

УДК 539.3

ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН НЕОДНОРІДНОЇ ОРТОТРОПНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ВІДКРИТОГО ПРОФІЛЮ ЗА НЕСТАЦІОНАРНОГО НАГРІВАННЯ

Р. М. КУШНІР¹, У. В. ЖИДИК², В. М. ФЛЯЧОК³

¹ Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів;

² Національний університет "Львівська політехніка";

³ Українська академія друкарства, Львів

Досліджено термопружний стан неоднорідної ортотропної кругової циліндричної оболонки відкритого профілю за умови конвективного теплообміну між поверхнями оболонки і середовищем. Для цього використано узагальнену зсувну математичну модель неоднорідних анізотропних оболонок першого порядку та двовимірні нестационарні рівняння теплопровідності. Методами інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа знайдено аналітичний розв'язок нестационарної задачі теплопровідності та квазістатичної задачі термопружності для скінченної шарнірно опертої на краях оболонки. Розраховано напружений стан та прогини оболонки за зміни властивостей матеріалу в радіальному напрямку за степеневим законом.

Ключові слова: *термопружність, циліндрична оболонка, неоднорідний матеріал, температурне навантаження.*

The thermoelastic state of an inhomogeneous orthotropic circular cylindrical shell with an open profile under the condition of convective heat exchange between the surfaces of the shell and the environment is investigated. A generalized shear mathematical model of heterogeneous anisotropic shells of the first order and two-dimensional non-stationary heat conduction equations are used in this case. Using the methods of Fourier and Laplace integral transformations, an analytical solution to the non-stationary problem of thermal conductivity and the quasi-static problem of thermoelasticity for a finite hinged shell supported at the edges is found. The stress state and deflections of the shell are calculated for the case of material properties change in the radial direction according to the power law.

Keywords: *thermoelasticity, cylindrical shell, heterogeneous material, temperature load.*

Вступ. Неоднорідні матеріали часто використовують у різних галузях сучасної техніки як елементи конструкцій, які працюють за високих температур. Серед неоднорідних матеріалів особливої уваги заслуговують функціонально-градієнтні (ФГ) композити, властивості яких неперервно змінюються за товщиною. Ці матеріали проєктують так, щоб вони мали бажані властивості, витримували підвищені теплові напруження, були міцні на злам тощо. Для дослідження термопружного стану елементів конструкцій, виготовлених з цих матеріалів, потрібні відповідні моделі і методи, тому дослідження у цьому напрямку – важливі і актуальні.

Дослідженню пластин і оболонок із сучасних неоднорідних матеріалів упродовж останніх десятиріч приділяють значну увагу [1, 2]. Зокрема, побудовані [3] математичні моделі теорії термопружності неоднорідних анізотропних оболонок з врахуванням початкових деформацій. На основі тривимірної термопружності досліджено [4, 5] нестационарну реакцію неоднорідних циліндричних оболонок на дію температурних і силових навантажень. Аналітичні розв'язки на основі рів-

нянь уточнених теорій використовували [6–8] для аналізу термопружного стану в циліндричних оболонках з ламінованих композитів. Втрату стійкості оболонок з неоднорідних матеріалів за дії температурного середовища вивчали раніше [9, 10]. Врахувавши взаємодію температурних і механічних полів, аналізували [11, 12] динамічну реакцію нанокомпозитних і функціонально-градієнтних циліндричних оболонок на термічний удар. Нестационарну задачу термопружності для тонкостінних термочутливих елементів розв’язували [13, 14], використовуючи нелінійне рівняння теплопровідності і змінну Кірхгофа. Метод скінченних елементів для аналізу напруженого стану в конструкціях з ФГ матеріалу застосовували в працях [12, 15]. Детальніший огляд різних теорій моделювання і методів дослідження ФГ оболонок і пластин наведено в працях [16, 17].

Мета роботи – на основі рівнянь термопружності та теплопровідності уточненої теорії неоднорідних оболонок [3] дослідити термопружний стан кругової циліндричної оболонки відкритого профілю, виготовленої з функціонально-градієнтного ортотропного матеріалу.

Формулювання задачі і основні рівняння. Розглянемо неоднорідну ортотропну кругову циліндричну оболонку відкритого профілю з центральним кутом розхилу Θ , сталою товщиною $2h$ і скінченною довжиною l . Точки оболонки належать до ортогональної системи координат x, y, z , які позначають відповідно відстані за твірною, дугою напрямної і нормаллю. Початок координат помістимо у середній поверхні ($z = 0$) з радіусом R . У заданій системі координат оболонка займає область $[0, l] \times [0, b] \times [-h, h]$.

Нехай на оболонку діють зовнішні сили, а також вона нагрівається джерелами тепла та через конвективний теплообмін між поверхнями $z = \pm h$ і середовищем. Для дослідження термопружного стану такої оболонки використаємо математичну модель [3] з шістьма степенями свободи. В загальному випадку ця модель складається з взаємозв’язаних систем рівнянь термопружності і рівнянь теплопровідності. Знехтуємо впливом деформації на зміну температурного поля, тоді ці рівняння будуть незалежні.

Рівняння теплопровідності. Якщо припустити, що температура за товщиною оболонки змінюється лінійно, а між поверхнями $z = \pm h$ і середовищем, яке оточує ці поверхні, відбувається теплообмін за законом Ньютона, то двовимірні рівняння теплопровідності для визначення характеристик середньої температури T_1 і температурного градієнта T_2 мають вигляд

$$\Delta_{(1)}T_1 - \varepsilon_1^t T_1 + \Delta_{(2)}T_2 + \left(\frac{\lambda_{33}^{(1)}}{hR} - \varepsilon_2^t \right) T_2 - c_v^{(1)} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} - c_v^{(2)} \frac{\partial T_2}{\partial \tau} = -f_1,$$

$$\Delta_{(2)}T_1 - \varepsilon_2^t T_1 + \Delta_{(3)}T_2 + \left(\frac{\lambda_{33}^{(2)}}{hR} - \frac{\lambda_{33}^{(1)}}{h^2} - \varepsilon_1^t \right) T_2 - c_v^{(2)} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} - c_v^{(3)} \frac{\partial T_2}{\partial \tau} = -f_2, \quad (1)$$

де $\Delta_{(k)} = (\lambda_{11}^{(k)} \partial_{11}^2 + \lambda_{22}^{(k)} \partial_{22}^2)$; $f_i = t_1^z \varepsilon_i^t + t_2^z \varepsilon_{3-i}^t + W_i^t$; $\varepsilon_i^t = (\alpha^+ - (-1)^i \alpha^-)$;

$$T_i = \frac{2i-1}{2h^i} \int_{-h}^h t z^{i-1} dz; \quad \{\lambda_{jj}^{(k)}, c_v^{(k)}\} = \int_{-h}^h \{\lambda_{jj}(z), c_v(z)\} \left(\frac{z}{h}\right)^{k-1} dz;$$

$$W_i^t = \int_{-h}^h w_t \left(\frac{z}{h}\right)^{i-1} dz, \quad (k, j = 1, 2, 3; i = 1, 2); \quad t_i^z = \frac{1}{2} (t_z^+ - (-1)^i t_z^-); \quad \partial_1 = \partial/\partial x,$$

$\partial_2 = \partial/\partial y$; $c_v = c\rho$; $\lambda_{jj}(z)$ – коефіцієнти теплопровідності; t_z^+, t_z^- – температури

середовищ на поверхнях $z = h$ і $z = -h$, відповідно; α^+, α^- – коефіцієнти тепло-віддачі з цих поверхонь; $c(z)$ – питома теплоємність; $w_i(x, y, z, \tau)$ – густина теплових джерел; τ – змінна часу; $t(x, y, z, \tau)$ – функція температурного поля; $\rho(z)$ – питома густина.

Для однозначності розв'язку до системи (1) долучаємо крайові умови: на краях $x = 0$ і $x = l$ задаємо вирази $a_0 T_1 + a_1 \partial_1 T_1$ і $a_2 T_2 + a_3 \partial_1 T_2$, на краях $y = 0$ і $y = b$ – вирази $a_4 T_1 + a_5 \partial_2 T_1$ і $a_6 T_2 + a_7 \partial_2 T_2$, ($a_i = \text{const}$), а в початковий момент – температурні характеристики T_1 і T_2 .

Рівняння термопружності. Фізичні співвідношення між напруженнями σ_{ij} і деформаціями e_{ij} [18]

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}(z) & c_{12}(z) & c_{13}(z) \\ c_{12}(z) & c_{22}(z) & c_{23}(z) \\ c_{13}(z) & c_{23}(z) & c_{33}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_{11}^t(z) \\ \beta_{22}^t(z) \\ \beta_{33}^t(z) \end{pmatrix} t, \quad (2)$$

$$\sigma_{13} = c_{44}(z)e_{13}, \quad \sigma_{23} = c_{55}(z)e_{23}, \quad \sigma_{12} = c_{66}(z)e_{12},$$

де $\beta_{11}^t(z) = c_{11}(z)\alpha_{11}^t(z) + c_{12}(z)\alpha_{22}^t(z) + c_{13}(z)\alpha_{33}^t(z)$; $\beta_{22}^t(z) = c_{12}(z)\alpha_{11}^t(z) + c_{22}(z)\alpha_{22}^t(z) + c_{23}(z)\alpha_{33}^t(z)$; $\beta_{33}^t(z) = c_{13}(z)\alpha_{11}^t(z) + c_{23}(z)\alpha_{22}^t(z) + c_{33}(z)\alpha_{33}^t(z)$; $c_{ij}(z)$ – коефіцієнти пружності ортотропного тіла; $\alpha_{ii}^t(z)$ – коефіцієнти лінійного теплового розширення.

Геометричні співвідношення між компонентами деформації довільної точки оболонки e_{ij} і узагальненими переміщеннями $u_1, u_2, w, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ [3]

$$e_{11} = \partial_1 u_1 + z \partial_1 \gamma_1, \quad e_{22} = \frac{1}{1+z/R} \left(\partial_2 u_2 + \frac{w}{R} + z \left(\partial_2 \gamma_2 + \frac{\gamma_3}{R} \right) \right), \quad e_{33} = \gamma_3,$$

$$e_{13} = \gamma_1 + \partial_1 w + z \partial_1 \gamma_3, \quad e_{23} = \frac{1}{1+z/R} \left(\gamma_2 + \partial_2 w - \frac{u_2}{R} + z \partial_2 \gamma_3 \right),$$

$$e_{12} = \partial_1 u_2 + \frac{1}{1+z/R} \partial_2 u_1 + z \left(\partial_1 \gamma_2 + \frac{1}{1+z/R} \partial_2 \gamma_1 \right), \quad (3)$$

де u_1, u_2, w – компоненти вектора переміщень точок середньої поверхні; γ_1, γ_2 – кути повороту нормалі у напрямках x і y , відповідно; γ_3 – поперечна нормальна деформація.

Рівняння рівноваги в узагальнених переміщеннях

$$L_{k1}u_1 + L_{k2}u_2 + L_{k3}w + L_{k4}\gamma_1 + L_{k5}\gamma_2 + L_{k6}\gamma_3 = b_k, \quad (k = 1, 2, \dots, 6). \quad (4)$$

Тут диференціальні оператори L_{kj} ($L_{kj} = L_{jk}$) і вільні члени b_k мають вигляд

$$L_{11} = A_{11}\partial_{11}^2 + A_{66}\partial_{22}^2, \quad L_{12} = (A_{12} + A_{66})\partial_{12}^2, \quad L_{13} = A_{12}/R \partial_1,$$

$$L_{14} = B_{11}\partial_{11}^2 + B_{66}\partial_{22}^2, \quad L_{15} = (B_{12} + B_{66})\partial_{12}^2, \quad L_{16} = (A_{13} + B_{12}/R)\partial_1,$$

$$L_{22} = A_{66}\partial_{11}^2 + A_{22}\partial_{22}^2 - k'A_{55}/R^2, \quad L_{23} = (A_{22} + k'A_{55})/R \partial_2,$$

$$L_{24} = (B_{12} + B_{66})\partial_{12}^2, \quad L_{25} = B_{66}\partial_{11}^2 + B_{22}\partial_{22}^2 + k'A_{55}/R,$$

$$L_{26} = (A_{23} + (B_{22} + k'B_{55})/R)\partial_2, \quad L_{33} = -k'A_{44}\partial_{11}^2 - k'A_{55}\partial_{22}^2 + A_{22}/R^2,$$

$$L_{34} = (B_{12}/R - k'A_{44})\partial_1, \quad L_{35} = (B_{22}/R - k'A_{55})\partial_2,$$

$$L_{36} = -k'B_{44}\partial_{11}^2 - k'B_{55}\partial_{22}^2 + A_{23}/R + B_{22}/R^2,$$

$$L_{44} = D_{11}\partial_{11}^2 + D_{66}\partial_{22}^2 - k'A_{44}, \quad L_{45} = (D_{12} + D_{66})\partial_{12}^2,$$

$$L_{46} = (B_{13} - k'B_{44} + D_{12}/R)\partial_1, \quad L_{55} = D_{66}\partial_{11}^2 + D_{22}\partial_{22}^2 - k'A_{55},$$

$$L_{56} = (B_{23} - k'B_{55} + D_{22}/R)\partial_2,$$

$$L_{66} = -k'D_{44}\partial_{11}^2 - k'D_{55}\partial_{22}^2 + A_{33} + 2B_{23}/R + D_{22}/R^2,$$

$$b_1 = A_{11}^t\partial_1 T_1 + (B_{11}^t/h)\partial_1 T_2 - q_1, \quad b_2 = A_{22}^t\partial_2 T_1 + (B_{22}^t/h)\partial_2 T_2 - q_2,$$

$$b_3 = (A_{22}^t/R)T_1 + B_{22}^t/(Rh)T_2 + q_3, \quad b_4 = B_{11}^t\partial_1 T_1 + (D_{11}^t/h)\partial_1 T_2 - m_1,$$

$$b_5 = B_{22}^t\partial_2 T_1 + (D_{22}^t/h)\partial_2 T_2 - m_2, \quad b_6 = (A_{33}^t + B_{22}^t/R)T_1 + (B_{33}^t + D_{22}^t/R)/hT_2 + m_3,$$

$$\text{де } \{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\} = \int_{-h}^h c_{ij}(z) \{1, z, z^2\} dz; \quad \{A_{ii}^t, B_{ii}^t, D_{ii}^t\} = \int_{-h}^h \beta_{ii}^t(z) \{1, z, z^2\} dz; \quad k' - \text{коє-$$

фіцієнт зсуву [19]; $q_1, q_2, q_3, m_1, m_2, m_3$ – компоненти поверхневого навантаження [1, 3].

Для однозначності розв'язку системи (4) на краях оболонки задаємо відповідні крайові умови: по одній величині з кожної пари $\{N_{11}, u_1\}, \{N_{12}, u_2\}, \{N_{13}, w\}, \{M_{11}, \gamma_1\}, \{M_{12}, \gamma_2\}, \{M_{13}, \gamma_3\}$ для $x=0, x=l$ і $\{N_{21}, u_1\}, \{N_{22}, u_2\}, \{N_{23}, w\}, \{M_{22}, \gamma_2\}, \{M_{12}, \gamma_1\}, \{M_{23}, \gamma_3\}$ для $y=0, y=b$.

Система рівнянь (4) разом з крайовими умовами складає крайову задачу теорії температурних напружень для неоднорідних ортотропних циліндричних оболонок відкритого профілю у переміщеннях. За відомими переміщеннями визначаємо напруження і деформації відповідно з формул (2) і (3).

Метод розв'язування. Нехай відкрита ортотропна циліндрична оболонка виготовлена з неоднорідного матеріалу так, що її фізико-механічні властивості змінюються за товщиною за степеневим законом. Тоді для коефіцієнтів пружності $c_{ij}(z)$, лінійного теплового розширення $\alpha_{ij}^t(z)$, теплопровідності $\lambda_{jj}(z)$ та теплоємності $c_v(z)$ задаємо таку залежність від координати z [5]:

$$c_{ij}(z) = c_{ij}^0 \left(\frac{R+z}{R-h} \right)^r, \quad \alpha_{ij}^t(z) = \alpha_{ij}^0 \left(\frac{R+z}{R-h} \right)^r, \quad \lambda_{jj}(z) = \lambda_{jj}^0 \left(\frac{R+z}{R-h} \right)^r,$$

$$c_v(z) = c_v^0 \left(\frac{R+z}{R-h} \right)^r,$$

де r – параметр неоднорідності; $c_{ij}^0, \alpha_{ij}^0, \lambda_{jj}^0, c_v^0$ – відомі сталі, які характеризують властивості ортотропного матеріалу.

Нехай краї оболонки шарнірно оперті і на них задана нульова температура. Тоді крайові умови такі:

$$\text{для } x=0 \text{ і } x=l: w = u_2 = \gamma_3 = \gamma_2 = 0, \quad N_{11} = M_{11} = 0, \quad (5)$$

$$T_1 = T_2 = 0, \quad (6)$$

$$\text{для } y=0 \text{ і } y=b: w = u_1 = \gamma_3 = \gamma_1 = 0, \quad N_{22} = M_{22} = 0, \quad (7)$$

$$T_1 = T_2 = 0, \quad (8)$$

$$\text{для } \tau = 0: T_1(x, y, 0) = T_1^0(x, y), \quad T_2(x, y, 0) = T_2^0(x, y). \quad (9)$$

Знаходження температурного поля. Інтегральні характеристики температури, згідно з крайовими умовами (6) і (8), розвинемо в ряди Фур'є

$$\{T_1, T_2\} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{T_{1nm}, T_{2nm}\} \sin \frac{\pi n x}{l} \sin \frac{\pi m y}{b}.$$

Тоді рівняння теплопровідності (1) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} C_{(1)} \frac{dT_{1nm}}{d\tau'} + C_{(2)} \frac{dT_{2nm}}{d\tau'} + g_1 T_{1nm} + g_2 T_{2nm} &= f_{1nm}, \\ C_{(2)} \frac{dT_{1nm}}{d\tau'} + C_{(3)} \frac{dT_{2nm}}{d\tau'} + g_3 T_{1nm} + g_4 T_{2nm} &= f_{2nm}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{де } g_1 = (\Lambda_{11}^{(1)} \mu_n^2 + \Lambda_{22}^{(1)} \mu_m^2) \delta^2 + \text{Bi}_1; \quad g_2 = (\Lambda_{11}^{(2)} \mu_n^2 + \Lambda_{22}^{(2)} \mu_m^2) \delta^2 - \delta \Lambda_{33}^{(1)} + \text{Bi}_2;$$

$$\mu_n = \frac{\pi n R}{l}; \quad g_3 = (\Lambda_{11}^{(2)} \mu_n^2 + \Lambda_{22}^{(2)} \mu_m^2) \delta^2 + \text{Bi}_2; \quad g_4 = (\Lambda_{11}^{(3)} \mu_n^2 + \Lambda_{22}^{(3)} \mu_m^2) \delta^2 + \Lambda_{33}^{(1)} -$$

$$- \delta \Lambda_{33}^{(2)} + \text{Bi}_1; \quad \delta = \frac{h}{R}; \quad \mu_m = \frac{\pi m R}{b}; \quad \Lambda_{ii}^{(k)} = \frac{1}{(1-\delta)^r} \frac{\lambda_{ii}^0}{\lambda_{11}^0} \frac{\beta_k}{2\delta^k}; \quad C_{(k)} = \frac{1}{(1-\delta)^r} \frac{\beta_k}{2\delta^k},$$

$$(k=1,2,3); \quad \beta_1 = I(r+1); \quad \beta_2 = I(r+2) - I(r+1); \quad \beta_3 = I(r+3) - 2I(r+2) + I(r+1);$$

$$I(r) = \frac{1}{r} \left[(1+\delta)^r - (1-\delta)^r \right]; \quad \tau' = \frac{\lambda_{11}^0}{c_v^0 h^2} \tau; \quad \text{Bi}_i = \frac{\varepsilon_i^t h}{2\lambda_{11}^0}, \quad (i=1,2); \quad f_{1nm}, f_{2nm} - \text{коєфі-}$$

цієнти Фур'є для функцій температурних навантажень:

$$f_1(x, y, \tau) = \text{Bi}_1 t_1^z + \text{Bi}_2 t_2^z + W_1^t \frac{h}{2\lambda_0} = Q_1(x, y) f_1^t(\tau),$$

$$f_2(x, y, \tau) = \text{Bi}_2 t_1^z + \text{Bi}_1 t_2^z + W_2^t \frac{h}{2\lambda_0} = Q_2(x, y) f_2^t(\tau).$$

Застосовуючи до системи (10) інтегральне перетворення Лапласа за початкових умов (9), одержимо:

$$\begin{aligned} T_{1nm} &= \frac{1}{C^*} \sum_{i \neq j=1}^2 \frac{1}{p_i - p_j} \left\{ \left[(C_{(3)} p_i - g_4) Q_{1nm} Z_{1i}(\tau') - (C_{(2)} p_i - g_2) Q_{2nm} Z_{2i}(\tau') \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[(C_{(3)} p_i - g_4) \tilde{T}_{nm}^0 - (C_{(2)} p_i - g_2) \bar{T}_{nm}^0 \right] e^{-p_i \tau'} \right\}, \\ T_{2nm} &= \frac{1}{C^*} \sum_{i \neq j=1}^2 \frac{1}{p_i - p_j} \left\{ \left[(C_{(1)} p_i - g_1) Q_{2nm} Z_{2i}(\tau') - (C_{(2)} p_i - g_3) Q_{1nm} Z_{1i}(\tau') \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[(C_{(1)} p_i - g_1) \bar{T}_{nm}^0 - (C_{(2)} p_i - g_3) \tilde{T}_{nm}^0 \right] e^{-p_i \tau'} \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{де } C^* = C_{(1)} C_{(3)} - (C_{(2)})^2; \quad \tilde{T}_{nm}^0 = C_{(1)} T_{1nm}^0 + C_{(2)} T_{2nm}^0; \quad \bar{T}_{nm}^0 = C_{(2)} T_{1nm}^0 + C_{(3)} T_{2nm}^0; \\ -p_1 \text{ і } -p_2 - \text{корені рівняння } C^* p^2 + [C_{(1)} g_4 + C_{(3)} g_1 - C_{(2)} (g_3 + g_2)] p + \\ + g_1 g_4 - g_2 g_3 = 0;$$

$$\{T_{jnm}^0, Q_{jnm}\} = \frac{4}{bl} \int_0^l \int_0^b \{T_j^0, Q_j\} (x, y) \sin \frac{\pi nx}{l} \sin \frac{\pi my}{b} dx dy; \quad (12)$$

$$Z_{ji}(\tau') = \int_0^{\tau'} f_j^t(v) e^{-P_i(\tau'-v)} dv, \quad (j, i=1, 2). \quad (13)$$

Знаходження узагальнених переміщень. Розв'язок системи рівнянь рівноваги (4), який задовольняє крайові умови (5) і (7), за відомого температурного поля (11) знаходимо у вигляді

$$\begin{aligned} \{u_1, \gamma_1\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{U_{1nm}, \Gamma_{1nm}\} \cos \frac{\pi nx}{l} \sin \frac{\pi my}{b}, \\ \{u_2, \gamma_2\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{U_{2nm}, \Gamma_{2nm}\} \sin \frac{\pi nx}{l} \cos \frac{\pi my}{b}, \\ \{w, \gamma_3\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{W_{nm}, \Gamma_{3nm}\} \sin \frac{\pi nx}{l} \sin \frac{\pi my}{b}. \end{aligned} \quad (14)$$

Після підстановки виразів (14) в (4) одержимо систему алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів Фур'є $U_{1nm}, U_{2nm}, W_{nm}, \Gamma_{1nm}, \Gamma_{2nm}, \Gamma_{3nm}$ шуканих узагальнених переміщень, яку запишемо в матричному вигляді

$$\mathbf{MU} = \mathbf{VT}_{1nm} + \mathbf{ST}_{2nm}, \quad (15)$$

де $\mathbf{U} = \{U_{1nm}, U_{2nm}, W_{nm}, \Gamma_{1nm}, \Gamma_{2nm}, \Gamma_{3nm}\}^T$; $\mathbf{M} = (m_{ij})_{6 \times 6}$; $\mathbf{V} = (v_i)_{6 \times 1}$; $\mathbf{S} = (s_i)_{6 \times 1}$. Коефіцієнти матриць m_{ij} , v_i і s_i обчислюємо з диференціальних операторів системи (4). Розв'язок рівняння (15) має вигляд $\mathbf{U} = \frac{1}{|\mathbf{M}|} \mathbf{M}^* (\mathbf{VT}_{1nm} + \mathbf{ST}_{2nm})$, де $|\mathbf{M}|$

– визначник матриці \mathbf{M} , а \mathbf{M}^* – приєднана матриця.

Аналіз числових результатів. Числовий аналіз виконували для циліндричної оболонки, зовнішня поверхня $z = h$ якої нагрівається середовищем, температура якого задана функцією

$$t_z^+(x, y, \tau) = t^* \cos \frac{\pi}{2d_2} (y - y_0) N(x) N(y) (1 - e^{-\beta^* \tau}), \quad (16)$$

де $N(x) = S_-(x - x_0 + d_1) - S_+(x - x_0 - d_1)$; $N(y) = S_-(y - y_0 + d_2) - S_+(y - y_0 - d_2)$; $S_+(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$; $S_-(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$; $t^*, \beta^* = \text{const}$; $2d_1 \times 2d_2$ – розміри ділянки нагріву; x_0, y_0 – координати її центра.

Вважаємо, що поверхневі сили і джерела тепла відсутні, на поверхні $z = -h$ температура середовища $t_z^- = 0$, коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь $z = \pm h$ рівні між собою $\alpha^+ = \alpha^- = \alpha_z$, а в початковий момент $T_1^0 = T_2^0 = 0$. Тоді, враховуючи функцію (16), за формулами (12) і (13) обчислюємо:

$$Q_{jnm} = \frac{4t^* \text{Bi} \cdot \sin \frac{\pi nx_0}{l} \sin \frac{\pi my_0}{b} \sin \frac{\pi nd_1}{l} \cos \frac{\pi md_2}{b}}{\pi^2 n \frac{d_2}{b} \left[\left(\frac{b}{2d_2} \right)^2 - m^2 \right]}, \quad \text{якщо } m \neq \frac{b}{2d_2},$$

$$Q_{jnm} = \frac{2t^* \text{Bi}}{\pi n m} \sin \frac{\pi n x_0}{l} \sin \frac{\pi m y_0}{b} \sin \frac{\pi n d_1}{l}, \text{ якщо } m = \frac{b}{2d_2},$$

$$Z_{ji}(\tau') = \frac{1}{p_i} (1 - e^{-p_i \tau'}) - \frac{1}{p_i - \beta^*} (e^{-\beta^* \tau'} - e^{-p_i \tau'}).$$

Числовий аналіз виконували для ортотропного матеріалу з такими фізико-механічними властивостями [2]: $c_{11}^0 = 173,879$ ГПа; $c_{22}^0 = 7,4$ ГПа; $c_{33}^0 = 7,4$ ГПа; $c_{12}^0 = 2,318$ ГПа; $c_{13}^0 = 2,318$ ГПа; $c_{23}^0 = 1,873$ ГПа; $c_{55}^0 = 1,38$ ГПа; $c_{44}^0 = 3,45$ ГПа; $c_{66}^0 = 3,45$ ГПа; $\alpha_{11}^0 = 5,7 \cdot 10^{-7}$ 1/К; $\alpha_{22}^0 = 3,56 \cdot 10^{-6}$ 1/К; $\alpha_{33}^0 = 3,56 \cdot 10^{-6}$ 1/К; $\lambda_{11}^0 = 3,642$ W/(m·K); $\lambda_{22}^0 = 0,96$ W/(m·K); $\lambda_{33}^0 = 0,96$ W/(m·K); $c_v^0 = 1,64 \cdot 10^6$ J/(m³·K). Значення інших параметрів такі: $h/R = 0,05$, $l/R = 3$, $d_2/b = 0,5$, $x_0 = l/2$, $y_0 = b/2$, $k' = 5/6$.

Обчислили безрозмірні прогини $w' = \frac{w}{R\alpha_{11}^0 t^*}$ для $(x = 0,5l; y = 0,5b; z = 0)$,

нормальні напруження $\sigma'_i = \frac{\sigma_{ii}}{c_{11}^0 \alpha_{11}^0 t^*}$ для $(x = 0,5l; y = 0,5b; z = h)$ і зсувні

$\sigma'_{13} = \frac{\sigma_{13}}{c_{11}^0 \alpha_{11}^0 t^*}$ для $(x = 0,75l; y = 0,5b; z = 0)$.

Проілюстровано (рис. 1) зміну прогинів w' і нормальних напружень σ'_1 , σ'_2 залежно від параметра неоднорідності r для безрозмірного коефіцієнта тепловіддачі (критерія Біо) $\text{Bi} = \alpha_z h / \lambda_{11}^0$ рівного 0,1; 0,3; 0,5 і 1. Значення інших параметрів такі: $\beta^* = 1$, $\Theta = \pi$, $\tau' = 1$, $d' = d_1/l = 0,25$. Як бачимо, зі збільшенням параметра неоднорідності прогини (рис. 1a) і напруження (рис. 1b, c) монотонно зростають, причому інтенсивніше з підвищенням тепловіддачі. Зі зміною параметра неоднорідності нормальні напруження змінюють знак, тобто існує такий параметр, за якого напруження нульові.

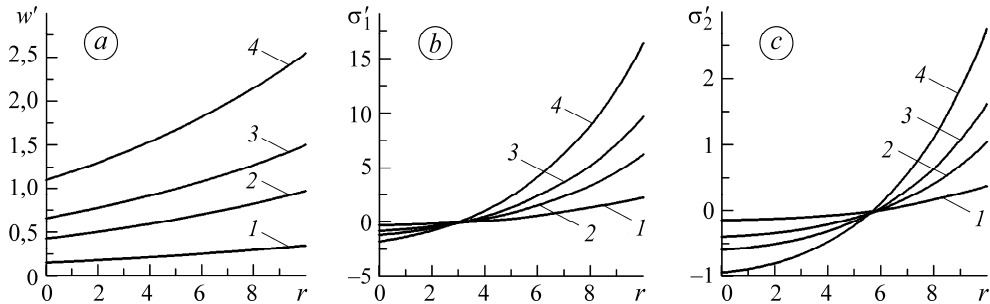


Рис. 1. Залежність безрозмірних прогину w' (a), осевого σ'_1 (b) та колового σ'_2 (c) напружень від параметра неоднорідності r : 1 – $\text{Bi} = 0,1$; 2 – 0,3; 3 – 0,5; 4 – 1.

Fig. 1. Dependence of dimensionless deflection w' (a), axial stress σ'_1 (b) and circumferential stress σ'_2 (c) on the heterogeneity parameter r : 1 – $\text{Bi} = 0,1$; 2 – 0,3; 3 – 0,5; 4 – 1.

На рис. 2 наведені графіки залежності прогину w' і напружень σ'_1 , σ'_2 , σ'_{13} від центрального кута розхилу оболонки Θ для таких параметрів неоднорідності: $r = 0; 2; 4; 6$ і 8. Для обчислень брали $\text{Bi} = 1$, $\beta^* = 1$, $\tau' = 1$.

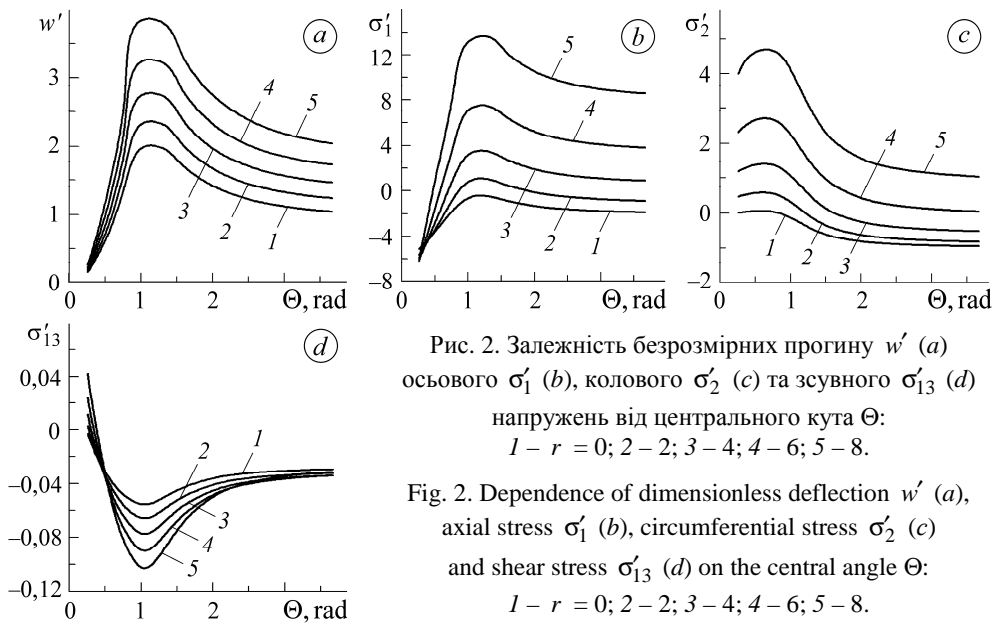


Рис. 2. Залежність безрозмірних прогину w' (a) осьового σ'_1 (b), колового σ'_2 (c) та зсувного σ'_{13} (d) напружень від центрального кута Θ :
 $1 - r = 0$; $2 - 2$; $3 - 4$; $4 - 6$; $5 - 8$.

Fig. 2. Dependence of dimensionless deflection w' (a), axial stress σ'_1 (b), circumferential stress σ'_2 (c) and shear stress σ'_{13} (d) on the central angle Θ :
 $1 - r = 0$; $2 - 2$; $3 - 4$; $4 - 6$; $5 - 8$.

Як бачимо, за деякого кута Θ графіки мають екстремуми. Зі збільшенням кута розхилу ($\Theta > 2$) значення прогину та напружень прямують до сталого значення.

Зміну напружень залежно від часу τ' для ширини смуги нагрівання $d' = d_1/l$ рівної 0,1; 0,25 і 0,4 і $\beta^* = 0,1; 1$ показано на рис. 3. Обчислювали для $Bi = 1$, $r = 1$, $\Theta = \pi$. Як бачимо, змінюючи ширину смуги нагріву d' , можна суттєво впливати на значення і знак напружень. З плином часу напруження прямують до сталого значення, причому швидше для більших β^* .

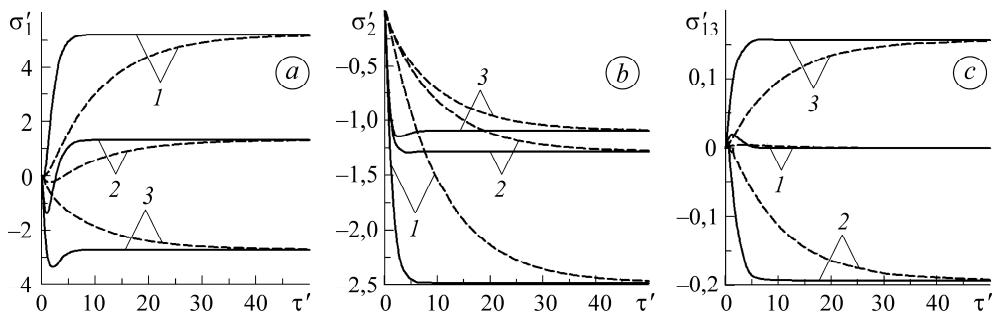


Рис. 3. Залежність безрозмірних осьового σ'_1 (a), колового σ'_2 (b) та зсувного σ'_{13} (c) напружень від безрозмірного часу τ' : $1 - d' = 0,1$; $2 - 0,25$; $3 - 0,4$;
 суцільні лінії – $\beta^* = 1$; штрихові – $\beta^* = 0,1$.

Fig. 3. Dependence of dimensionless axial stress σ'_1 (a), circumferential stress σ'_2 (b) and shear stress σ'_{13} (c) on dimensionless time τ' : $1 - d' = 0,1$; $2 - 0,25$; $3 - 0,4$;
 solid lines – $\beta^* = 1$; dashed lines – $\beta^* = 0,1$.

ВИСНОВКИ

На основі уточненої зсувної теорії першого порядку розвинута методика розв'язування задач теплопровідності та термопружності неоднорідних анізотропних оболонок скінченної довжини з вільно опертими краями. Досліджували вплив неоднорідності, часу, коефіцієнта тепловіддачі та геометричних параметрів.

рів на напружено-деформований стан функціонально-градієнтної ортотропної циліндричної оболонки відкритого профілю за локального нагрівання конвективним теплообміном. З числового аналізу випливає, що параметр неоднорідності суттєво впливає на напруження і прогини. З його збільшенням прогини і напруження монотонно зростають, інтенсивніше для більших коефіцієнтів тепловіддачі. Зі зміною параметра неоднорідності нормальні напруження змінюють знак, тобто є таке його значення, за якого напруження нульові. Одержані результати можна використати для аналізу напруженого стану тонкостінних елементів з покриттями.

1. Reddy J. N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells. Theory and Analysis. – New York: CRC Press, 2004. – 831 p.
2. Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed.: R. Hetnarski. – Dordrecht: Springer, 2014. – 6725 p.
3. Моделювання термопружних процесів в неоднорідних анізотропних оболонках з початковими деформаціями / Р. М. Кушнір, М. М. Николишин, У. В. Жидик, В. М. Флячок // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 2. – С. 122–136.
4. Ayoubi P. and Alibeigloo A. Three-dimensional transient analysis of FGM cylindrical shell subjected to thermal and mechanical loading // J. Thermal Stresses. – 2017. – **40**, № 9. – P. 1166–1183.
5. Ding H. J., Wang H. M., and Chen W. Q. A solution of a non-homogeneous orthotropic cylindrical shell for axisymmetric plane strain dynamic thermoelastic problems // J. Sound Vibration. – 2003. – **263**. – P. 815–829.
6. Puunera D., Kant T., and Desai Y. M. Thermoelastic analysis of laminated and functionally graded sandwich cylindrical shells with two refined higher order models // J. Thermal Stresses. – 2018. – **41**, № 1. – P. 54–79.
7. Shinde B. M. and Sayyad A. S. Thermoelastic analysis of laminated composite and sandwich shells considering the effects of transverse shear and normal deformations // J. Thermal Stresses. – 2020. – **43**, № 10. – P. 1234–1257.
8. Kushnir R. M. and Zhydyk U. V. Temperature stresses in functionally graded cylindrical shell // Materials Science. – 2019. – **54**, № 5. – P. 666–677.
9. Chen X., Nie G., and Yang X. Thermal postbuckling analysis of variable angle tow composite cylindrical panels // J. Thermal Stresses. – 2021. – **44**, № 7 – P. 850–882.
10. Ahmadi H. and Foroutan K. Nonlinear static and dynamic thermal buckling analysis of imperfect multilayer FG cylindrical shells with an FG porous core resting on nonlinear elastic foundation // J. Thermal Stresses. – 2020. – **43**, № 5. – P. 629–649.
11. Esmaeili H. R., Arvin H., and Kiani Y. Axisymmetric nonlinear rapid heating of FGM cylindrical shells // J. Thermal Stresses. – 2019. – **42**, № 4. – P. 490–505.
12. Bahuji A. and Eslami M. R. Coupled thermoelasticity of functionally graded cylindrical shells // J. of Mechanics Research Communications. – 2007. – **34**, № 1. – P. 1–18.
13. Rahmani M. and Petrudi A. M. Analytical investigation of the vibrational and dynamic response of nano-composite cylindrical shell under thermal shock and mild heat field by DQM method // J. Modeling and Simulation Materials. – 2020. – **3**, № 1. – P. 22–36.
14. Manthena V. R. and Kedar G. D. On thermoelastic problem of a thermosensitive functionally graded rectangular plate with instantaneous point heat source // J. Thermal Stresses. – 2019. – **42**, № 7. – P. 849–862.
15. Pandey S. and Pradyumna S. Transient stress analysis of sandwich plate and shell panels with functionally graded material core under thermal shock // J. Thermal Stresses. – 2018. – **41**, № 5. – P. 543–567.
16. Thai H. T. and Kim S. E. A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells // Compos. Struct. – 2015. – **128**. – P. 70–86.
17. Swaminathan K. and Sangeetha D. M. Thermal analysis of FGM plates – A critical review of various modeling techniques and solution methods // Compos. Struct. – 2017. – **160**. – P. 490–505.
18. Hetnarski R. B. and Eslami M. R. Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications. – New York: Springer, 2009. – 560 p.
19. Mirsky I. Vibrations of orthotropic thick cylindrical shells // J. Acoust. Soc. Am. – 1964. – **36**, № 1. – P. 41–51.

Одержано 19.04.2022