УДК 539.3

ВПЛИВ МІЖФАЗНИХ ПРОШАРКІВ ВИСОКОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ НА РОЗПОДІЛ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ ПОЛІВ У ДВОКОМПОНЕНТНИХ СТРУКТУРАХ

Я. М. ПАСТЕРНАК[1], *Г. Т. СУЛИМ*[2], *А. В. ВАСИЛИШИН*[3], *О. П. ЯСНІЙ*[4]

[1] *Волинський національний університет імені Лесі Українки;*

[2] *Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів;*

[3] *Львівський національний університет імені Івана Франка;*

[4] *Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя*

На основі теорії функції комплексної змінної та формалізму Стро подано математичну модель узагальненого плоского термомагнетоелектронапруженого стану двокомпонентної структури із тонким міжфазним проміжком високої теплопровідності. На базі розвинень комплексних потенціалів Стро у степеневі ряди та подальшого задоволення крайових умов на основі підходу найменших квадратів побудовано напіваналітичний обчислювальний метод аналізу фізико-механічних полів у таких двокомпонентних структурах. Подано приклади розв'язування конкретних задач для скінченних тіл.

Ключові слова: *термомагнетоелектропружність, двокомпонентна структура, міжфазний проміжок високої теплопровідності.*

Based on the complex variable calculus and the Stroh formalism, a mathematical model of the generalized plane thermomagnetoelectroelasticity of a two-component structure with a thin interfacial layer of high thermal conductivity is presented. Using the expansion of the Stroh complex potentials in power series and further satisfaction of boundary conditions on the basis of the least squares approach, a semi-analytical computational method of analysis of physico-mechanical fields in such two-component structures is developed. Numerical examples of solving specific problems for finite solids are presented.

Keywords: *thermomagnetoelectroelasticity, biomaterial solid, high temperature conducting interface.*

Вступ. Сучасні високотехнологічні інтелектуальні структури, які мають можливість самоналагоджуватися та в реальному часі діагностувати стан конструкції, – це механічні поєднання піроелектричних, піромагнетних, сегнетоелектричних та інших матеріалів, які мають властивості полів різної фізичної природи [1]. При цьому у місці з'єднання часто виникають (або створюють технологічно) тонкі міжфазні проміжки, які, здебільшого, за майже ідеального механічного, електричного та магнетного контакту (т.зв. когерентний інтерфейс) можуть породжувати істотні збурення теплових полів [2]. Тут виділяють випадки ідеального теплового контакту, а також інтерфейсів низької (типу Капіци) та високої теплопровідності [3].

Дослідження біматеріальних тіл доволі широко висвітлене в науковій літературі. Зокрема, у праці [4] для моделювання поверхні контакту між двома анізотропними матеріалами використовують спеціально розроблені умови на межі їх поділу. Розроблено [5] ефективний гранично-елементний підхід до розв'язування задач для пружних анізотропних біматеріальних твердих тіл з тріщинами. Побу-

Контактна особа: Я. М. ПАСТЕРНАК, e-mail: iaroslav.m.pasternak@gmail.com

довано [6] функції Ґріна для анізотропного термопружного біматеріалу з інтерфейсом типу Капіци. Розроблено [7, 8] спеціальний метод граничних елементів для вивчення термоелектропружних біматеріальних тіл з множинними тріщинами.

Незважаючи на практичну важливість вивчення неідеального теплового контакту в інтелектуальних структурах, на сьогодні цьому питанню присвячені лише поодинокі праці (наприклад, [9, 10]). Тому нижче розглянемо термомагнетоелектропружне біматеріальне середовище із інтерфейсом високої теплопровідності та підхід до напіваналітичного визначення фізико-механічних полів, зумовлених крайовими умовами на межі тіла та міжфазним прошарком.

Формулювання задачі. Розглянемо стаціонарні узагальнені плоскі температурне поле та деформацію двокомпонентного анізотропного термомагнетоелектропружного циліндричного тіла з прямолінійним (тунельним) міжфазним прошарком. Пов'яжемо із тілом прямокутну систему координат $Ox_1x_2x_3$ так, щоб вісь Ox_3 була спрямована паралельно до його твірної поверхні, а міжфазний проміжок лежав на осі Ox_1. Тіло складається із компонент S_1 $(x_2 > 0)$ та S_2 $(x_2 < 0)$, обмежених контурами Γ_1 та Γ_2 (рис. 1).

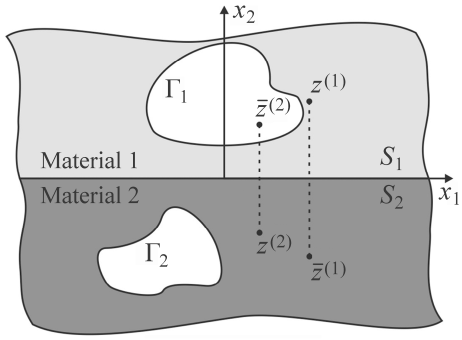

Рис. 1. Схема задачі.

Fig. 1. Scheme of the problem.

Поля температур θ, переміщень u_i, електричного ϕ і магнетного ψ потенціалів, теплових потоків h_i, напружень σ_{ij}, електричних зміщень D_i та магнетної індукції B_i у кожній із компонент структури можна записати через певні аналітичні функції комплексних аргументів (комплексні потенціали) $g(z_t)$, $\mathbf{f}(z_*)$ формалізму Стро [11, 12]:

$$\theta = 2\operatorname{Re}\{g'(z_t)\},\ \vartheta = 2k_t \operatorname{Im}\{g'(z_t)\},\ h_1 = -\vartheta_{,2},\ h_2 = \vartheta_{,1},\ k_t = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}{}^2};$$
$$\tilde{\mathbf{u}} = 2\operatorname{Re}[\mathbf{Af}(z_*) + \mathbf{c}g(z_t)],\ \tilde{\boldsymbol{\varphi}} = 2\operatorname{Re}[\mathbf{Bf}(z_*) + \mathbf{d}g(z_t)],\ \tilde{\sigma}_{i1} = -\varphi_{i,2},\ \tilde{\sigma}_{i2} = \varphi_{i,1}; \qquad (1)$$
$$z_t = x_1 + p_t x_2,\ z_\alpha = x_1 + p_\alpha x_2,\ \mathbf{f}(z_*) = \left[F_1(z_1), F_2(z_2), F_3(z_3), F_4(z_4), F_5(z_5)\right]^{\mathrm{T}}.$$

Формули (1) записані із використанням узагальнених величин [13]

$$\tilde{u}_i = u_i,\ \tilde{u}_4 = \phi,\ \tilde{u}_5 = \psi;$$
$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij},\ \tilde{\sigma}_{4j} = D_j,\ \tilde{\sigma}_{5j} = B_j;\ (i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2). \qquad (2)$$

У виразах (1) ϑ – функція теплового потоку; $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ – розширена функція напружень; матриці $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ та вектори $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ комплексних сталих, а також комплексні коефіцієнти p_t, p_α $(\alpha = 1, 2, 3, 4, 5)$ визначають на основі властивостей матеріалу із задачі на власні значення розширеного формалізму Стро [11, 12]. Кома в індексах означає операцію диференціювання за координатою, індекс якої стоїть після коми, тобто, $u_{i,j} \equiv \partial u_i / \partial x_j$.

Вважатимемо, що на межі поділу матеріалів задовольняються умови неідеального теплового контакту у вигляді інтерфейсу високої теплопровідності [3]

$$\vartheta^{(1)}(x_1, x_2)\big|_{x_2=0} = \vartheta^{(2)}(x_1, x_2)\big|_{x_2=0} + \mu_0 \theta_{,1}(x_1), \qquad (3)$$

$$\theta^{(1)}\left(x_1, x_2\right)\Big|_{x_2=0} = \theta^{(2)}\left(x_1, x_2\right)\Big|_{x_2=0} = \theta\left(x_1\right), \tag{4}$$

а також умови ідеального магнетоелектромеханічного контакту складових

$$\tilde{\mathbf{u}}^{(1)}\left(x_1, x_2\right)\Big|_{x_2=0} = \tilde{\mathbf{u}}^{(2)}\left(x_1, x_2\right)\Big|_{x_2=0} = \tilde{\mathbf{u}}\left(x_1\right), \tag{5}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{(1)}\left(x_1, x_2\right)\Big|_{x_2=0} = \tilde{\boldsymbol{\varphi}}^{(2)}\left(x_1, x_2\right)\Big|_{x_2=0} = \tilde{\boldsymbol{\varphi}}\left(x_1\right). \tag{6}$$

Тут верхні індекси 1 і 2 використовують для позначення величин полів, які діють у відповідних областях S_1 та S_2. Тонкий проміжний шар вилучаємо із розгляду як геометричний об'єкт, а його вплив на двокомпонентну структуру позначаємо μ_0, що на основі моделей тонких прошарків [13] дорівнює $\mu_0 = 2h^{\text{int}} k_t^{\text{int}}$, де $2h^{\text{int}}$, k_t^{int} – відповідно товщина та коефіцієнт теплопровідності прошарку. Кожна складова тіла містить систему гладких замкнутих контурів $\Gamma_1 = \bigcup_i \Gamma_i^{(1)}$ та $\Gamma_2 = \bigcup_i \Gamma_i^{(2)}$, на яких можна задавати ті чи інші теплові чи магнетоелектромеханічні крайові умови.

Розв'язування задачі. У кожній із областей подамо комплексні потенціали Стро у вигляді таких скінченних сум рядів:

$$g'^{(1)}\left(z_t^{(1)}\right) = \sum_{k=0}^{N} C_k^{(1)}\left(z_t^{(1)}\right)^k = \sum_{k=0}^{N} C_k^{(1)}\left(x_1 + p_t^{(1)} x_2\right)^k, \tag{7}$$

$$g'^{(2)}\left(z_t^{(2)}\right) = \sum_{k=0}^{N} C_k^{(2)}\left(z_t^{(2)}\right)^k = \sum_{k=0}^{N} C_k^{(2)}\left(x_1 + p_t^{(2)} x_2\right)^k, \tag{8}$$

$$F_\alpha^{(1)}\left(z_\alpha^{(1)}\right) = \sum_{k=0}^{N} E_{\alpha,k}^{(1)}\left(z_\alpha^{(1)}\right)^k, \tag{9}$$

$$F_\alpha^{(2)}\left(z_\alpha^{(2)}\right) = \sum_{k=0}^{N} E_{\alpha,k}^{(2)}\left(z_\alpha^{(2)}\right)^k \quad \left(\alpha = 1, 2, 3, 4, 5\right). \tag{10}$$

Тут $C_k^{(1)}$, $C_k^{(2)}$, $E_{\alpha,k}^{(1)}$, $E_{\alpha,k}^{(2)}$ – комплексні сталі, які потребують визначення; N – додатне ціле число. При цьому з огляду на означеність функції теплового потоку із точністю до довільної сталої зафіксуємо $\operatorname{Im}\left(C_0^{(1)}\right) = 0$.

Використовуючи вирази (1), підставивши комплексні потенціали (7) та (8) в умови (3), (4) контакту фаз та прирівнюючи множники при x_1 з однаковими степенями, отримаємо:

$$k_t^{(1)} \operatorname{Im}\left(C_k^{(1)}\right) = k_t^{(2)} \operatorname{Im}\left(C_k^{(2)}\right) + \mu_0\left(k+1\right)\operatorname{Re}\left(C_{k+1}^{(1)}\right), \tag{11}$$

$$\operatorname{Re}\left(C_k^{(1)}\right) = \operatorname{Re}\left(C_k^{(2)}\right) \quad \left(k = 0, 1, \ldots, N\right). \tag{12}$$

Аналогічно на основі (1), (9), (10) та крайових умов (5) і (6) отримаємо зв'язки між коефіцієнтами комплексних потенціалів Стро в областях S_1 та S_2:

$$\operatorname{Re}\left[A_{i\alpha}^{(1)} E_{\alpha,k}^{(1)} + c_i C_k^{(1)}\right] = \operatorname{Re}\left[A_{i\alpha}^{(2)} E_{\alpha,k}^{(2)} + c_i C_k^{(2)}\right], \tag{13}$$

$$\operatorname{Re}\left[B_{i\alpha}^{(1)}E_{\alpha,k}^{(1)}+d_iC_k^{(1)}\right]=\operatorname{Re}\left[B_{i\alpha}^{(2)}E_{\alpha,k}^{(2)}+d_iC_k^{(2)}\right]\ \left(k=0,1,\ldots,N\right). \tag{14}$$

Для визначення коефіцієнтів $C_k^{(1)}$, $C_k^{(2)}$, $E_{\alpha,k}^{(1)}$, $E_{\alpha,k}^{(2)}$ використаємо задані на контурах Γ_1 та Γ_2 крайові умови. Як і у праці [14], застосуємо метод найменших квадратів та складемо функціонал відхилень, отриманих на основі виразів (1), (7)–(10) полів від крайових умов, заданих у деякій множині точок $\left(x_1^j, x_2^j\right)\in\Gamma_1\cup\Gamma_2$ $\left(j=1,2,\ldots,M\right)$ на контурах Γ_1 та Γ_2, причому $M>N$. Мінімізуючи цей функціонал відхилень за дійсними та уявними частинами невідомих $C_k^{(1)}$, $C_k^{(2)}$, $E_{\alpha,k}^{(1)}$, $E_{\alpha,k}^{(2)}$, із використанням співвідношень (11)–(14) отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення шуканих коефіцієнтів.

Числовий аналіз прикладів. Для прикладу розглянемо квадратне ($W=H$) в плані двокомпонентне тіло, що займає область $-W/2\le x_1\le W/2$, $-H/2\le x_2\le H/2$ з інтерфейсом високої теплопровідності $x_2=0$. Вважатимемо, що матеріали, з яких складається тіло, однакові, а їхні властивості ізотропні щодо теплопровідності. Нехай на верхній межі тіла $-W/2\le x_1\le W/2$, $x_2=H/2$ температура змінюється за законом $\theta=4x_1^2/W^2$. На нижній межі тіла $-W/2\le x_1\le W/2$, $x_2=-H/2$ температуру вважаємо нульовою, а бічні сторони тіла $x_1=\pm W/2$, $-H/2\le x_2\le H/2$ – теплоізольованими.

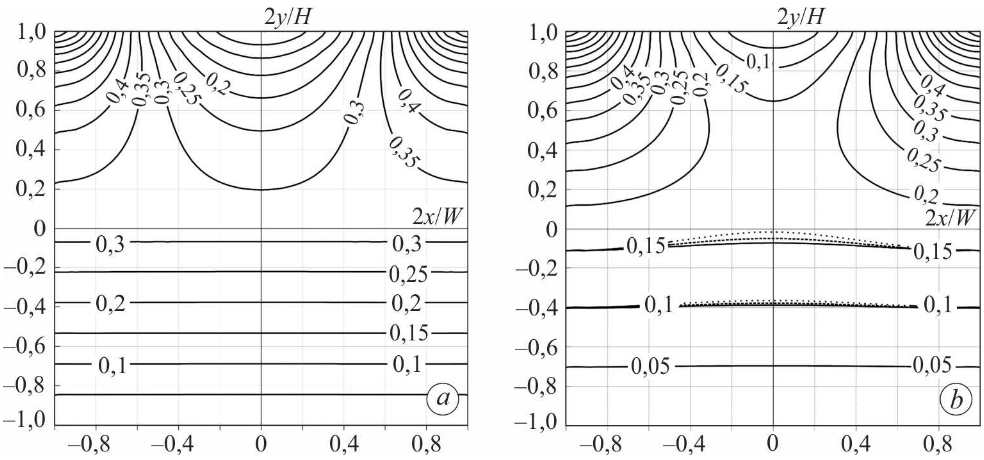

Рис. 2. Розподіл температур у двокомпонентному тілі з міжфазним прошарком: a – $\mu_0/\mu_0^*=100$; b – $\mu_0/\mu_0^*=1{,}5$ (суцільна лінія), $\mu_0/\mu_0^*=1$ (штрихова), $\mu_0/\mu_0^*=0{,}5$ (пунктирна).

Fig. 2. Temperature field in a bimaterial solid with high temperature conducting interface: a – $\mu_0/\mu_0^*=100$; b – $\mu_0/\mu_0^*=1.5$ (solid line), $\mu_0/\mu_0^*=1$ (dashed), $\mu_0/\mu_0^*=0.5$ (dotted).

Спочатку вважатимемо, що теплопровідність інтерфейсу є досить великою ($\mu_0/\mu_0^*=100$, де $\mu_0^*=Wk_t^{(1)}/2$). За таких умов температура міжфазного прошарку повинна змінюватися несуттєво (бути практично сталою), а отже, у нижній частині двокомпонентного матеріалу за окреслених крайових умов температура має практично лінійно залежати від координати x_2. Відповідні лінії рівня, отримані на підставі створеного напіваналітичного підходу, побудовані на рис. 2*a*. Із графіка добре видно окреслену фізичну особливість розглянутого прикладу, що також підтверджує достовірність отриманих розв’язків задачі.

На рис. 2*b* зображено розв’язок задачі з аналогічними крайовими умовами за відносно невеликих значень теплопровідності інтерфейсу. Видно, що у верхній частині тіла температурні поля практично не залежать від теплопровідності μ_0 міжфазного прошарку і фактично залежать від крайових умов на межі тіла. Натомість у нижній щодо інтерфейсу частині тіла невелика зміна параметра μ_0 істотно впливає на розподіл температур.

Аналогічні особливості стосуються і полів напружень, електричних зміщень та магнетної індукції, зумовлених цими температурними полями.

ВИСНОВКИ

Сформульовано напіваналітичний підхід, який дав можливість аналізувати розподіл фізико-механічних полів у скінченних двокомпонентних тілах із прямолінійним міжфазним прошарком високої теплопровідності. У результаті аналізу числових прикладів з’ясовано, що навіть невеликі зміни теплопровідності інтерфейсу суттєво впливають на розподіли фізико-механічних полів, що необхідно враховувати під час проєктування інтелектуальних матеріалів та структур відповідних з’єднувальних шарів.

1. *Smart* Composites: Mechanics and Design / Eds. by R. Elhajjar, V. La Saponara, and A. Muliana. – Boca Raton: CRC Press, 2013. – 430 p.
2. *Smart* Composite Coatings and Membranes: Transport, Structural, Environmental and Energy Applications / Ed. M. F. Montemor. – Boston: Woodhead Publishing, 2016. – 490 p.
3. *Kaessmair S., Javili A., and Steinmann P.* Thermomechanics of solids with general imperfect coherent interfaces // Arch Appl Mech. – 2014. – **84**, Is. 9–11. – P. 1409–1426.
4. *Benvensite Y.* A general interface model for a three-dimensional curved thin anisotropic interphace between two anisotropic media // J. Mech. Phys. Solids. – 2006. – **54**. – P. 708–734.
5. *Pan E. and Amadei B.* Boundary element analysis of fracture mechanics in anisotropic biomaterials // Eng. Analysis with Boundary Elements. – 1999. – **23**. – P. 683–691.
6. *Wang X. and Pan E.* Thermal Green’s functions in plane anisotropic bimaterials with spring-type and Kapitza-type imperfect interface // Acta Mech. – 2010. – **209**. – P. 115–128.
7. *Qin Q. H. and Mai Y. W.* Multiple cracks in thermoelectroelastic biomaterials // Theor. Appl. Fract. Mech. – 1998. – **29**. – P. 141–50.
8. *Qin Q. H. and Mai Y. W.* BEM for crack-hole problems in thermopiezoelectric materials // Eng. Fract. Mech. – 2002. – **69**, № 5. – P. 577–588.
9. *Cheng H. and Torquato S.* Effective conductivity of dispersions of spheres with a superconducting interface // Proc. of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – 1997. – **453**. – P. 1331–1344.
10. *Quang H. L., Phan T. L., and Bonnet G.* Effective thermal conductivity of periodic composites with highly conducting imperfect interfaces // Int. J. of Thermal Sci. – 2011. – **50**. – P. 1428–1444.
11. *Qin Q. H.* Green’s function and boundary elements of multifield materials. – Oxford: Elsevier, 2007. – 254 p.
12. *Hwu C.* Anisotropic elastic plates. – London: Springer, 2010. – 674 p.
13. *Pasternak Ia., Pasternak R., and Sulym H.* Boundary integral equations and Green’s functions for 2D thermoelectroelastic bimaterial // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2014. – **48**. – P. 87–101.
14. *Калоеров С. А., Хорошев К. Г.* Термоэлектроупругое состояние многосвязной анизотропной пластинки // Прикладная механика. – 2005. – **41**, № 11. – С. 116–126.

   (*Kaloerov S. A. and Khoroshev K. G.* Thermoelectroelastic state of a multiply connected anisotropic plate // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, № 11. – P. 1306–1315.)

Одержано 22.02.2022