

УДК 621.314:621.396.66

АНАЛІЗ ВІБРАЦІЙ ПОШКОДЖЕНОГО ПІДШИПНИКОВОГО ВУЗЛА ПІДЙОМНОГО МЕХАНІЗМУ ПОРТОВОГО КРАНА

І. М. ЯВОРСЬКИЙ^{1,2}, *Р. М. ЮЗЕФОВИЧ*^{1,3}, *О. В. ЛИЧАК*¹,
*П. О. СЕМЕНОВ*⁴, *М. З. ВАРИВОДА*¹

¹ Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів;

² Бидгоцька політехніка, Польща;

³ Національний університет "Львівська політехніка";

⁴ Одеський національний морський університет

Методи періодично нестационарних випадкових процесів використано для аналізу вібрацій пошкодженого підшипникового вузла підйомного механізму. Для виявлення та аналізу періодичної нестационарності першого та другого порядків застосовано метод найменших квадратів. На основі обчислених параметрів, які описують структуру періодичної нестационарності, зроблено висновок про тип дефекту і стадії його розвитку.

Ключові слова: *періодично нестационарні випадкові процеси, вібраційний сигнал, модуляція, підшипниковий вузол, пошкодження.*

The methods of periodically non-stationary random processes were used to analyze the vibrations of the damaged bearing unit of the lifting mechanism. To identify and analyze periodical nonstationarity of the first and second orders the least squares method was used. On the basis of the calculated parameters, which describe the structure of periodical non-stationarity, a conclusion about the type of defect and its development was made.

Keywords: *periodically non-stationary random processes, vibration signal, modulation, bearing unit, damage.*

Вступ. Для визначення технічного стану елементів складних механічних конструкцій та ефективного дослідження їх механічних і фізичних властивостей з використанням експериментальних результатів потрібно виявити, проаналізувати та використати ті їх характерні особливості, які дадуть змогу повною мірою розв'язати сформульовані задачі [1–11]. Такі особливості встановлюють, використовуючи відповідні методи обробки даних і їх аналіз [12–18], які розроблені на основі обґрунтованих математичних моделей досліджуваних процесів [19–25]. Слід зазначити, що вдало вибрані математичні моделі досліджуваних вібраційних сигналів створюють підґрунтя для опису і розуміння їх властивостей. Адекватною моделлю вібраційних сигналів пошкоджених механізмів, котрим властиві риси повторюваності та стохастичності, є періодично нестационарні випадкові процеси (ПНВП) [26]. За появи розподілених чи локалізованих дефектів несучі гармоніки вібрацій стохастично модулюються як за амплітудою, так і за фазою. Властивості такої модуляції описують математичним сподіванням і кореляційною функцією ПНВП, а також їх коефіцієнтами Фур'є [27]. Параметри, які описують структуру цих функцій, є чутливими до дефектного стану механізму і тому їх використовують для моніторингу виявлених дефектів [4, 7, 9, 10, 13–20].

ПНВП-модель вібраційного сигналу. Математичне сподівання ПНВП $m(t) = E\overset{\circ}{\xi}(t)$; E – оператор математичного сподівання, кореляційна функція $R(t, \tau) = E\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\xi}(t+\tau)$, $\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - m(t)$ є періодичними функціями часу і їх можна подати рядами Фур'є [26, 27]:

$$m(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_k e^{ik\omega_0 t} = m_0 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} (m_k^c \cos k\omega_0 t + m_k^s \sin k\omega_0 t),$$

$$R(t, \tau) = \sum_{k \in \mathbb{N}} R_k(\tau) e^{ik\omega_0 t} = R_0(\tau) + \sum_{k \in \mathbb{N}} [R_k^c(\tau) \cos k\omega_0 t + R_k^s(\tau) \sin k\omega_0 t],$$

де $\omega_0 = \frac{2\pi}{P}$ – частота обертання приводу вала досліджуваного механізму; P – період; $m_k = \frac{1}{2}(m_k^c - im_k^s)$, $R_k(\tau) = \frac{1}{2}[R_k^c(\tau) - iR_k^s(\tau)] \quad \forall k \neq 0$; \mathbb{Z} – множина цілих чисел; \mathbb{N} – множина натуральних чисел. Коефіцієнти Фур'є математичного сподівання m_k і кореляції функції $R_k(\tau)$ характеризують властивості модулюючих процесів у поданні ПНВП у вигляді стохастичного ряду [26–29]:

$$\overset{\circ}{\xi}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_n e^{ik\omega_0 t} = \xi_0(t) + \sum_{k \in \mathbb{N}} [\xi_k^c(t) \cos k\omega_0 t + \xi_k^s(t) \sin k\omega_0 t],$$

де $\xi_k(t) = \frac{1}{2}[\xi_k^c(t) - i\xi_k^s(t)] \quad \forall k \neq 0$. Математичні сподівання модулюючих процесів є коефіцієнтами Фур'є функції $m(t)$, тобто $E\xi_k(t) = m_k$. Взаємкореляційні функції $R_{r,l}(\tau) = E\overset{\circ}{\xi}_r(t)\overset{\circ}{\xi}_l(t+\tau)$, знак “ $\overline{}$ ” означає комплексно спряжену величину, $\overset{\circ}{\xi}_r(t) = \xi_r(t) - m_r$, визначають коефіцієнти Фур'є кореляційної функції з індексами $k = l - r$:

$$R_k(\tau) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} R_{l-k,l}(\tau) e^{il\omega_0 \tau}. \quad (1)$$

Величини виразу (1) називають кореляційними компонентами. Випадковий процес є ПНВП, якщо $R_k(\tau) \neq 0$ для довільного $k \neq 0$.

Обробка вібраційних сигналів методами ПНВП-аналізу. Алгоритми для обчислення на основі експериментальних результатів величин, які описують властивості детермінованої та стохастичної складових вібрацій, обґрунтовано у працях [26, 27]. Серед них слід особливо виділити дослідження, присвячені пошуку прихованих періодичностей першого та другого порядків [26, 27, 30, 31]. Нижче проаналізовано вібраційні сигнали підшипникового вузла для виявлення дефекту та встановлення його типу. При цьому основну увагу приділено високочастотній модуляції гармонік обертання вала, з якою пов'язані основні зміни стану механізму.

Сигнали вібрацій отримали під час обстежень стану підйомних механізмів портового крана. Акселерометр був закріплений за допомогою магніту на корпусі підшипникового вузла, тривалість запису сигналу – 5 с. Верхня частота аналогового фільтра 2,5 kHz, частота дискретизації сигналу 10 kHz.

Фрагмент реалізації вібраційного сигналу отримано смуговою фільтрацією в інтервалі [1...2,5 kHz] (рис. 1). Для встановлення його спектрального складу в стаціонарному наближенні обчислили кореляційну функцію і спектральну густину:

$$\hat{R}(jh) = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} [\xi(nh) - \hat{m}] [\xi((n+j)h) - \hat{m}], \quad \hat{m} = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} \xi(nh), \quad (2)$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{h}{2\pi} \sum_{n=-M}^M k(nh) \hat{R}(nh) \cos \omega nh. \quad (3)$$

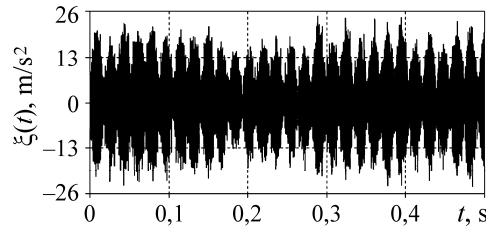
Тут $h = \frac{T}{K}$ – інтервал дискретизації; j – ціле число; T – довжина реалізації;

$M = \frac{\tau_m}{h}$ – деяке натуральне число; K – число вибірки; τ_m – точка обтинання корелограми; $k(nh)$ – кореляційне вікно Хеммінга:

$$k(\tau) = \begin{cases} 0,54 + 0,46 \cos \pi \frac{\tau}{\tau_m}, & |\tau| \leq \tau_m, \\ 0, & |\tau| > \tau_m. \end{cases}$$

Рис. 1. Відрізок реалізації сигналу.

Fig. 1. A fragment of signal realization.



Графіки оцінок (2) і (3) показано на рис. 2. Оцінка кореляційної функції для великих зсувів має форму незникаючих коливань, які можуть бути спричинені детермінованими компонентами. Спектр на рис. 2b містить вузькосмугові складові. Для перевірки цього припущення обчислили квадратичні функціонали [26, 27, 32]:

$$\hat{F}_1(f) = \frac{1}{2K+1} \sum_{n=-K}^K \hat{m}^2(f, nh), \quad (4)$$

де
$$\hat{m}(f, nh) = \sum_{k=1}^{L_1} \left[\hat{m}_k^c(f) \cos 2k\pi f nh + \hat{m}_k^s(f) \sin 2k\pi f nh \right],$$

$$\begin{cases} \hat{m}_k^c(f) \\ \hat{m}_k^s(f) \end{cases} = \frac{1}{2K+1} \sum_{r=-K}^K \xi(rh) \begin{cases} \cos 2k\pi f rh \\ \sin 2k\pi f rh \end{cases}, \quad (5)$$

а f – т. зв. пробна частота; L_1 – вибрана кількість гармонік. Пробна частота змінювалась в інтервалах [1472...1490 Hz] і [1529...1547 Hz]. У цих інтервалах були пікові значення спектральної густини. Графіки обчислених залежностей функціонала (4) показані на рис. 3. Чіткі піки на частотах $\hat{f}_0^{(1)} = 1481,13$ Hz і $\hat{f}_0^{(2)} = 1538,11$ Hz підтверджують це припущення. Обчислимо з використанням формули (5) амплітуду гармонік:

$$\hat{A}(f) = \sqrt{\left(\hat{m}_k^c(f)\right)^2 + \left(\hat{m}_k^s(f)\right)^2}.$$

Знаходимо $\hat{A}(\hat{f}_0^{(1)}) = 4,16$ m/s² і $\hat{A}(\hat{f}_0^{(2)}) = 7,833$ m/s². Сума потужностей гармонік дорівнює 39,33 (m/s²)², що становить майже половину загальної по-

тужності високочастотної вібрації.

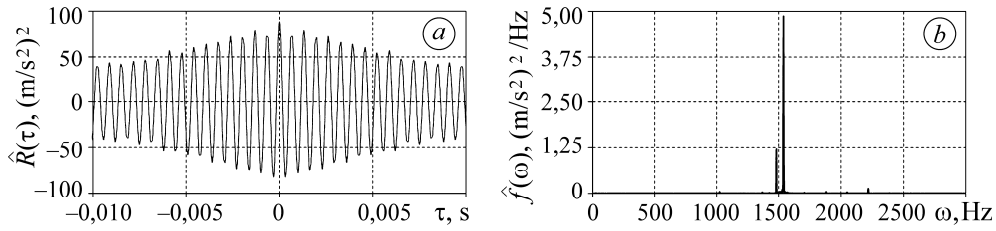


Рис. 2. Оцінки кореляційної функції (a) і спектральної густини (b).

Fig. 2. Estimators of covariance function (a) and spectral density (b).

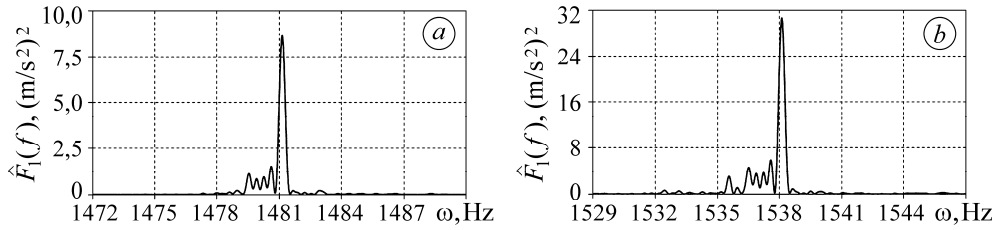


Рис. 3. Залежності квадратичного функціонала (4) від частоти в різних частотних інтервалах.

Fig. 3. Dependences of quadratic functional (4) on test frequency for different spectral ranges.

Подамо високочастотні детерміновані коливання у вигляді

$$\hat{m}(t) = \sum_{k=1}^2 \left[\hat{m}_k^c(\hat{f}_0^{(k)}) \cos 2\pi\hat{f}_0^{(k)}t + \hat{m}_k^s(\hat{f}_0^{(k)}) \sin 2\pi\hat{f}_0^{(k)}t \right] \quad (6)$$

і виділимо стохастичну складову $\dot{\xi}(nh) = \xi(nh) - \hat{m}(nh)$.

Оцінка кореляційної функції стохастичної складової вібраційного сигналу (рис. 4a) повільно зникає до рівня малопотужних флуктуацій і має групову структуру, а спектральної густини (рис. 4b) має два чітко виражених піки, при цьому потужність одного з них суттєво перевищує потужність іншого. Точки пікових значень практично збігаються з частотами гармонік математичного сподівання (6). У результаті додавання цих двох гармонік з близькими частотами виникають биття, для яких різниця $\hat{f}_0^{(2)} - \hat{f}_0^{(1)}$ є груповою частотою. Власне такі биття спостерігаємо на графіках реалізації кореляційної функції стохастичної складової вібраційного сигналу (рис. 4a).

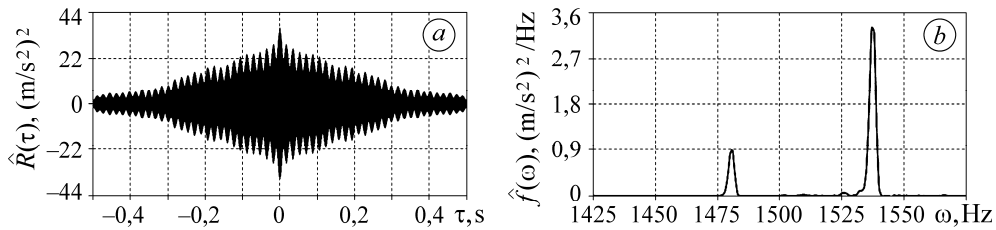


Рис. 4. Оцінки кореляційної функції (a) і спектральної густини (b) для стохастичної складової вібрації.

Fig. 4. Estimators for covariance function (a) and spectral density (b) for stochastic part of vibration signal.

Аналіз стохастичної складової вібрації почнемо з пошуку прихованих періодичностей другого порядку в інтервалі, який містить частоту обертання вала. Для цього використаємо квадратичний функціонал, побудований на основі методу найменших квадратів [31]:

$$\hat{F}_2(f) = \frac{1}{2K+1} \sum_{n=-K}^K \hat{R}^2(nh, 0, f), \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} \hat{R}^2(nh, 0, f) &= \sum_{k=1}^{L_2} \left[\hat{R}_k^c(f) \cos 2k\pi f n h + \hat{R}_k^s(f) \sin 2k\pi f n h \right], \\ \left\{ \begin{array}{l} \hat{R}_k^c(f) \\ \hat{R}_k^s(f) \end{array} \right\} &= \frac{2}{2K+1} \sum_{r=-K}^K \xi^2(rh) \left\{ \begin{array}{l} \cos 2k\pi f r h \\ \sin 2k\pi f r h \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

і L_2 – вибрана кількість гармонік. Тут вибрано $L_2 = 5$. Залежність функціонала (7) від пробної частоти показано на рис. 5. Потужний гострий пік на частоті $\hat{f}_0 = 28,52$ Hz вказує, що дисперсія є періодичною за часом функцією з періодом, який визначають частотою обертання вала мотора. Поклавши у формулі (8) $f = \hat{f}_0$, обчислимо коефіцієнти Фур'є дисперсії, а на основі формули

$$\hat{R}_0(0) = \frac{1}{2K+1} \sum_{n=-K}^K \xi^2(nh) \quad (9)$$

її середнє значення. Величина (9), а також амплітуди гармонік

$$\hat{V}(k\hat{f}_0) = \sqrt{\left[\hat{R}_k^c(\hat{f}_0) \right]^2 + \left[\hat{R}_k^s(\hat{f}_0) \right]^2}$$

подані у вигляді діаграми на рис. 6. Як бачимо, тільки амплітуди перших двох гармонік суттєво відрізняються від нуля. Щоб пояснити структуру часової мінливості дисперсії, розглянемо детальніше властивості високочастотної модуляції. Оскільки вона є вузькосмуговою, то для її опису використаємо подання Райса. Для цих квадратурних складових першої гармоніки обертання, яка є найпотужнішою, маємо:

$$\begin{aligned} \xi_1^c(t) &= p_1^c(t) \cos \lambda_0 t + p_1^s(t) \sin \lambda_0 t, \\ \xi_1^s(t) &= q_1^c(t) \cos \lambda_0 t + q_1^s(t) \sin \lambda_0 t, \end{aligned}$$

де λ_0 – резонансна частота, а кореляційні функції квадратур $p_1^{c,s}(t)$ і $q_1^{c,s}(t)$ задовольняють умови, за яких $\xi_1^c(t)$ і $\xi_1^s(t)$ є стаціонарно-зв'язаними випадковими процесами. Першу гармоніку вібрації тоді можна подати у вигляді

$$\xi_1(t) = \xi_1^+(t) + \xi_1^-(t),$$

де

$$\xi_1^+(t) = \mu_1^c(t) \cos(\lambda_0 + \omega_0)t + \mu_1^s(t) \sin(\lambda_0 + \omega_0)t, \quad (10)$$

$$\xi_1^-(t) = \nu_1^c(t) \cos(\lambda_0 - \omega_0)t + \nu_1^s(t) \sin(\lambda_0 - \omega_0)t, \quad (11)$$

при цьому

$$\mu_1^c(t) = \frac{1}{2} [p_1^c(t) - q_1^s(t)] , \quad \mu_1^s(t) = \frac{1}{2} [p_1^s(t) + q_1^c(t)] , \quad (12)$$

$$v_1^c(t) = \frac{1}{2} [p_1^c(t) + q_1^s(t)] , \quad v_1^s(t) = \frac{1}{2} [p_1^s(t) - q_1^c(t)] . \quad (13)$$

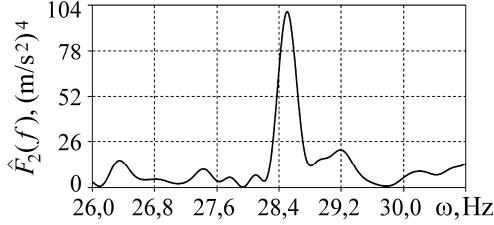


Рис. 5. Fig. 5.

Рис. 5. Залежність квадратичного функціонала (7) від частоти.

Fig. 5. Dependence of quadratic functional (7) on test frequency.

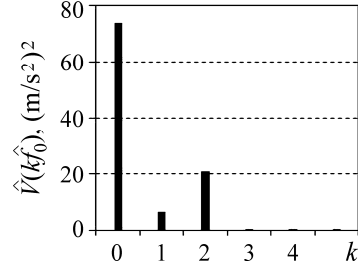


Рис. 6. Fig. 6.

Рис. 6. Амплітудний спектр дисперсії.

Fig. 6. The amplitude spectrum of variation of the stochastic component of vibration signal.

Випадкові процеси (10) і (11) є стаціонарними. Їхні дисперсії:

$$R_{\xi_1^+}^c(0) = R_{\mu_1}^c(0) , \quad R_{\xi_1^-}^c(0) = R_{v_1}^c(0) . \quad (14)$$

Взаємкореляційні функції процесів є періодичними функціями часу з періодом $P = \frac{1}{f_0}$. Їхні значення при $\tau=0$:

$$R_{\xi_1^+ \xi_1^-}^c(t, 0) = R_{\mu_1 v_1}^c(0) \cos 2\omega_0 t , \quad (15)$$

$$R_{\xi_1^- \xi_1^+}^c(t, 0) = R_{v_1 \mu_1}^c(0) \cos 2\omega_0 t . \quad (16)$$

Сума величин виразів (15) і (16) визначають другу гармоніку дисперсії. Її амплітуда, як бачимо, залежить від взаємкореляції квадратів вузькосмугових компонент з частотами $\frac{\lambda_0 - \omega_0}{2\pi} = 1481,15 \text{ Hz}$ і $\frac{\lambda_0 + \omega_0}{2\pi} = 1538,11 \text{ Hz}$. Присутність першої гармоніки в амплітудному спектрі дисперсії можливо зумовлена кореляцією цих компонент з тими, які зсунуті на $\pm \omega_0$. Останні є слабкими, тому вони малопомітні на рис. 6.

Наведені вище результати підтвержені обчисленнями дисперсій процесів (12) та (13), авто- та взаємкореляційних квадратів на основі виділених їх реалізацій.

Для цього відфільтровано смуги $\left[\hat{f}_0^{(1)} - \frac{\hat{f}_0}{2}; \hat{f}_0^{(1)} + \frac{\hat{f}_0}{2} \right]$ та $\left[\hat{f}_0^{(2)} - \frac{\hat{f}_0}{2}; \hat{f}_0^{(2)} + \frac{\hat{f}_0}{2} \right]$ зі

стохастичної складової вібраційного сигналу і для кожної з компонент знайдено перетворення Гільберта [32]:

$$\eta_1^+(t) = H \left\{ \xi_1^+(t) \right\} = \mu_1^c(t) \sin(\lambda_0 + \omega_0)t - \mu_1^s(t) \cos(\lambda_0 + \omega_0)t , \quad (17)$$

$$\eta_1^-(t) = H \left\{ \xi_1^-(t) \right\} = v_1^c(t) \sin(\lambda_0 - \omega_0)t - v_1^s(t) \cos(\lambda_0 - \omega_0)t. \quad (18)$$

З рівнянь (10) і (17), (11) і (18) для квадратур знаходимо:

$$\mu_1^c(t) = \xi_1^+(t) \cos(\lambda_0 + \omega_0)t + \eta_1^+(t) \sin(\lambda_0 + \omega_0)t, \quad (19)$$

$$\mu_1^s(t) = \xi_1^+(t) \sin(\lambda_0 + \omega_0)t - \eta_1^+(t) \cos(\lambda_0 + \omega_0)t, \quad (20)$$

$$v_1^c(t) = \xi_1^-(t) \cos(\lambda_0 - \omega_0)t + \eta_1^-(t) \sin(\lambda_0 - \omega_0)t, \quad (21)$$

$$v_1^s(t) = \xi_1^-(t) \sin(\lambda_0 - \omega_0)t - \eta_1^-(t) \cos(\lambda_0 - \omega_0)t. \quad (22)$$

Використовуючи рівняння (19)–(22), отримали реалізацію квадратур і на їх основі обчислили:

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\mu_1}^{cs}(0) &= \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \left[\mu_1^{cs}(nh) - m_{\mu_1}^{cs} \right]^2, & \hat{R}_{v_1}^{cs}(0) &= \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \left[v_1^{cs}(nh) - m_{v_1}^{cs} \right]^2, \\ \hat{R}_{\mu_1 v_1}^{c,s}(0) &= \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \left[\mu_1^{c,s}(nh) - \hat{m}_{\mu_1}^{s,s} \right] \left[v_1^{c,s}(nh) - m_{v_1}^{c,s} \right], \\ \hat{R}_{\mu_1 v_1}^{s,c}(0) &= \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \left[\mu_1^s(nh) - \hat{m}_{\mu_1}^c \right] \left[v_1^s(nh) - \hat{m}_{v_1}^s \right], \\ \hat{m}_{\mu_1}^{c,s} &= \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \mu_1^{c,s}(nh), & \hat{m}_{v_1}^{c,s} &= \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} v_1^{c,s}(nh). \end{aligned} \quad (23)$$

З виразу (14) випливає, що значення $\hat{R}_{\mu_1}^c(0)$ і $\hat{R}_{v_1}^c(0)$ визначають дисперсії $\hat{R}_{\xi_1^+}^c(0) = \hat{R}_{\mu_1}^c(0) = 29,45 \text{ (m/s}^2\text{)}^2$ і $\hat{R}_{\xi_1^-}^c(0) = \hat{R}_{v_1}^c(0) = 7,65 \text{ (m/s}^2\text{)}^2$. Оцінки дисперсій, обчислені на основі реалізацій $\xi_1^+(nh)$ і $\xi_1^-(nh)$ з використанням формули (9), відповідно дорівнюють $\hat{R}_{\xi_1^+}^c(0) = 31,9 \text{ (m/s}^2\text{)}^2$ і $\hat{R}_{\xi_1^-}^c(0) = 8,71 \text{ (m/s}^2\text{)}^2$. Незначну різницю між отриманими значеннями дисперсій можна пояснити статистичною похибкою.

Результати обчислень показують, що квадратури різних високочастотних компонент є корельованими, при цьому величини, визначені за рівнянням (23), є найбільші і близькі до значень, обчислених з використанням формули (9).

З огляду на рівняння (15) і (16) маємо: $|\hat{R}_2(0)| = 2\hat{R}_{\mu_1 v_1}^c(0) = 21,66 \text{ (m/s}^2\text{)}^2$.

Пряме обчислення на основі реалізації $\xi_1(t)$ з використанням формул (8) дає

$$|\hat{R}_2(0)| = \left[\left[\hat{c}_2(\hat{f}_0) \right]^2 + \left[\hat{s}_2(\hat{f}_0) \right]^2 \right]^{1/2} = 22,33 \text{ (m/s}^2\text{)}^2. \text{ Різниця між цими значеннями є в межах статистичної похибки.}$$

ми є в межах статистичної похибки.

ВИСНОВКИ

На підставі отриманих результатів зроблено висновок, що високочастотна модуляція вібрації не пов'язана з пошкодженням одного з елементів підшипника. Її потужність змінюється з періодом, близьким до значення, яке визначають швидкістю обертання вала мотора. Ці зміни містять як детерміновану, так і стохастичну складові та є вузькосмуговими. Тому підвищений рівень вібрацій з високою ймовірністю можна пояснити проковзуванням зовнішнього кільця підшипника, спричинене послабленням його посадки внаслідок тривалої експлуатації механізмів.

му. Рівень потужності детермінованих вібрацій, середнє значення стохастичної складової, а також потужність періодичних змін останньої свідчать про розвинутий розподілений дефект.

1. *Probabilistic models and statistical methods for the analysis of vibrational signals in the problems of diagnostics of machines and structures* / V. Mykhailyshyn, I. Javorskyj, Ya. Vasylyna, O. Drabych, and I. Isayev // *Materials Science*. – 1997. – **33**, № 5. – P. 655–672. <https://doi.org/10.1007/BF02537594>
2. *Cyclostationary modeling of rotating machine vibration signals* / J. Antoni, F. Bonnardot, A. Raad, and M. El Badaoui // *Mech. Syst. Signal Process.* – 2004. – **18**. – P. 1285–1314. [https://doi.org/10.1016/S0888-3270\(03\)00088-8](https://doi.org/10.1016/S0888-3270(03)00088-8)
3. *Antoni J. and Randall R. B.* On the use of the cyclic power spectrum in rolling element bearings diagnostics // *Sound Vib.* – 2005. – **281**. – P. 463–468. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.04.007>
4. *McFadden P. D. and Smith J. D.* Vibration monitoring of rolling element bearings by the high frequency resonance technique – A review // *Tribol. Int.* – 1984. – **17**. – P. 3–10. [https://doi.org/10.1016/0301-679X\(84\)90076-8](https://doi.org/10.1016/0301-679X(84)90076-8)
5. *McFadden P. D.* Examination of a technique for the early detection of failure in gears by signal processing of the time domain average of the meshing vibration // *Mech. Syst. Signal Process.* – 1987. – **1**. – P. 173–183. [https://doi.org/10.1016/0888-3270\(87\)90069-0](https://doi.org/10.1016/0888-3270(87)90069-0)
6. *Envelope analysis of rotating machine vibrations in variable speed conditions: A comprehensive treatment* / D. Abboud, J. Antoni, S. Sieg-Zieba, and M. Eltabach // *Mech. Syst. Signal Process.* – 2017. – **84**. – P. 200–226. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2016.06.033>
7. *Capdessus C., Sidahmed M., and Lacoume J. L.* Cyclostationary processes: Application in gear fault early diagnostics // *Mech. Syst. Signal Process.* – 2000. – **14**. – P. 371–385. <https://doi.org/10.1006/mssp.1999.1260>
8. *Hurd H. L. and Miamee A.* Periodically Correlated Random Sequences: Spectral Theory and Practice. – New York: Wiley, 2007. – 384 p.
9. *Antoni J.* Cyclic spectral analysis of rolling–element bearing signals: Facts and Fictions // *J. Sound Vib.* – 2007. – **304**. – P. 497–529. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.02.029>
10. *Zhu Z. K., Feng Z. H., and Kong F. R.* Cyclostationarity analysis for gearbox condition monitoring: Approaches and effectiveness // *Mech. Syst. Signal Process.* – 2005. – **19**. – P. 467–482. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2004.02.007>
11. *Antoni J.* Cyclostationary by examples // *Mech. Syst. Signal Process.* – 2009. – **23**. – P. 987–1036. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2008.10.010>
12. *Ho D. and Randall R. B.* Optimization of bearing diagnostic techniques using simulated and actual bearing fault signals // *Mech. Syst. Signal Process.* – 2000. – **14**. – P. 763–788. <https://doi.org/10.1006/mssp.2000.1304>
13. *Patel V. N., Tandon N., and Pandey R. K.* Defect detection in deep groove ball bearing in presence of external vibration using envelope analysis and Duffing oscillator // *Meas.* – 2012. – **45**, № 5. – P. 960–970. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2012.01.047>
14. *Advanced bearing diagnostics: A comparative study of two powerful approaches* / D. Abboud, M. El Badaoui, W. A. Smith, and R. B. Randall // *Mech. Syst. Sig. Process.* – 2019. – **114**. – P. 604–627. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2018.05.011>
15. *Tyagi S. and Panigrahi S. K.* An improved envelope detection method using particle swarm optimisation for rolling element bearing fault diagnosis // *J. Comput. Des. Eng.* – 2017. – **4**, № 4. – P. 305–317. <https://doi.org/10.1016/j.jcde.2017.05.002>
16. *Randall R. B.* Frequency analysis. – Virum: Brüel & Kjær, 1987. – 344 p.
17. *Randall R. B., Antoni J., and Chobsaard S.* The relationship between spectral correlation and envelope analysis // *Mech. Syst. Sig. Process.* – 2001. – **15**. – P. 945–962. <https://doi.org/10.1006/mssp.2001.1415>
18. *McCormick A. C. and Nandi A. K.* Cyclostationarity in rotating machine vibrations // *Mech. Syst. Sig. Process.* – 1998. – **12**, № 2. – P. 225–242. <https://doi.org/10.1006/mssp.1997.0148>
19. *Forced oscillations of cracked beam under the stochastic cyclic loading* / I. Matsko, I. Javorskyj, R. Yuzefovych, and Z. Zakrzewski // *Mech. Syst. Signal Process.* – 2018. – **104**. – P. 242–263. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2017.08.021>

20. *Application of cepstrum pre-whitening for the diagnosis of bearing faults under variable speed conditions* / P. Borghesani, P. Pennacchi, R. B. Randall, N. Sawalhi, and R. Ricci // *Mech. Syst. Signal Process.* – 2013. – **36**, № 2. – P. 370–384.
<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2012.11.001>
21. *Comparison between envelope detection methods for bearing defects diagnose* / B. Betea, P. Dobra, M.-C. Gherman, and L. Tomesc // *IFAC Proc.* – 2013. – **46**, № 6. – P. 137–142.
<https://doi.org/10.3182/20130522-3-RO-4035.00010>
22. *Autocorrelated envelopes for early fault detection of rolling bearings* / Y. Xu, D. Zhen, X. Gu, K. Rabeyee, F. Chu, F. Gu, and A. Ball // *Mech. Syst. Signal Process.* – 2021. – **146**. – Article number: 106990. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2020.106990>
23. *A simple and fast guideline for generating enhanced/squared envelope spectra from spectral coherence for bearing fault diagnosis* / D. Wang, X. Zhao, L.-L. Kou, Y. Qin, Y. Zhao, and K.-L. Tsui // *Mech. Syst. Signal Process.* – 2019. – **122**. – P. 754–768.
<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.12.055>
24. *Detection of distributed and localized faults in rotating machines using periodically non-stationary covariance analysis of vibrations* / I. Javorskyj, R. Yuzefovych, O. Lychak, R. Slyepko, and P. Semenov // *Measurement Sci. and Techn.* – 2023. – **34**, № 6. – Article number: 065102. <https://doi.org/10.1088/1361-6501/acbc93>
25. *Randall R. B. and Antoni J. Rolling element bearing diagnostics – A tutorial* // *Mech. Syst. Signal Process.* – 2011. – **25**. – P. 485–520. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ymssp.2010.07.017>
26. *Яворський І. М. Математичні моделі та аналіз стохастичних коливань.* – Львів: ФМІ НАН України, 2013. – 804 с.
27. *Periodically correlated random processes: Application in early diagnostics of mechanical systems* / I. Javorskyj, I. Kravets, I. Matsko, and R. Yuzefovych // *Mech. Syst. Signal Process.* – 2017. – **83**. – P. 406–438. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2016.06.022>
28. *Gardner W. A. Cyclostationarity in Communications and Signal Processing* – New York: IEEE Press., 1994. – 504 p.
29. *Napolitano A. Generalizations of cyclostationary signal processing // Spectral Analysis and Applications.* – Wiley: IEEE Press., 2012.
30. *Methods of hidden periodicity discovering for gearbox fault detection* / I. Javorskyj, I. Matsko, R. Yuzefovych, O. Lychak, and R. Lys // *Sensors.* – 2021. – **21**. – Article number: 6138. <https://doi.org/10.3390/s21186138>
31. *The last square estimation of the basic frequency for periodically non-stationary random signals* / I. Javorskyj, R. Yuzefovych, I. Matsko, and Z. Zakrzewski // *Digit. Signal Process.* – 2022. – **122**. – Article number: 103333. <https://doi.org/10.1016/j.dsp.2021.103333>
32. *Hilbert transform of a periodically non-stationary random signal: Low-frequency modulation* / I. Javorskyj, R. Yuzefovych, I. Matsko, and P. Kurapov // *Digit. Signal Process.* – 2021. – **116**. – Article number: 103113. <https://doi.org/10.1016/j.dsp.2021.103113>

Одержано 23.05.2023