять за коефіцієнтами концентрації напружень (ККН) у закруглених.

Основні співвідношення теорії пружності для анізотропних матеріалів. Рівняння узагальненого закону Гука для двовимірного анізотропного тіла в декартовій системі координат xOy для плоскої задачі мають вигляд [12]

$$\varepsilon_{xx} = a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{16}\tau_{xy},$$
$$\varepsilon_{yy} = a_{12}\sigma_{xx} + a_{22}\sigma_{yy} + a_{26}\tau_{xy},$$
$$2\varepsilon_{xy} = a_{16}\sigma_{xx} + a_{26}\sigma_{yy} + a_{66}\tau_{xy}.$$

Тут a_{mn} $(m,n = 1,2,6)$ – пружні сталі анізотропного матеріалу, ε_{ij} та σ_{ij} $(i, j = x, y)$ – компоненти тензора деформацій та напружень, відповідно.

Увівши функцію напружень $F(x,y)$ співвідношеннями

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2},\ \ \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\ \ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \tag{1}$$

з умов рівноваги тіла за відсутності масових сил отримаємо еліптичне диференційне рівняння четвертого порядку [12]

$$a_{22}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 2a_{26}\frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66})\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16}\frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + a_{11}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0, \tag{2}$$

якому відповідає характеристичне рівняння

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0, \tag{3}$$

що має дві пари комплексно спряжених коренів $\mu_k = \alpha_k + i\beta_k$ і $\bar{\mu}_k = \alpha_k - i\beta_k$ ($\beta_k > 0,\ k = 1,2$), оскільки коефіцієнти рівняння (3) дійсні.

Для довільних некратних комплексних коренів загальний розв'язок рівняння (2) можна подати через дві аналітичні функції $\varphi_1(z_1)$ і $\varphi_2(z_2)$ комплексних аргументів $z_k = x + \mu_k y$ $(k = 1,2)$ (у допоміжних комплексних площинах) так [12]:

$$F(x,y) = 2\,\mathrm{Re}[\varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2)]. \tag{4}$$

Зі співвідношень (1) отримуємо вирази для напружень

$$\begin{gathered}\sigma_{xx} = 2\,\mathrm{Re}\{\mu_1^2\Phi_1(z_1) + \mu_2^2\Phi_2(z_2)\};\ \sigma_{yy} = 2\,\mathrm{Re}\{\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)\},\\ \tau_{xy} = -2\,\mathrm{Re}\{\mu_1\Phi_1(z_1) + \mu_2\Phi_2(z_2)\}; \Phi_1(z_1) = \varphi_1'(z_1), \Phi_2(z_2) = \varphi_2'(z_2)\end{gathered} \tag{5}$$

та переміщень

$$u_x = 2\,\mathrm{Re}[p_1\varphi_1(z_1) + p_2\varphi_2(z_2)],$$
$$u_y = 2\,\mathrm{Re}[q_1\varphi_1(z_1) + q_2\varphi_2(z_2)].$$

Тут сталі p_k, q_k $(k = 1,2)$ – комплексні характеристики анізотропного матеріалу: $p_k = a_{11}\mu_k^2 + a_{12} - a_{16}\mu_k$, $q_k = a_{12}\mu_k + a_{22}/\mu_k - a_{26}$.

Нормальні ($N(t)$) і дотичні ($T(t)$) напруження на деякому гладкому криволінійному контурі L в анізотропній площині, завантаженій на нескінченності напруженнями $\sigma_{xx}^{\infty}, \sigma_{yy}^{\infty}, \tau_{xy}^{\infty}$, визначає співвідношення

$$N(t)+iT(t)=p_0(t)=\frac{1}{2}(\sigma_{xx}^{\infty}+\sigma_{yy}^{\infty})-\frac{1}{2}(\sigma_{xx}^{\infty}-\sigma_{yy}^{\infty}-2i\tau_{xy}^{\infty})\frac{d\bar{t}}{dt},\ t=x+iy\in L, \quad (6)$$

яке не залежить від пружних сталих матеріалу і залишається в анізотропній площині таким самим, як і в ізотропній.

Розв'язування плоскої задачі теорії пружності для анізотропного тіла зводять до визначення двох аналітичних функцій $\varphi_1(z_1)$ і $\varphi_2(z_2)$ (в областях S_1 і S_2 у допоміжних математичних площинах $z_1=x+\mu_1 y$ і $z_2=x+\mu_2 y$, що відповідають у площині $z=x+iy$ області S, зайнятій тілом) за відомих їх граничних значень на межових контурах L_1, L_2 і L цих областей. Коли на межі тіла (контурі L) задані напруження (перша основна задача), крайову умову, використовуючи співвідношення (6), можна подати так [9]:

$$\mathrm{Re}[(1+\mu_1^2)\Phi_1(t_1)+(1+\mu_2^2)\Phi_2(t_2)]+\frac{d\bar{t}}{dt}\Big\{\mathrm{Re}[(1-\mu_1^2)\Phi_1(t_1)+(1-\mu_2^2)\Phi_2(t_2)]+$$

$$+2i\,\mathrm{Re}\{\mu_1\Phi_1(t_1)+\mu_2\Phi_2(t_2)\}\Big\}=N(t)+iT(t),\quad t=x+iy\in L.$$

Для пружного ортотропного тіла функція напружень задовольняє еліптичне диференційне рівняння [9, 11]

$$\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}+(\gamma_1^2+\gamma_2^2)\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2}+\gamma_1^2\gamma_2^2\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}=0\,.$$

Відповідне характеристичне рівняння $\mu^4+(\gamma_1^2+\gamma_2^2)\mu^2+\gamma_1^2\gamma_2^2=0$ має дві пари комплексно спряжених коренів $\mu_k=i\gamma_k\ (\gamma_k>0)$ і $\bar{\mu}_k=-i\gamma_k$ ($k=1,2$). Тут корені μ_1 і μ_2 різні і загальний розв'язок диференційного рівняння можна подати у допоміжних комплексних площинах $z_k=x+i\gamma_k y$ $(k=1,2)$ через дві аналітичні функції $\varphi_1(z_1)$ і $\varphi_2(z_2)$ залежністю (4).

Інтегральне рівняння для анізотропної площини з криволінійним отвором. Вважатимемо, що на замкненому контурі криволінійного отвору L задано самозрівноважені напруження

$$N+iT=p(t),\ t\in L\,.$$

Головний вектор (X,Y – його проекції на осі x,y, відповідно) і головний момент M зовнішнього навантаження рівні нулю:

$$X+iY=-i\int_L p(t)dt=0,\quad M=-\mathrm{Re}\int_L \bar{t}p(t)dt=0\,. \quad (7)$$

Комплексні потенціали напружень візьмемо у вигляді

$$\Phi_1(z_1)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\phi_1'(\tau_1)}{\tau_1-z_1}d\tau_1,\quad \Phi_2(z_2)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{\phi_2'(\tau_2)}{\tau_2-z_2}d\tau_2\,.$$

Задачу зведемо до розв'язування СІР [9]

$$\frac{1}{\pi}\int_{L_1}[K_1(\tau_1,t_1)\phi_1'(\tau_1)d\tau_1+L_1(\tau_1,t_1)\overline{\phi_1'(\tau_1)}d\bar{\tau}_1]=P_1(t_1),\ t_1\in L_1\,, \quad (8)$$

ядра $K_1(\tau_1,t_1)$, $L_1(\tau_1,t_1)$ і права частина $P_1(t_1)$ якого мають вигляд

$$K_1(\tau_1,t_1)=\frac{(\mu_1-\mu_2)}{2}\left(\frac{1}{\tau_1-t_1}\frac{dt_1}{dt}+\frac{1}{\bar{\tau}_2-\bar{t}_2}\frac{d\bar{t}_2}{dt}\right),$$

$$L_1(\tau_1,t_1)=-\frac{(\bar{\mu}_1-\mu_2)}{2}\left(\frac{1}{\bar{\tau}_1-\bar{t}_1}\frac{d\bar{t}_1}{dt}-\frac{1}{\bar{\tau}_2-\bar{t}_2}\frac{d\bar{t}_2}{dt}\right), \quad (9)$$

$$P_1(t_1)=\frac{1}{2}\left[(1-i\mu_2)\,p(t)-(1+i\mu_2)\,\overline{p(t)}\frac{d\bar{t}}{dt}\right]. \tag{10}$$

Для ортотропного тіла вирази (9), (10) набувають вигляду

$$K_1(\tau_1,t_1)=\frac{i(\gamma_1-\gamma_2)}{2}\left(\frac{1}{\tau_1-t_1}\frac{dt_1}{dt}+\frac{1}{\bar{\tau}_2-\bar{t}_2}\frac{d\bar{t}_2}{dt}\right),$$

$$L_1(\tau_1,t_1)=\frac{i(\gamma_1+\gamma_2)}{2}\left(\frac{1}{\bar{\tau}_1-\bar{t}_1}\frac{d\bar{t}_1}{dt}-\frac{1}{\bar{\tau}_2-\bar{t}_2}\frac{d\bar{t}_2}{dt}\right);$$

$$P_1(t_1)=\frac{1}{2}\left[(1+\gamma_2)\,p(t)-(1-\gamma_2)\,\overline{p(t)}\frac{d\bar{t}}{dt}\right].$$

Інтегральне рівняння (8) має єдиний розв’язок лише за додаткових умов

$$\int_{L_1} P_1(t_1)dt_1=0,\quad \int_{L_1} \bar{t}_2P_1(t_1)dt_1=0\,, \tag{11}$$

які відповідають умовам рівноваги (7).

Модифікуємо рівняння (8) так, щоб отримати єдиний розв’язок для довільної правої частини. Скористаємось підходом, який раніше використовували в аналогічних задачах для ізотропного тіла. Додамо до лівої частини СІР (8) певні функціонали, які забезпечують єдиність розв’язку, але рівні нулю за виконання умов (11). Таке модифіковане рівняння має вигляд [9, 11]

$$\int_{L_1}[K_1(\tau_1,t_1)\phi_1'(\tau_1)d\tau_1+L_1(\tau_1,t_1)\overline{\phi_1'(\tau_1)}d\bar{\tau}_1]-\frac{1}{2i}\frac{M}{(\bar{t}_1-\bar{z}_1^0)^2}+\frac{a_1^0}{l}\frac{ds_1}{dt_1}=P_1(t_1),\ t_1\in L_1\,, \tag{12}$$

де z_1^0 – довільна точка в області S_1^+ у площині z_1, що відповідає області S^+, яку займає отвір у площині z; l – довільний параметр розмірності довжини; s_1 – дугова абсциса на контурі L_1, що відповідає точці t_1;

$$a_1^0=\int_{L_1}\phi_1'(t_1)\,dt_1;\ M=i\int_{L_1}[\bar{t}_2\phi'(t_1)dt_1-t_2\overline{\phi_1'(t_1)}d\bar{t}_1].$$

З відомої формули для головного вектора прикладеного навантаження [13]

$$X+iY=2\,\mathrm{Re}[\mu_1\int_{L_1}\Phi_1(t_1)dt_1+\mu_2\int_{L_2}\Phi_2(t_2)dt_2]-2i\,\mathrm{Re}[\int_{L_1}\Phi_1(t_1)dt_1+\int_{L_2}\Phi_2(t_2)dt_2]$$

одержали співвідношення $a_1^0=\int_{L_1}\phi_1'(t_1)\,dt_1=\tilde{A}X+\tilde{B}Y$, де $\tilde{A},\tilde{B}$ – комплексні сталі, які виразили через пружні параметри μ_1,μ_2. Якщо головний вектор рівний нулю, то стала $a_1^0=0$.

Числові результати. На основі числового розв'язку СІР (12) на вільному замкненому контурі отримали розподіл нормальних напружень по контуру гладких отворів в ортотропній

$$\sigma_S=\sigma_{xx}+\sigma_{yy}=2\,\mathrm{Re}\{(1-\gamma_1^2)\Phi_1(z_1)+(1-\gamma_2^2)\Phi_2(z_2)\}$$

та квазіортотропній ($\gamma=\sqrt[4]{E_x/E_y}=1{,}3716$) [9]

$$\sigma_s=\mathrm{Re}\left\{2(1+\gamma^2)\Phi_1(z_1)+(1-\gamma^2)\left[\bar{z}_1\Phi_1'(z_1)+\Psi_1(z_1)\right]\right\}$$

пластинах за одновісного їх розтягу вздовж осі Oy ($\sigma_y^\infty = p$). Розглядали форми отворів у вигляді еліпса (рис. 1) або фізичної щілини (рис. 2) за однакових відносних радіусів закруглення ($\varepsilon = \rho/l = 0,2$) у вершинах для параметрів $\gamma_1 = 2,3337$; $\gamma_2 = 0,6594$ – матеріал ЕТФ [13]. Тут $\Phi_1(z_1)$ та $\Psi_1(z_1)$ комплексні потенціали напружень у квазіортотропній площині [9].

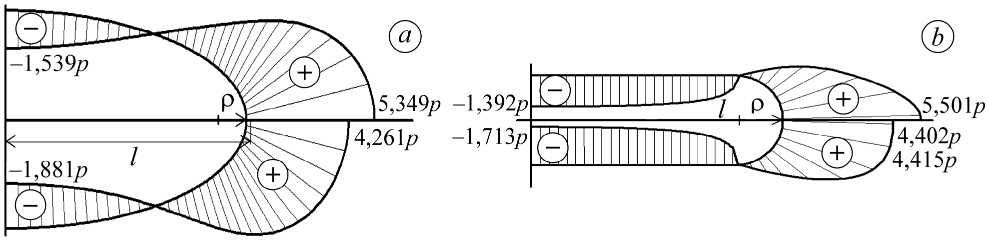

Рис. 1. Розподіл напружень σ_S уздовж контуру еліптичного отвору (a) та фізичної щілини (b) в ортотропній (верхня півплощина) та квазіортотропній (нижня) площинах із однаковими відношеннями модулів пружності матеріалів E_x/E_y за одновісного розтягу $\sigma_y^\infty = p$.

Fig. 1. Stress distribution σ_S along the contour of an elliptical hole (a) and narrow slot (b) in orthotropic (upper half-plane) and quasi-orthotropic (lower) planes with the same ratios between the modulus of elasticity of materials E_x/E_y under uniaxial tension $\sigma_y^\infty = p$.

Таким чином, розподіли напружень уздовж контурів криволінійних отворів у ортотропній та квазіортотропній площинах з однаковими відношеннями модулів пружності цих матеріалів за заданого навантаження якісно близькі (рис. 1). Однак для обох форм отворів максимальні розтягувальні напруження у закруглених вершинах завжди більші в ортотропній пластині, а стискальні – у квазіортотропній.

Обчислено ККН (рис. 2) біля закруглених вершин квадратного отвору в ортототропних (M_1 – червоний дуб ($\gamma_1 = 3,2033$; $\gamma_2 = 1,0902$), M_2 – graphite/epoxy ($\gamma_1 = 4,8240$; $\gamma_2 = 0,7642$), M_3 – S-glass/epoxy ($\gamma_1 = 2,8355$; $\gamma_2 = 0,6623$) [9]) та квазіортотропних площинах з таким самим відношеннями модулів пружності E_x / E_y ($\tilde{M}_1(\gamma = 1,8687)$, $\tilde{M}_2(\gamma = 1,9173)$, $\tilde{M}_3(\gamma = 1,3698)$) за одновісного розтягу $\sigma_y^\infty = p$.

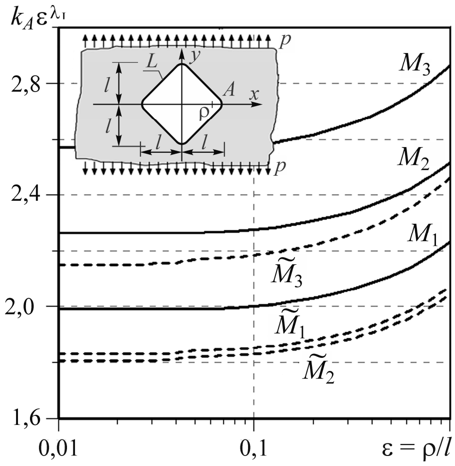

Рис. 2. Залежності функції $k_A\varepsilon^{\lambda_I}$ у закругленій вершині A квадратного отвору від параметра ε в ортотропних (M_1, M_2, M_3) та квазіортотропних ($\tilde{M}_1$, $\tilde{M}_2$, $\tilde{M}_3$) площинах.

Fig. 2. Dependences of the function $k_A\varepsilon^{\lambda_I}$ at the rounded tip A of the square hole ε in the orthotropic (M_1, M_2, M_3) and quasi-orthotropic ($\tilde{M}_1$, $\tilde{M}_2$, $\tilde{M}_3$) planes.

Тут також ККН для ортотропної пластини суттєво перевищують відповідні для квазіортотропних для всіх значень параметра $\varepsilon = \rho/l \in [0,01;1]$.

Напружений стан біля закругленої вершини отворів чи вирізів у ортотропній площині досліджували також іншими методами [14, 15], коли для опису граничного контуру отвору використовували розклади в ряди за різних кількостей їх членів.

Для обчислення узагальнених КІН $\tilde{K}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{V}} = \lim_{\rho\to 0}[(2\pi\rho)^{\lambda_{\mathrm{I}}}\sigma_s^*(0)]\Big/R_{\mathrm{I}}$ у вершині гострого кутового вирізу (для деформування I типу) необхідно знати і коефіцієнт R_{I} [9], і показник особливості напружень λ_{I}. Для ортотропного та квазіортотропних тіл ці параметри відрізняються. Для квазіортотропного матеріалу [9]

$$\lambda_{\mathrm{I}} = 1,247\cos\beta_1(\alpha) - 1,312\cos^2\beta_1(\alpha) + 0,8532\cos^3\beta_1(\alpha) - 0,2882\cos^4\beta_1(\alpha),$$

де $\beta_1(\alpha) = \pi + \mathrm{arctg}(\gamma\mathrm{tg}\alpha)$, $\alpha = \pi - \beta$, а для ортотропного його знаходять із характеристичного рівняння

$$(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)\,\mathrm{tg}\,\alpha - \gamma_2(1+\gamma_1^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha)\,\mathrm{tg}[(2-\lambda_{\mathrm{I}})\beta_2(\alpha)] +$$
$$+\gamma_1(1+\gamma_2^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha)\,\mathrm{tg}[(2-\lambda_{\mathrm{I}})\beta_1(\alpha)] = 0.$$

Отримали відносні значення КІН $\tilde{F}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{V}} = \tilde{K}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{V}}/(p(\pi l)^{\lambda_{\mathrm{I}}})$ для ортотропної (матеріал M_1 ($\gamma_1 = 3{,}2033$; $\gamma_2 = 1{,}0902$; $E_x = E_1$)) та квазіортотропної (матеріал $\tilde{M}_1$ з параметром ортотропії $\gamma = 1{,}8687$ [9]) пластин з ромбічним отвором та однаковими відношеннями модулів пружності матеріалів E_x / E_y (рис. 3). Ортотропний матеріал вважали близьким до квазіортотропного за умови $\tilde{\rho} = (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)\big/2\gamma_1\gamma_2 \approx 1$ [9, 19]. Для досліджуваного матеріалу (червоний дуб) цей параметр $\tilde{\rho} = 1,63$.

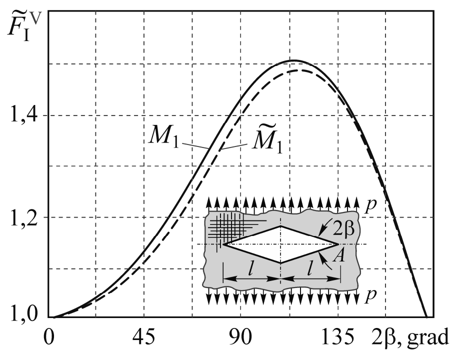

Рис. 3. Залежність відносних КІН $\tilde{F}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{V}} = \tilde{K}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{V}}/(p(\pi l)^{\lambda_{\mathrm{I}}})$ у вершині A від кута розхилу 2β ромбічного отвору в ортотропній (суцільна крива) та квазіортотропній (штрихова) пластинах з однаковими відношеннями модулів пружності.

Fig. 3. Dependence of the relative SIF $\tilde{F}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{V}} = \tilde{K}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{V}}/(p(\pi l)^{\lambda_{\mathrm{I}}})$ at tip A for orthotropic 2β (solid curve) and quasi-orthotropic (dashed) plates with the same ratios of elastic module.

Тут КІН для ортотропних пластин (у всьому діапазоні кутів 2β) більші, ніж для квазіортотропних, однак, їх відносні різниці не перевищують 3%.

ВИСНОВКИ

Методом СІР досліджено розподіл напружень біля гострих та закруглених вершин отворів в ортотропних пластинах. Для знаходження КІН у гострих кутових вершинах контуру отвору використано асимптотичний підхід, коли КІН знаходять на основі ККН у відповідних закруглених вершинах. Числові результати отримано для одновісного розтягу на нескінченності ортотропних пластин з криволінійними отворами різних форм. Порівняно розподіли нормальних напружень по контуру фізичної щілини та еліптичного отвору в ортотропній та квазіортотропній пластинах з однаковим відношенням головних модулів пружності матеріалів. Встановлено, що відносна різниця між цими напруженнями для розглянутих матеріалів невелика (до 25%). Обчислено ККН та КІН для ромбічного отвору із закругленими та гострими вершинами в ортотропній та квазіортотропній пластинах за різних значень кута розхилу сторін ромба.

1. *Каминский А. А.* Хрупкое разрушение вблизи отверстий. – К.: Наук. думка, 1982. – 160 с.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
3. *Савин Г. Н.* Концентрация напряжений около отверстий. – М.; Л.: Гостехиздат, 1951. – 496 с.
4. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
5. *Калоеров С. А., Петренко А. В.* Двумерные задачи электромагнито-упругости для многосвязных тел. – Донецк: Юго-Восток, 2011. – 232 с.
6. *Космодамианский А. С.* Распределение напряжений в изотропных многосвязных средах. – Донецк: ДонГУ, 1972. – 266 с.
7. *Космодамианский А. С.* Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. – К.: Вищ. шк., 1975. – 228 с.
8. *Космодамианский А. С.* Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. – К.; Донецк: Вищ. шк., 1976. – 200 с.
9. *Savruk M. P. and Kazberuk A.* Stress Concentration at Notches. – Cham: Springer, 2017. – 516 p.
10. *Kazberuk A., Savruk M. P., and Chornenkyi A. B.* Stress concentration around an elliptic hole or a parabolic notch in quasi-orthotropic plane // Materials Science. – 2016. – **52**, № 3. – P. 201–210.
11. *Kazberuk A., Savruk M. P., and Kosior-Kazberuk M.* Koncentracja naprużeń w wierzchołkach karbów w ciałach pseudoizotropowych // Procesy zmęczenia i mechanika pękania. – 2020. – P. 67–87.
12. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат, 1957. – 464 с.
13. *Божидарнік В. В., Максимович О. В.* Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами. – Луцьк: ЛДТУ, 2003. – 226 с.
14. *Максимович О. В., Багнюк Н. В.* Сумісне використання систем fortran та matlab для дослідження напружень біля отворів із закругленими кутами в анізотропних пластинках // Міжвуз. зб. “Комп’ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво”. – Луцьк, 2010. – **2**. – С. 18–25.
15. *Zappalorto M.* On the stress state in rectilinear anisotropic thick plates with blunt cracks // Fatig. and Fract. of Eng. Mat. and Struct. – 2016. – **40**. – P. 103–119.
16. *Ioakimidis N. I. and Theocaris P. S.* The problem of the simple smooth crack in an infinite anisotropic elastic medium // Int. J. Solids Struct. – 1977. – **13**, № 4. – P. 269–278.
17. *Hyer M. W. and Riddick J. C.* Internal pressure loading of segmented-stiffness composite cylinders // Compos. Struct. – 1999. – **45**. – P. 311–320.
18. *Savruk M. P., Kravets V. S., and Chornenkyi A. B.* Optimization of the shapes of holes in a quasiorthotropic plate under biaxial tension // Materials Science. – **57**, № 2. – P. 163–172.
19. *Hasebe N. and Sato M.* Stress analysis of quasi-orthotropic elastic plane // Int. J. Solids Struct. – 2013. – **50**. – P. 209–216.

Одержано 07.07.2022