

УДК 539.3

ЛОКАЛЬНЕ ФРИКЦІЙНЕ ЗНОШУВАННЯ ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ З РЕГУЛЯРНОЮ СИСТЕМОЮ ВИСТУПІВ

О. П. КОЗАЧОК

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Досліджено контакт двох пружних півплощин (плоска деформація), поверхня одного з яких має пологі періодичні виступи циліндричної форми, за локального зношування на основі моделі фрикційно-втомного руйнування. Сформульовану контактну задачу зведено до сингулярного інтегро-диференціального рівняння з ядром Гільберта для товщини зношеного матеріалу та рівнянь для визначення невідомих ділянок зношування. Проаналізовано зміну форми виступів та контактного тиску після зношування.

Ключові слова: *зносоконтакт, регулярна текстура, локальне зношування, сингулярне інтегро-диференціальне рівняння.*

Wear-contact of two elastic half-planes (plain deformation), the surface of one of which has periodic sloping protrusions of cylindrical shape under local wear on the basis of the model of frictional-fatigue fracture is investigated. The formulated contact problem is reduced to a singular integro-differential equation with a Hilbert nucleus with respect to the thickness of the worn material and equations for determining the unknown areas of wear. The shape of the protrusions and contact pressure at the beginning and after wear are analyzed.

Keywords: *wear-contact, regular texture, local wear, singular integro-differential equation.*

Вступ. Для поліпшення трибологічних властивостей рухомих з'єднань сьогодні все частіше застосовують технології поверхневого оброблення і модифікування, що формують регулярну поверхневу структуру тіл. Тому необхідні методи дослідження фрикційної контактної взаємодії деформівних тіл з періодично змінними по поверхні фізико-механічними, триботехнічними і геометричними характеристиками, щоб теоретично обґрунтувати створення з'єднань із прогнозованою контактною поведінкою і забезпечити контактну жорсткість, зносотривкість та міцність шляхом наведення оптимальної регулярної структури поверхневих шарів [1–3].

В останні десятиліття інтенсивно розвиваються методи розв'язання зносоконтактних задач теорії пружності [4–13], які передбачають, що стирання відбувається по всій поверхні контакту. Водночас у реальних умовах експлуатації вузлів машин і механізмів зношування часто починається, коли фрикційні параметри досягнуть порогових значень. Для опису такого процесу в літературі запропоновано, зокрема, модель фрикційного втомного руйнування [14, 15] і термомеханічний критерій зношування [16]. Щоб розв'язати зносоконтактні задачі теорії пружності на основі цієї моделі та критерію, необхідно врахувати, що зношується лише частина ділянки фрикційного контакту. Нижче вивчено зносоконтакт тіл з регулярним рельєфом, утвореним періодично розташованими виступами. Такі дослідження розпочато раніше [17] для поодинокого виступу.

Формулювання задачі. Розглянемо два пружні ізотропні півпростори з ідентичних матеріалів. Поверхня нижнього тіла плоска, а верхня має регулярну текстуру, сформовану періодичною системою циліндричних виступів симетричної форми $r(x)$ (рис. 1а) завширшки $2b$ кожний, розташованих з періодом d уздовж всієї межі. Вважаємо, що максимальна висота виступів A мала проти його основи ($A \ll b$). На нескінченності півпросторів прикладено рівномірно розподілене навантаження P^∞ , за якого відбувається повне налягання поверхонь без просвітів між ними. В тілах реалізується стан плоскої деформації, що дає підстави [18] розглядати контакт двох півплощин D_1 та D_2 (рис. 1b), які є перетинами відповідно нижнього та верхнього півпросторів площиною Oxy , перпендикулярною до твірних виїмок. Одне з тіл нерухоме, а інше рухається з постійною швидкістю V у напрямі твірної виступів. Сили тертя τ на поверхні спряження підпорядковані закону Амонтона: $\tau = \tau_{y\bar{z}} = fP$, де f – коефіцієнт тертя, P – контактний тиск. Досліджуватимемо зношування спряжених поверхонь, керуючись моделлю фрикційно-втомного руйнування, згідно з якою стирання розпочинається на тих ділянках, де питома сила тертя перевищує порогове значення τ_0 . Вважаємо, що в початковий момент часу $t=0$ умова $\tau > \tau_0$ виконується під кожним виступом лише на деякій ділянці $L_m = (-a + md, a + md)$, $m = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$, інтерфейсу L ($a < b$), де найбільший контактний тиск. Періодично розташовані ділянки локального зношування L_m розширюватимуться з часом внаслідок зміни геометрії поверхонь тіл. Вважатимемо, що стирання лише тіло з виступом.

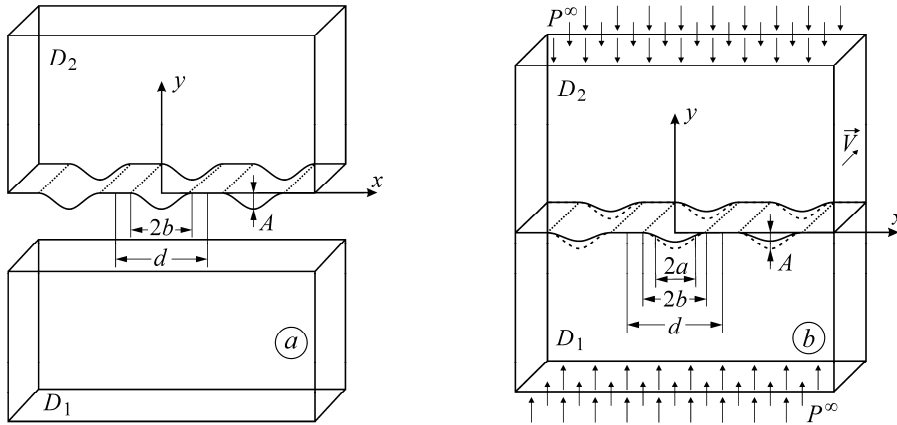


Рис. 1. Тіла перед навантаженням (а) та їх контакт (b).

Fig. 1. Bodies prior to loading (a) and their contact (b).

Швидкість зношування описуватимемо законом [15]

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = BV [fP(x,t) - \tau_0], \quad |x| \leq a + md, \quad m = 0; \pm 1; \pm 2; \dots, \quad (1)$$

де $h(x,t)$ – товщина зношеного матеріалу; B – стала.

Контактно-крайові умови сформульованої задачі мають вигляд

$$\sigma_{yy}^+ = \sigma_{yy}^-, \quad \tau_{xy}^- = \tau_{xy}^+ = 0, \quad x \in L;$$

$$v^+ + r(x) = v^-, \quad x \in L \setminus L_0;$$

$$v^+ + r(x) + h(x,t) = v^-, \quad x \in L_0;$$

$$\sigma_{yy} = -P^\infty, \quad \sigma_{xx} = 0, \quad \tau_{xy} = 0.$$

Тут $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$ – компоненти тензора напружень; v – переміщення вздовж осі Oy ; знаки “+” і “-” вказують на граничні значення функції на межі поділу контактуючих тіл; $L_0 = L_0(t) = \cup L_m$.

Розв’язання задачі. Використовуючи метод комплексних потенціалів та модифікований метод функцій міжконтактних просвітів [19–22], виразимо напруження і переміщення через початкову форму виступів $r(x)$ і товщину зношеного матеріалу $h(x, t)$:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} - i\tau_{xy} &= \Phi_n(z) - \Phi_n(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi_n'(z)} - P^\infty, \quad n = 1, 2; \\ 2G(u' + iv') &= \kappa\Phi_n(z) + \Phi_n(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_n'(z)} + \frac{3 - \kappa}{4}P^\infty, \\ \Phi_n(z) &= \frac{(-1)^{3-n}}{dK} \left(\int_{-a(t)}^{a(t)} h'(s, t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(s-z)}{d} ds - \int_{-b}^b r'(s, t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(s-z)}{d} ds \right), \quad z \in D_n, \end{aligned} \quad (2)$$

де $n = 1; 2$, $z = x + iy$ – комплексна змінна; $\kappa = 3 - 4\nu$; G – модуль зсуву; ν – коефіцієнт Пуассона; $K = (\kappa + 1)/G$; $r'(s) = dr(s)/ds$; $h'_s(s, t) = \partial h(s, t)/\partial s$, s – лінійна координата.

Використовуючи формули (2), для контактного тиску поверхонь $P(x, t) = -\sigma_{yy}^\pm(x, t)$ отримаємо:

$$P(x, t) = \frac{2}{\pi K} \left(\int_{-a(t)}^{a(t)} h'(s, t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(s-x)}{d} ds - \int_{-b}^b r'(s, t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(s-x)}{d} ds \right) + P^\infty. \quad (3)$$

Зауважимо, що функція товщини зношеного матеріалу $h(x, t)$ та ділянка зношення $a(t)$ у співвідношеннях (2), (3) заздалегідь невідомі. Підставляючи контактний тиск (3) у закон зношування (1), для визначення функції $h(x, t)$ отримаємо сингулярне інтегро-диференціальне рівняння (СІДР)

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} - \frac{2BfV}{\pi K} \int_{-a(t)}^{a(t)} h'_s(s, t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(s-x)}{d} ds = \\ = \frac{2BfV}{\pi K} \int_{-b}^b r'(s) \operatorname{ctg} \frac{\pi(s-x)}{d} ds + BfV (P^\infty - \tau_0). \end{aligned} \quad (4)$$

Функція $h(x, t)$ задовольняє початкову умову $h(x, 0) = 0$, $x \in L$, оскільки при $t = 0$ зношування відсутнє. Вважаємо, що під час зношування виступи змінюють свою форму неперервно, залишаючись гладкими. Тому функція $h(x, t)$ у кожен момент часу на кінцях ділянок стирання $L(t)$ задовольнятиме умови

$$h(\pm a(t), t) = 0, \quad h'(a(t), t) = 0, \quad t > 0, \quad (5)$$

Також припускаємо, що після припрацювання (якщо $t \rightarrow \infty$) контактний тиск на всій ділянці $L_0(\infty)$ стає рівним τ_0/f і зношування зупиняється, тобто $\partial h(x, t)/\partial t \rightarrow 0$, якщо $t \rightarrow \infty$. Враховуючи це і здійснивши в СІДР (4) граничний

перехід при $t \rightarrow \infty$, дістанемо рівняння для визначення похідної по x товщини зношеного матеріалу $h'(x, \infty)$

$$\frac{2}{\pi K} \int_{-a(\infty)}^{a(\infty)} h'_s(s, t) \operatorname{ctg} \frac{\pi(s-x)}{d} ds = -\frac{2}{\pi K} \int_{-b}^b r'(s) \operatorname{ctg} \frac{\pi(s-x)}{d} ds - P^\infty + \frac{\tau_0}{f} \quad (6)$$

з виконанням умов (5) для $a(\infty) = a_\infty$.

Замінивши змінні $\xi = \operatorname{tg}(\pi x/d)$, $\eta = \operatorname{tg}(\pi s/d)$, $\gamma = \operatorname{tg}(\pi b/d)$, $\alpha = \operatorname{tg}(\pi a/d)$, сингулярне інтегральне рівняння (6) з ядром Гільберта трансформуємо у відповідне з ядром Коші:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'(\eta, t)}{\eta - \xi} d\eta = \frac{d}{2(1 + \xi^2)} K \left(\frac{\tau_0}{f} - P^\infty \right) - \int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{r'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta, \quad |\xi| \leq \alpha. \quad (7)$$

Тоді умови (5) матимуть вигляд

$$h(\pm\alpha_\infty, \infty) = 0, \quad h'(\pm\alpha_\infty, \infty) = 0. \quad (8)$$

Розв'язок рівняння (7), що задовольняє другу умову у формулу (8), визначатимемо так [18]:

$$h'(\xi) = -\frac{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{\pi^2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{F(\eta) d\eta}{\sqrt{\alpha^2 - \eta^2} (\eta - \xi)}, \quad (9)$$

де $F(\eta) = \frac{d}{2(1 + \eta^2)} K \left(\frac{\tau_0}{f} - P^\infty \right) - \int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{r'(\psi)}{\psi - \eta} d\psi$. Цей розв'язок існує за виконання додаткової умови для правої його частини [18]

$$\int_{-\alpha_\infty}^{\alpha_\infty} \frac{F(\xi) d\xi}{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}} = 0, \quad (10)$$

що служить для знаходження кінцевої півширини ділянки зношування α_∞ .

Розглянемо виступи, форму яких описує функція

$$r(x) = -A \left[1 - \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi x}{d} \right) / \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi b}{d} \right) \right]^{3/2}, \quad |x| \leq b,$$

де $A = r(0)$ – максимальна висота виїмки ($A \ll b$).

У нових змінних ця функція має вигляд

$$r(\xi) = -A \left(1 - \xi^2 / \gamma^2 \right)^{3/2}.$$

Такі виступи зумовлюють на початку взаємодії тіл контактний тиск [18]

$$P(\xi) = P^\infty + 6A\pi \left(1 + \xi^2 \right) \left[-\xi^2 + \frac{\gamma^2}{2} \right] / (\gamma^3 K), \quad |\xi| < \gamma; \quad (11)$$

$$P(\xi) = P^\infty + \frac{6A\pi \left(1 + \xi^2 \right)}{\gamma^3 K} \left[|\xi| \sqrt{\xi^2 - \alpha^2} - \xi^2 + \frac{\gamma^2}{2} \right], \quad \gamma \leq |\xi| \leq 1/2. \quad (12)$$

Інтервал $(-\alpha(0); \alpha(0))$, на якому розпочинається стирання, визначаємо з

умови $P(\alpha(0), 0) = \frac{\tau_0}{f}$. Враховуючи в ній подання для контактної тиску (11),

(12) і початкову умову (8), отримуємо рівняння для обчислення початкової півширини ділянки зношування $\alpha_0 = \alpha(0)$:

$$\frac{6A\pi(1 + \alpha_0^2)}{\gamma^3} \left[\frac{\gamma^2}{2} - \alpha_0^2 \right] = K \frac{\tau_0}{f} - KP^\infty.$$

Розрахувавши функцію $h'(\xi, \infty)$ зі співвідношення (9) і проінтегрувавши її з урахуванням першої умови з (8), визначимо товщину спрацьованого матеріалу:

$$h(\xi) = \frac{dK \left(\frac{\tau_0}{f} - P^\infty \right)}{2\pi} \left[\frac{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} - \operatorname{arctch} \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 - \xi^2}}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \right) \right] + \frac{A}{\gamma^3} (\alpha^2 - \xi^2)^{3/2}, \quad |\xi| \leq \alpha_\infty.$$

Із додаткової умови (10) дістанемо рівняння для ділянки, де відбулося припрацювання:

$$\frac{3A\pi}{\gamma d} \left[\frac{\alpha_\infty^2}{\gamma^2} - 1 \right] + \frac{K \frac{\tau_0}{f} - KP^\infty}{\sqrt{\alpha_\infty^2 + 1}} = 0.$$

Контактний тиск поверхонь тут

$$P(\xi, \infty) = P(\xi, 0) - \frac{6A\pi(1 + \xi^2)}{d\gamma^3 K} \left[-\xi^2 + \frac{\alpha_\infty^2}{2} \right] + \frac{K \left(\frac{\tau_0}{f} - P^\infty \right)}{\sqrt{\alpha_\infty^2 + 1}} \left[\sqrt{\alpha_\infty^2 + 1} - 1 - \xi^2 \right], \quad \alpha \leq \xi < \gamma;$$

$$P(\xi, \infty) = P(\xi, 0) - \frac{6A\pi(1 + \xi^2)}{d\gamma^3 K} \left[|\xi| \sqrt{\xi^2 - \alpha_\infty^2} - \xi^2 + \frac{\alpha_\infty^2}{2} \right] + \frac{K \left(\frac{\tau_0}{f} - P^\infty \right)}{\sqrt{\alpha_\infty^2 + 1}} \left[|\xi| \sqrt{\xi^2 - \alpha_\infty^2} + \sqrt{\alpha_\infty^2 + 1} - 1 - \xi^2 \right], \quad \gamma \leq \xi \leq 1/2.$$

Числові результати. Всі обчислення здійснювали для безрозмірних величин: координати $\tilde{x} = x/d$; максимальної висоти виступу $\tilde{A} = A/d$; зовнішнього навантаження на нескінченності $\tilde{P}^\infty = KP^\infty$; порогового значення питомої сили тертя $\tilde{\tau}_0 = K\tau_0/f$; півширини виступу $\tilde{b} = b/d$; півширини зношеної ділянки виступу $\tilde{a} = a/d$; функції $\tilde{H} = \left[\frac{r(x) - h(x)}{d} \right]$, яка описує форму виступу після зношування; контактної тиску $\tilde{P}(\tilde{x}, t) = KP(x, t)$. Розраховували для таких вхідних даних: $\tilde{b} = 0,25$; $\tilde{A} = 0,001$.

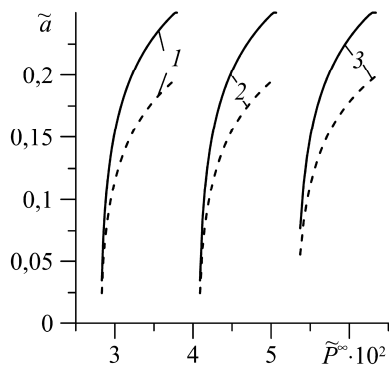


Рис. 2. Залежність початкової \tilde{a} (штрихові криві) і кінцевої \tilde{a}_∞ (суцільні) ділянок зношування періодичних виступів від зовнішнього навантаження \tilde{P}^∞ за різної питомої сили тертя: 1 – $\tilde{\tau}_0 = 0,038$; 2 – 0,05; 3 – 0,063.

Fig. 2. Dependence of the initial \tilde{a} (dashed curves) and final \tilde{a}_∞ (solid) sections of wear of the periodic protrusions on external load \tilde{P}^∞ for different specific friction forces: 1 – $\tilde{\tau}_0 = 0.038$; 2 – 0.05; 3 – 0.063.

За збільшення зовнішнього навантаження розмір ділянок зношування зростає (рис. 2). Площа між штриховою і суцільними кривими відповідає зношеній частині кожного виступу (рис. 3а): що більше зовнішнє навантаження, то більша товщина зношеного матеріалу. Горизонтальна ділянка суцільної кривої – рівномірному тиску на ділянці припрацювання після зношування (рис. 3б). Точки перетину штрихової кривої з горизонтальною ділянкою визначають контактну зону, звідки розпочнеться зношування. Контактний тиск після припрацювання зі збільшенням зовнішнього навантаження стає рівномірнішим, тобто зменшується перепад між максимальним і мінімальним тисками.

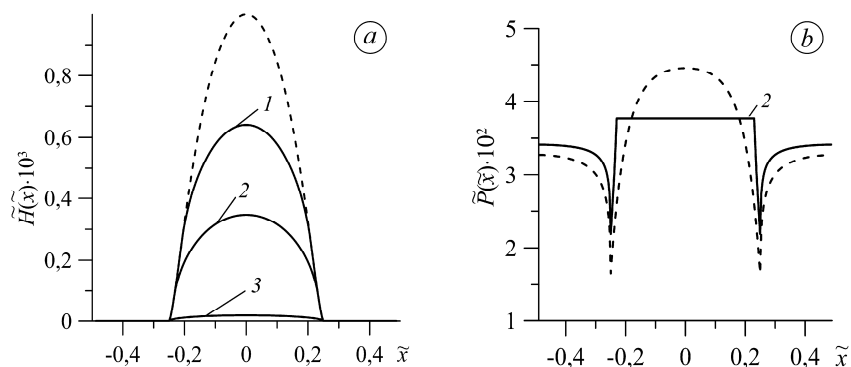


Рис. 3. Форма виступу $\tilde{H}(\tilde{x})$ (а) та розподіл контактного тиску $\tilde{P}(\tilde{x})$ (б) на початку (штрихові криві) і після зношування (суцільні) за $\tilde{\tau}_0 = 0,038$ та за різних зовнішніх навантажень: 1 – $\tilde{P}^\infty = 0,033$; 2 – 0,035; 3 – 0,037 уздовж періоду $\tilde{x} \in [-0,5; 0,5]$.

Fig. 3. Shape of the protrusion $\tilde{H}(\tilde{x})$ (a) and the contact pressure $\tilde{P}(\tilde{x})$ distribution at the zero time (dashed curves) and after wear (solid curves) for $\tilde{\tau}_0 = 0.038$ and different external load: 1 – $\tilde{P}^\infty = 0.033$; 2 – 0.035; 3 – 0.037 for period $\tilde{x} \in [-0.5; 0.5]$.

ВИСНОВКИ

Досліджено контактну взаємодію двох пружних ізотропних півпросторів за плоскої деформації під час локального зношування, поверхня одного з яких має регулярну текстуру, сформовану періодичною системою циліндричних виступів симетричної форми. Використано модель фрикційно-втомного руйнування, згідно з якою стирання розпочинається на тих ділянках, де питома сила тертя перевищує деяке порогове значення. Сформульовану контактну задачу зведено до сингулярного інтегро-диференціального рівняння з ядром Гільберта, яке після замі-

ни змінних трансформовано у сингулярно-інтегральне з ядром Коші для товщини зношеного матеріалу та рівнянь для визначення невідомих ділянок зношування. Його розв'язок побудовано в замкнутому вигляді й проаналізовано форму виступів й контактний тиск на початку та після зношування. Що більше зовнішнє навантаження, то більші ділянки початкового і кінцевого зношування та товщина зношеного матеріалу. Контактний тиск після припрацювання зі збільшенням зовнішнього навантаження стає рівномірнішим уздовж ділянок контакту.

1. *Etsion I.* State of the art in laser surface texturing // *Trans. ASME. J. Tribol.* – 2005. – **127**, № 1. – P. 248–253.
2. *Stepien P.* Deterministic and stochastic components of regular surface texture generated by a special grinding process // *Wear.* – 2011. – **271**, № 3–4. – P. 514–518.
3. *Ляшенко Б. А., Новиков Н. В., Клименко С. А.* Дискретное модифицирование поверхностного слоя деталей машин и инструментов. – К.: ИСМ им. В. Н. Бакуля, 2017. – 264 с.
4. *Александров В. М.* О постановке плоских контактных задач теории упругости при износе взаимодействующих тел // *Докл. АН СССР.* – 1983. – № 12. – С. 827–831.
5. *Грилицький Д. В.* Термопружні контактні задачі в трибології. – К.: ІЗМН, 1996. – 204 с.
6. *Кузьменко А. Г.* Методи розрахунків на зношування та надійність. – Хмельницький: ТУП, 2002. – 152 с.
7. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
8. *Пелех Б. Л., Максимук А. В.* Математическое моделирование процессов износостойкости тел с покрытиями // *Мат. методы и физ.-мех. поля.* – 1989. – Вып. 37. – С. 51–56.
9. *Пелех Б. Л., Максимук А. В., Коровайчук И. М.* Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. – К.: Наук. думка, 1988. – 280 с.
10. *Чернець М. В.* Трибоконтантні задачі для циліндричних з'єднань з технологічною некруглістю. – Люблін: Люблінська політехніка, 2013. – 274 с.
11. *Шнейдер Ю. Г.* Эксплуатационные свойства деталей с регулярным микрорельефом. – СПб: СПб ГИТМО (ТУ), 2001. – 264 с.
12. *Brauer J. and Andersson S.* Simulation of wear in gears with flank interference – A mixed FE and analytical approach // *Wear.* – 2003. – **254**, № 11. – P. 1216–1232.
13. *Zhan W. and Huang P.* Numerical analysis of time-varying wear with elastic deformation in line contact // *Friction.* – 2019. – **7**. – P. 143–152.
14. *Андрейків А. Е., Панасюк В. В., Чернець М. В.* К теории износа материалов при сухом трении // *Физ.-хим. механика материалов.* – 1981. – **17**, № 2. – С. 99–104.
15. *Андрейків А. Е., Чернець М. В.* Оценка контактного взаимодействия трущихся деталей машин. – К.: Наук. думка, 1991. – 160 с.
16. *Евтушенко А. А., Уханская О. М.* Термомеханический критерий изнашивания // *Трение и износ.* – 1994. – **15**, № 3. – С. 379–388.
17. *Kozachok O. P.* Local friction wear of an elastic half space with protrusion // *Materials Science.* – 2022. – **57**, № 6. – P. 797–804.
18. *Мухелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 514 с.
19. *Козачок О. П., Мартиняк Р. М., Слободян Б. С.* Взаємодія тіл з регулярним рельєфом за наявності міжконтактного середовища. – Львів: Растр-7, 2018. – 200 с.
20. *Kozachok O. P.* Influence of partial filling of the gaps with compressible liquid on the contact of elastic bodies with wavy surfaces // *Materials Science.* – 2020. – **56**, № 3. – P. 310–318.
21. *Kozachok O. P.* Contact of an elastic body with a rigid base containing grooves partially filled with nonwetting liquid // *Materials Science.* – 2020. – **55**, № 5. – P. 765–773.
22. *Kozachok O. P. and Martynyak R. M.* Contact problem for wavy surfaces in the presence of an incompressible liquid and a gas in interface gaps // *Math. and Mech. of Solids.* – 2019. – **24**, № 11. – P. 3381–3393.

Одержано 04.07.2022