УДК 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ АНІЗОТРОПНОГО ТІЛА З ГЛАДКИМИ КРИВОЛІНІЙНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ ЗА ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ

М. П. САВРУК, В. С. КРАВЕЦЬ, Л. Й. ОНИШКО, О. І. КВАСНЮК

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Методом сингулярних інтегральних рівнянь розв’язано антиплоску задачу теорії пружності для пружного кусково-однорідного анізотропного тіла. Для одного анізотропного включення в ортотропній площині побудовану систему інтегральних рівнянь другого роду розв’язано числово методом квадратур. Досліджено вплив пружних сталих анізотропних матеріалів площини та включення, а також форми криволінійного включення на розподіли зсувних напружень на межі поділу матеріалів.

Ключові слова: *антиплоска деформація, анізотропія, включення, концентрація напружень, метод сингулярних інтегральних рівнянь.*

The antiplane problem of the theory of elasticity for an elastic piecewise homogeneous anisotropic body was solved using the method of singular integral equations. For one anisotropic inclusion in the orthotropic plane, the constructed system of integral equations of the second kind is solved numerically by the quadrature method. The influence of the elastic constants of anisotropic materials of the plane and the inclusion, as well as the shape of the curvilinear inclusion on the shear stress distributions at the interface of the materials is studied.

Keywords: *antiplane deformation, anisotropy, inclusions, stress concentration, singular integral equation method.*

Вступ. Використання високоміцних композитних матеріалів у сучасній техніці вимагає дослідження напружено-деформованого стану таких тіл з концентраторами напружень – отворами, включеннями, тріщинами та вирізами. Різного роду композитні матеріали можна моделювати однорідним або кусково-однорідним анізотропним середовищем. Задачам теорії пружності анізотропних тіл з отворами, тріщинами та включеннями присвячено низку наукових праць [1–10]. Одним із найпоширеніших методів розв’язування таких задач є метод комплексних потенціалів (КП), записаних у додаткових математичних площинах, пов’язаних із пружними сталими анізотропних матеріалів [2, 4, 11–17]. Розглядали також двовимірні задачі теорії пружності для кусково-однорідних анізотропних тіл [6, 18–25]. Отримано окремі числові результати для розподілів напружень по контурах розмежування анізотропних матеріалів нескінченної площини та скінченних двовимірних включень [2, 6, 18, 19, 22, 25].

Нижче розглянуто антиплоску задачу теорії пружності для нескінченної пружної анізотропної площини (матриці) з гладкими криволінійними анізотропними включеннями за їх ідеального механічного контакту. Використано методи КП та сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) для анізотропних тіл з тріщинами, отворами та вирізами [17, 26–28]. Для ортотропної матриці з одним анізотропним включенням систему СІР другого роду розв’язано числово. Визначено розподіли напружень поздовжнього зсуву на межі поділу матеріалів матриці та включення

Контактна особа: В. С. КРАВЕЦЬ, e-mail: vlad@ipm.lviv.ua

залежно від пружних сталих матеріалів, а також форми контуру гладкого криволінійного включення. Встановлено параметри задачі, які суттєво впливають на розподіли зсувних напружень на контурах розмежування анізотропних матеріалів.

Деякі співвідношення антиплоскої задачі теорії пружності анізотропного тіла. Розглянемо поздовжній зсув анізотропного тіла в декартовій системі координат (*x*, *y*, *z*). Якщо вісь деформації спрямована вздовж осі z, то компоненти вектора пружних переміщень можна подати у вигляді: $u_x = 0,\ u_y = 0,\ u_z = w = w(x, y)$. На основі узагальненого закону Гука отримано [7, 11] взаємозв'язок між ненульовими компонентами деформацій $\varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}$ та напруженнями τ_{yz}, τ_{xz}. Виразивши загальний розв'язок диференційного рівняння рівноваги у переміщеннях через аналітичну функцію $\varphi_3(z_3)$ комплексного аргументу $z_3 = x + \mu_3 y$

$$w(x, y) = a_0 \operatorname{Im}[\varphi_3(z_3)], \tag{1}$$

співвідношення для напружень подамо через КП $\Phi_3(z_3) = \varphi_3'(z_3)$ у вигляді [2, 11]

$$\tau_{yz}(x, y) = \operatorname{Re}[\Phi_3(z_3)],\ \ \tau_{xz}(x, y) = -\operatorname{Re}[\mu_3 \Phi_3(z_3)]. \tag{2}$$

Тут $\mu_3 = \alpha_3 + i\gamma_3$ комплексний корінь характеристичного рівняння антиплоскої задачі, де $\alpha_3 = a_{45}/a_{55}$, $\gamma_3 = a_0/a_{55}$; $\{a_{55}, -a_{45}, a_{44}\} = a_0^2\{A_{44}, A_{45}, A_{55}\}$ – пружні сталі анізотропного матеріалу, $a_0 = \sqrt{a_{44}a_{55} - a_{45}^2} > 0$.

За допомогою співвідношень (2) запишемо формули для знаходження зсувних напружень $\tau_{nz}(t)$ на деякому гладкому криволінійному контурі L із заданою нормаллю n, а також контурних напружень $\tau_{sz}(t)$ на площинах, ортогональних до контуру L [17]

$$\tau_{nz}(t) = -\operatorname{Re}\left[\Phi_3(t_3)dt_3 / ds\right] = -\operatorname{Re}\left[\varphi_3'(t_3)dt_3 / ds\right],\ t \in L,\ t_3 \in L_3; \tag{3}$$

$$\tau_{sz}(t) = \operatorname{Re}\left[\Phi_3(t_3)\left\{((1 - i\mu_3)dt / ds - (1 + i\mu_3)d\bar{t} / ds) / 2i\right\}\right]. \tag{4}$$

Тут контур L_3 у допоміжній площині комплексної змінної z_3 відповідає контуру L у площині (x, y); s – дугова абсциса точки $t \in L$.

Формулювання задачі. Розглянемо двовимірну задачу теорії пружності за антиплоскої деформації анізотропного тіла S_0 (матриці) з гладкими анізотропними включеннями $S_j\ (j = \overline{1, J})$. Вважатимемо, що між включеннями та матрицею є ідеальний механічний контакт, тобто за переходу через контури включень $L_j\ (j = \overline{1, J})$ нормальна компонента зсувного напруження та переміщення $w(x, y)$ неперервні:

$$\tau_{nz}^+(t) - \tau_{nz}^-(t) = 0,\ t \in L_j,\ \ j = \overline{1, J}; \tag{5}$$

$$w^+(t) - w^-(t) = 0,\ \ t \in L_j,\ \ j = \overline{1, J}. \tag{6}$$

Тут верхні індекси вказують на граничні значення відповідних величин за підходу до контурів L_j зліва (+) або справа (–) за їх обходу проти годинникової стрілки (рис. 1).

Матриця S_0 на нескінченності знаходиться під дією поздовжнього зсуву

$$\tau_{yz}^{\infty} = \tau,\ \ \tau_{xz}^{\infty} = 0, \tag{7}$$

що не обмежує загальності заданого навантаження, оскільки матриця анізотропна.

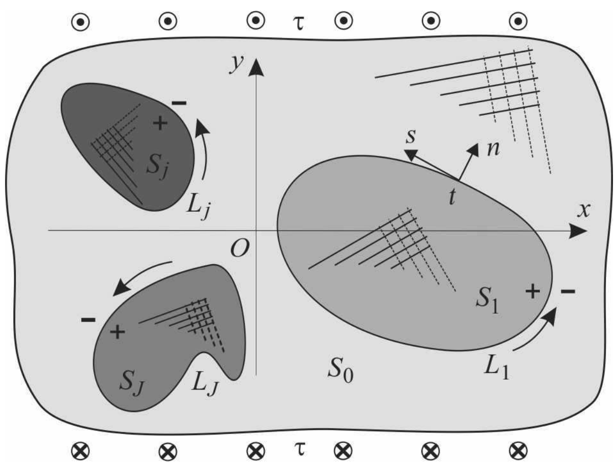

Рис. 1. Поздовжній зсув кусково-однорідного анізотропного тіла.

Fig. 1. Longitudinal shear of a piecewise homogeneous anisotropic body.

Задачу з крайовими умовами (5), (6) розв'язуємо методом СІР [17, 27, 28]. За навантаження (7) напружений стан нескінченного кусково-однорідного анізотропного тіла $S = \bigcup S_j$ $(j = \overline{0,J})$ описують співвідношення (2)–(4), записані у комплексних математичних площинах $z_3^j = x + \mu_3^j y$ $(j = \overline{0,J})$. Тут і надалі величини з верхнім індексом $j = \overline{1,J}$ стосуються j-го включення S_j ($\mu_3^j = \alpha_3^j + i\gamma_3^j$, $\alpha_3^j = a_{45}^j / a_{55}^j$, $\gamma_3^j = a_j / a_{55}^j$, $a_j = \sqrt{a_{44}^j a_{55}^j - a_{45}^j a_{45}^j}$), а з індексом $j = 0$ – матриці S_0 і відповідають пружним сталим анізотропних матеріалів включень та матриці. Потенціали напружень для матриці S_0 і включень S_j $(j = \overline{1,J})$ шукатимемо у вигляді аналітичних функцій

$$\Phi_3^j(z_3^j) = \Gamma_3^j + \frac{1}{\pi}\int_{L_3^j} \frac{\phi_3'^j(t_3^j)}{t_3^j - z_3^j} dt_3^j = \Gamma_3^j + \frac{1}{\pi}\int_{L_j} \frac{\phi_3'^j(t_3^j)}{t_3^j - z_3^j}\frac{dt_3^j}{dt} dt,$$

$$z = x + iy \in S_j, \; j = \overline{0,J}, \tag{8}$$

де $\phi_3'^j(t_3^j) = d\phi_3^j(t_3^j)/dt_3^j$, $j = \overline{0,J}$; $\phi_3'^0(t_3^0) = \{\phi_{3j}'^0(t_{3j}^0),\ t_{3j}^0 \in L_{3j}^0,\ j = \overline{1,J}\}$ – невідомі комплексні функції; $t_3^j = \mathrm{Re}(t) + \mu_3^j \,\mathrm{Im}(t) \in L_3^j$, $t \in L_j$; $L_0 = \bigcup L_j$, $L_3^0 = \bigcup L_{3j}^0$ $(j = \overline{1,J})$; контурам L_{3j}^0, L_3^j у математичних площинах z_3^0, z_3^j відповідають контури L_j $(j = \overline{1,J})$ у фізичній площині $z = x + iy$ (рис. 1). Комплексні сталі $\Gamma_3^j = (1 + i\alpha_3^j / \gamma_3^j)\tau$ визначають однакові однорідні напружені стани ($\tau_{yz}(z) = \tau$, $\tau_{xz}(z) = 0$, $z \in S_j$, $j = \overline{0,J}$) матриці ($j = 0$) та включень ($j = \overline{1,J}$) за навантаження (7). Відповідні нормальні та тангенціальні напруження поздовжнього зсуву (3), (4) на криволінійних гладких контурах L_j в анізотропних тілах визначають простими виразами

$$\tau_{nz}(t) = -\tau\,\mathrm{Re}[dt/ds], \;\; \tau_{sz}(t) = \tau\,\mathrm{Im}[dt/ds], \;\; t \in L_j, \;\; j = \overline{1,J},$$

які не залежать від пружних сталих матеріалів і залишаються такими ж, як для ізотропних тіл.

Користуючись формулою Сохоцького–Племеля для інтегралів Коші, знайдемо граничні значення ($z \to t \in L_j$) КП напружень (8) на контурах L_j $(j = \overline{1, J})$ з боків включень та матриці

$$\Phi_3^{j+}(t_3^j) = \Gamma_3^j + i\phi_3'^j(t_3^j) + \frac{1}{\pi}\int_{L_3^j} \frac{\phi_3'^j(t_3'^j)}{t_3'^j - t_3^j} dt_3'^j, \quad t_3^j \in L_3^j, \quad j = \overline{1, J};$$

$$\Phi_3^{0-}(t_{3j}^0) = \Gamma_3^0 - i\phi_{3j}'^0(t_{3j}^0) + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{J}\int_{L_{3k}^0} \frac{\phi_{3k}'^0(t_{3k}'^0)}{t_{3k}'^0 - t_{3j}^0} dt_{3k}'^0, \quad t_{3j}^0 \in L_{3j}^0. \tag{9}$$

На основі співвідношень (1), (3), (9) з крайових умов на кожному з контурів включень L_j (5) та продиференційованих за дуговими абсцисами s_j умов (6)

$$\frac{dw^+(t)}{ds_j} - \frac{dw^-(t)}{ds_j} = 0, \quad s_j = s_j(t), \quad t \in L_j, \quad j = \overline{1, J} \tag{10}$$

отримано систему $2J$ дійсних СІР 2-го роду

$$A_{3j}\,\mathrm{Im}\left[\phi_{3j}'^0(s_j)\right] + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{J}\int_{L_k} \mathrm{Re}\left[D_{11}(s_j, s_k')\phi_{3k}'^0(s_k') + D_{12}(s_j, s_k')\overline{\phi_{3k}'^0(s_k')}\right] ds_k' = 0, \tag{11}$$

$$A_{3j}\,\mathrm{Re}\left[\phi_{3j}'^0(s_j)\right] + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{J}\int_{L_k} \mathrm{Im}\left[D_{21}(s_j, s_k')\phi_{3k}'^0(s_k') + D_{22}(s_j, s_k')\overline{\phi_{3k}'^0(s_k')}\right] ds_k' = f_2(s_j),$$

де s_j, s_k' – дугові абсциси точок $t \in L_j$, $t' \in L_k$ $(j, k = \overline{1, J})$,

$$D_{11}(s_j, s_k') = D_{jk}^0 - A_{3j}D_{jk}^j; \quad D_{12}(s_j, s_k') = -B_{3j}D_{jk}^j;$$

$$D_{21}(s_j, s_k') = A_{3j}D_{jk}^j - (A_{3j} - B_{3j})D_{jk}^0; \quad D_{22}(s_j, s_k') = B_{3j}D_{jk}^j;$$

$$D_{jk}^0 = \frac{dt_{3j}^0 / ds_j}{t_{3k}'^0 - t_{3j}^0}; \quad D_{jk}^j = \frac{dt_3^j / ds_j}{t_3'^k - t_3^j}; \quad f_2(s_j) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{a_{0j}\Gamma_3^0\frac{dt_{3j}^0}{ds_j} - \Gamma_3^j\frac{dt_3^j}{ds_j}\right\}. \tag{12}$$

Тут, враховуючи крайові умови (5) і (10), використали залежності між невідомими комплексними функціями $\phi_3'^j(s_j) = A_{3j}\phi_{3j}'^0(s_j) + B_{3j}\overline{\phi_{3j}'^0(s_j)}$ [6, 18], де $\phi_{3j}'^0(s_j) = \phi_{3j}'^0(t_{3j}^0)dt_{3j}^0 / ds_j$, $\phi_3'^j(s_j) = \phi_3'^j(t_3^j)dt_3^j / ds_j$, $A_{3j} = (1 + a_{0j})/2$, $B_{3j} = (1 - a_{0j})/2$, $a_{0j} = a_0 / a_j$. Для однорідних напружених станів включень та матриці маємо залежності $\mathrm{Re}[\Gamma_3^j dt_3^j / ds_j] = \mathrm{Re}[\Gamma_3^0 dt_{3j}^0 / ds_j]$, $t_3^j \in L_3^j$, $t_{3j}^0 \in L_{3j}^0$. Для кусково-однорідного ізотропного тіла ($\alpha_3^j = 0$, $\gamma_3^j = 1$, $j = \overline{0, J}$) з рівнянь (11) отримано відому систему СІР [29].

Одне анізотропне включення. Числове розв'язування системи СІР (11) виконано методом квадратур [17] за наявності у матриці одного анізотропного включення S_1 $(J = 1,\ L_0 = L_1 = L)$. Розглянуто ортотропну матрицю S_0 (з головними осями ортотропії вздовж осей *Ox*, *Oy*), для якої $\mu_3^0 = i\gamma_3^0$, $\alpha_3^0 = 0$, $\gamma_3^0 = \sqrt{G_{x3}^0 / G_{y3}^0}$, $a_0 = 1/\sqrt{G_{x3}^0 G_{y3}^0}$, і ортотропне включення S_1 (з осями ортотропії, нахиленими до осей *Ox*, *Oy* під кутом β), для якого

$$\mu_3^1=\alpha_3^1+i\gamma_3^1,\quad \alpha_3^1=\frac{((\gamma_{30}^1)^2-1)\sin\beta\cos\beta}{(\gamma_{30}^1)^2\sin^2\beta+\cos^2\beta},\quad \gamma_3^1=\frac{\gamma_{30}^1}{(\gamma_{30}^1)^2\sin^2\beta+\cos^2\beta},\qquad (13)$$

де $\gamma_{30}^1=\sqrt{G_{13}^1/G_{23}^1}$, $a_1=1/\sqrt{G_{13}^1G_{23}^1}$. Тут G_{x3}^0, G_{y3}^0; G_{13}^1, G_{23}^1 – модулі зсуву по осях ортотропії матеріалів матриці та включення відповідно. Задавши у фізичній площині xOy контур включення L у параметричному вигляді $t=\omega(\eta)$, $t'=\omega(\xi)$; $\eta,\xi\in[0;\,2\pi]$, задачу зведемо до розʼязування двох дійсних СІР другого роду (11) ($J=1$).

На основі граничних значень КП (9) для одного включення

$$\Phi_3^{1+}(t_1)=\Gamma_3^1+i\frac{|\omega'(\eta)|}{\omega'_1(\eta)}\{u_1(\eta)+ia_{01}u_2(\eta)\}+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\{u_1(\xi)+ia_{01}u_2(\xi)\}}{\omega_1(\xi)-\omega_1(\eta)}|\omega'(\xi)|\,d\xi,$$

$$\Phi_3^{0-}(t_0)=\Gamma_3^0-i\frac{|\omega'(\eta)|}{\omega'_0(\eta)}\{u_1(\eta)+iu_2(\eta)\}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\{u_1(\xi)+iu_2(\xi)\}}{\omega_0(\xi)-\omega_0(\eta)}|\omega'(\xi)|\,d\xi,\quad \eta\in[0;\,2\pi]\qquad (14)$$

визначено розподіли контактних $\tau_{nz}(t)=\tau_{nz}^+(t)=\tau_{nz}^-(t)$ (3), (5) та контурних (4) зсувних напружень з боків включення $\tau_{sz}^+(t)$ та матриці $\tau_{sz}^-(t)$:

$$\tau_{sz}^+(t)=\mathrm{Re}\left[\Phi_3^{1+}(t_1)\,f_s(t,\mu_3^1)\right],\quad \tau_{sz}^-(t)=\mathrm{Re}\left[\Phi_3^{0-}(t_0)\,f_s(t,\mu_3^0)\right].\qquad (15)$$

Тут $f_s(t,\mu)=\left[(1-i\mu)\omega'(\eta)-(1+i\mu)\overline{\omega'(\eta)}\right]/\{2i|\omega'(\eta)|\}$, $\omega'_k(\eta)=d\omega_k(\eta)/d\eta$, $k=0;1$, $\omega_0(\eta)=\mathrm{Re}[\omega(\eta)]+\mu_3^0\,\mathrm{Im}[\omega(\eta)]$, $\omega_1(\eta)=\mathrm{Re}[\omega(\eta)]+\mu_3^1\,\mathrm{Im}[\omega(\eta)]$, $u_1(\eta)=$ $=\mathrm{Re}[\phi_{31}'^0(s)]=\mathrm{Re}[\phi_{31}'^0(t_{31}^0)dt_{31}^0/ds]$; $u_2(\eta)=\mathrm{Im}[\phi_{31}'^0(s)]$, де s – дугова абсциса точки $t=\omega(\eta)\in L$; $a_{01}=a_0/a_1$; $\Gamma_3^0=\tau$, $\Gamma_3^1=(1+i\alpha_3^1/\gamma_3^1)\tau$. Розраховано для еліптичної форми контуру включення

$$t=\omega(\eta)=a\cos(\eta)+ib\sin(\eta),\quad \eta\in[0;\,2\pi]\qquad (16)$$

та низки значень пружних сталих матеріалів матриці та включення.

Ортотропна матриця і пружне ізотропне включення. Характер впливу рівня ортотропії матеріалу матриці (механічного параметра $\gamma_3^0=\sqrt{G_{13}^0/G_{23}^0}$) на розподіли контактних (3) та контурних (15) напружень суттєво залежить від параметра $a_{01}=a_0/a_1=\sqrt{G_{13}^1G_{23}^1}/\sqrt{G_{13}^0G_{23}^0}$, який характеризує загальну відносну жорсткість (на поздовжній зсув вздовж осі Oz) матеріалу включення відносно матеріалу матриці (рис. 2). Розглянуто ортотропну матрицю ($\gamma_3^0\in[0,25;\,4]$) з ізотропним ($\gamma_3^1=1$, $\alpha_3^1=0$, $G_{13}^1=G_{23}^1=G_3^1$) круговим ($b/a=1$) включенням. Зміна параметра a_{01} від 0,25 до 4 призводить до зростання напружень $\tau_{nz}(\eta)$ і $\tau_{sz}^+(\eta)$ у 4 рази (рис. 2*a*–*d*), а відносні контурні напруження з боку матриці $\tau_{sz}^-(\eta)$ зазнають ще й суттєвих якісних змін (рис. 2*e*, *f*). Знайдені максимальні значення контактних напружень $\tau_{nz}(\eta)$ для кусково-ізотропного тіла (ізотропна матриця з еліптичним включенням) добре узгоджуються з відомими [6].

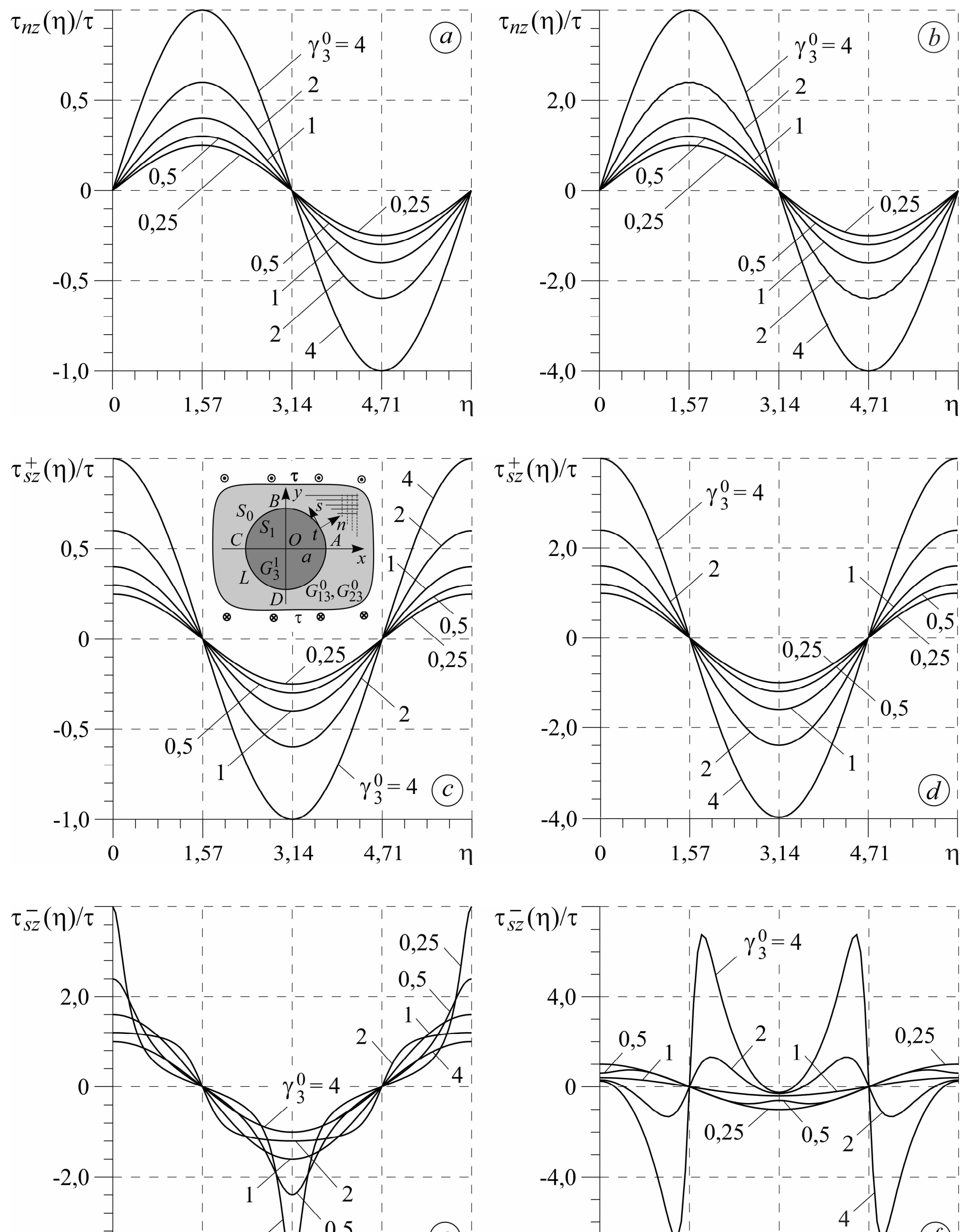

Рис. 2. Вплив параметра γ_3^0 на розподіли відносних напружень $\tau_{nz}(\eta)/\tau$ (*a*, *b*), $\tau_{sz}^{+}(\eta)/\tau$ (*c*, *d*), $\tau_{sz}^{-}(\eta)/\tau$ (*e*, *f*) для податливого (a_{01} = 0,25) (*a*, *c*, *e*) та жорсткого (a_{01} = 4) (*b*, *d*, *f*) ізотропного кругового включення.

Fig. 2. Influence of the parameter γ_3^0 on the relative stress distributions $\tau_{nz}(\eta)/\tau$ (*a*, *b*), $\tau_{sz}^{+}(\eta)/\tau$ (*c*, *d*), $\tau_{sz}^{-}(\eta)/\tau$ (*e*, *f*) for a flexible (a_{01} = 0.25) (*a*, *c*, *e*) and rigid (a_{01} = 4) (*b*, *d*, *f*) isotropic circular inclusion.

Ортотропна матриця і анізотропне включення. Досліджено вплив кута нахилу β осей ортотропії матеріалу включення S_1 до осей *Ox*, *Oy* на розподіли напружень на межі розділу матеріалів (рис. 3). Таке включення для кутів $\beta \neq \{0;\ \pi/2\}$ у введеній декартовій системі координат *xOy* (рис. 3*d*) описуємо моделлю анізотропного тіла з механічними параметрами (13). Розглянуто еліптичне включення ($b/a = 0,25$) з відношенням модулів зсуву по осях ортотропії матеріалу $G_{13}^1 / G_{23}^1 = 1/8$ у відносно податливій ортотропній матриці ($a_{01} = 8\sqrt{2}$; $\gamma_3^0 = 2$). Поворот осей ортотропії матеріалу включення суттєво змінює розподіли контурних напружень з боку включення (рис. 3*b*) і майже не впливає на контактні (рис. 3*a*) та контурні напруження з боку матриці (рис. 3*c*).

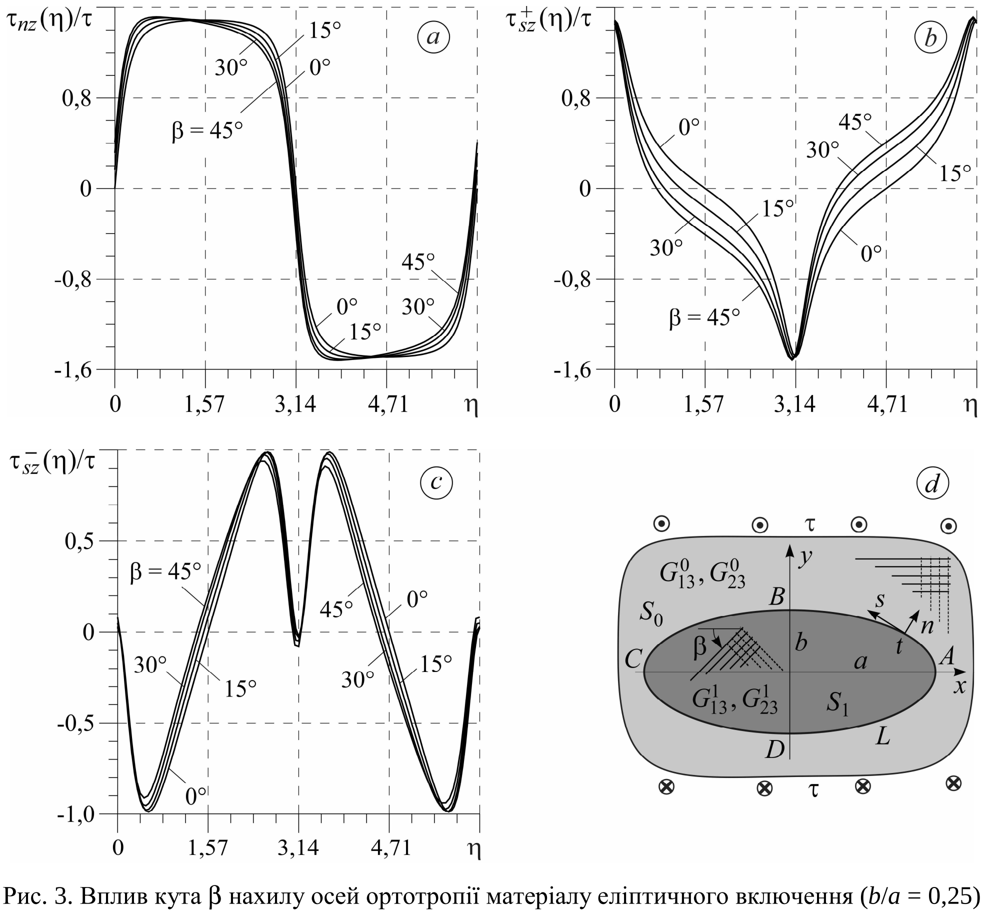

Рис. 3. Вплив кута β нахилу осей ортотропії матеріалу еліптичного включення (*b*/*a* = 0,25) на розподіли відносних напружень $\tau_{nz}(\eta)/\tau$ (*a*); $\tau_{sz}^{+}(\eta)/\tau$ (*b*); $\tau_{sz}^{-}(\eta)/\tau$ (*c*) для $G_{13}^1 / G_{23}^1 = 1/8$ і податливої матриці ($a_{01} = 8\sqrt{2}$; $\gamma_3^0 = 2$); *d* – схема задачі.

Fig. 3. Influence of the angle β of the orthotropy axes of the elliptical inclusion material on the relative stress distributions $\tau_{nz}(\eta)/\tau$ (*a*); $\tau_{sz}^{+}(\eta)/\tau$ (*b*); $\tau_{sz}^{-}(\eta)/\tau$ (*c*) for *b*/*a* = 0.25, $G_{13}^1 / G_{23}^1 = 1/8$ and flexible matrix ($a_{01} = 8\sqrt{2}$; $\gamma_3^0 = 2$); *d* – scheme of the problem.

Для заданого навантаження (7) за різних геометричних та механічних параметрів задачі (b/a, β, γ_3^0, γ_3^1, a_0/a_1) обчислено напруження $\tau_{xz}(z)$, $\tau_{yz}(z)$ всередині еліптичного анізотропного включення ($z \in S_1$) і виявлено однорідність його напруженого стану, що узгоджується з відомим аналітичним результатом [24]. Сталі напруження $\tau_{xz} = \mathrm{const}$, $\tau_{yz} = \mathrm{const}$ в еліптичному включенні суттєво залежать від розглянутих вище параметрів задачі.

ВИСНОВКИ

Розглянуто антиплоску задачу теорії пружності для нескінченного анізотропного тіла зі скінченною кількістю гладких криволінійних анізотропних включень. Використовуючи методи комплексних потенціалів та сингулярних інтегральних рівнянь, задачу звели до розв'язування систем дійсних інтегральних рівнянь другого роду. Для ортотропної площини з одним анізотропним включенням побудовану систему рівнянь розв'язано числово методом квадратур. Визначено розподіли зсувних контактних та контурних напружень на межі поділу матеріалів як зі сторони площини, так і з боку включення. Досліджено вплив на ці напруження пружних сталих ортотропних матеріалів площини та включення для еліптичних форм межі поділу матеріалів. Встановлено параметри задачі, які суттєво впливають на розподіли зсувних напружень на контурі включення.

1. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.
2. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. – М.: Гостехиздат, 1957. – 464 с.
3. *Sih G. C., Paris P. C., and Irwin G. R.* On cracks in rectilinearly anisotropic bodies // Int. J. Fract. Mech. – 1965. – **1**, № 3. – P. 189–203.
4. *Фильштинский Л. А.* Упругое равновесие плоской анизотропной среды, ослабленной произвольными криволинейными трещинами. Предельный переход к изотропной среде // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1976. – № 5. – С. 91–97.
5. *Ioakimidis N. I. and Theocaris P. S.* The problem of the simple smooth crack in an infinite anisotropic elastic medium // Int. J. Solids Struct. – 1977. – **13**, № 4. – P. 269–278. https://doi.org/10.1016/0020-7683(77)90012-9
6. *Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А.* Регулярные кусочно-однородные структуры с дефектами. – М.: Физматлит, 1994. – 335 с.
7. *Ting T. C. T.* Anisotropic Elasticity. Theory and Applications. – Oxford: Oxford University Press, 1996. – 587 p.
8. *Божидарнік В. В., Андрейків О. Є., Сулим Г. Т.* Механіка руйнування, міцність і довговічність неперервно армованих композитів. У 2-х т. – Луцьк: Надстир'я, 2007. – **2**. – 424 с.
9. *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
10. *Hwu C.* Anisotropic elastic plates. – London: Springer, 2010. – 674 p.
11. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
12. *Фильштинский Л. А.* Продольний сдвиг в анизотропной среде с разрезами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1978. – № 4. – С. 68–72.
13. *Волкова Л. В., Фильштинский Л. А.* Двоякопериодическая задача теории упругости для продольного сдвига анизотропной среды с трещинами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1979. – № 2. – С. 91–95.
14. *Kattis M. A. and Providas E.* Two-phase potentials in anisotropic elasticity: antiplane deformation // Int. J. Eng. Sci. – 1998. – **36**. – P. 801–811. https://doi.org/10.1016/S0020-7225(97)00115-8
15. *Sulym H. T. and Shevchuk S. P.* Plane problem for a piecewise-homogeneous anisotropic body with elastic inclusion in the form of a strip // Materials Science. – 1999. – **35**, № 6. – P. 757–769. https://doi.org/10.1007/BF02359454
16. *Божидарнік В. В., Максимович О. В.* Пружна та гранична рівновага анізотропних пластинок з отворами і тріщинами. – Луцьк: ЛДТУ, 2003. – 226 с.

17. *Savruk M. P. and Kazberuk A.* Stress Concentration at Notches. – Cham: Springer, 2017. – 516 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-44555-7
18. *Долгих В. Н., Фильштинский Л. А.* Теория линейно-армированного композиционного материала с анизотропными компонентами структуры // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1978. – № 6. – С. 53–63.
19. *Долгих В. Н., Фильштинский Л. А.* Продольный сдвиг композиционного материала с дефектами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1980. – № 4. – С. 103–110.
20. *Hwu C. and Ting T. C. T.* Two-dimensional problems of the anisotropic elastic solid with an elliptic inclusion // Quart. J. Mech. Appl. Math. – 1989. – **42**, Pt. 4. – P. 553–572. https://doi.org/10.1093/qjmam/42.4.553
21. *Hwu C. and Yen W. J.* On the anisotropic elastic inclusions in plane elastostatics // J. Appl. Mech. – 1993. – **60**. – P. 626–632. https://doi.org/10.1115/1.2900850
22. *Dong C. Y., Lo S. H., and Cheung Y. K.* Stress analysis of inclusion problems of various shapes in an infinite anisotropic elastic medium // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 2003. – **192**. – P. 683–696. https://doi.org/10.1016/S0045-7825(02)00579-0
23. *Krivoi A. F. and Popov G. Y.* Interface tunnel cracks in a composite anisotropic space // J. Appl. Math. Mech. – 2008. – **72**. – P. 499–507. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2008.08.001
24. *Ting T. C. T. and Schiavone P.* Uniform antiplane shear stress inside an anisotropic elastic inclusion of arbitrary shape with perfect or imperfect interface bonding // Int. J. Eng. Sci. – 2010. – **48**. – P. 67–77.
25. *Maksymovych O. and Podhorecki A.* Determination of stresses in anisotropic plates with elastic inclusions based on singular integral equations // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2019. – **104**. – P. 364–372. https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2019.03.039
26. *Stressed* state of an orthotropic plane with two-section kinked crack under antiplane deformation / M. P. Savruk, L. I. Onyshko, O. I. Kvasnyuk, and N. M. Bida // Materials Science. – 2020. – **56**, № 2. – P. 143 – 151. https://doi.org/10.1007/s11003-020-00408-y
27. *Savruk M. P., Onyshko L. Yo., and Kvasniuk O. I.* Stress distribution near sharp and rounded V-notches in anisotropic elastic body under antiplane strain // Materials Science. – 2023. – **58**, № 4. – P. 427–436. https://doi.org/10.1007/s11003-023-00681-7
28. *Stress* state of an orthotropic plate at the holes with sharp and rounded tips / M. P. Savruk, A. Kazberuk, V. S. Kravets, and A. B. Chornenkyi // Materials Science. – 2023. – **58**, № 6. – P. 709–716. https://doi.org/10.1007/s11003-023-00720-3
29. *Саврук М. П., Зеленяк В. М.* Двовимірні задачі термопружності для кусково-однорідних тіл з тріщинами. – Львів: Растр-7, 2009. – 212 с.

Одержано 24.05.2023